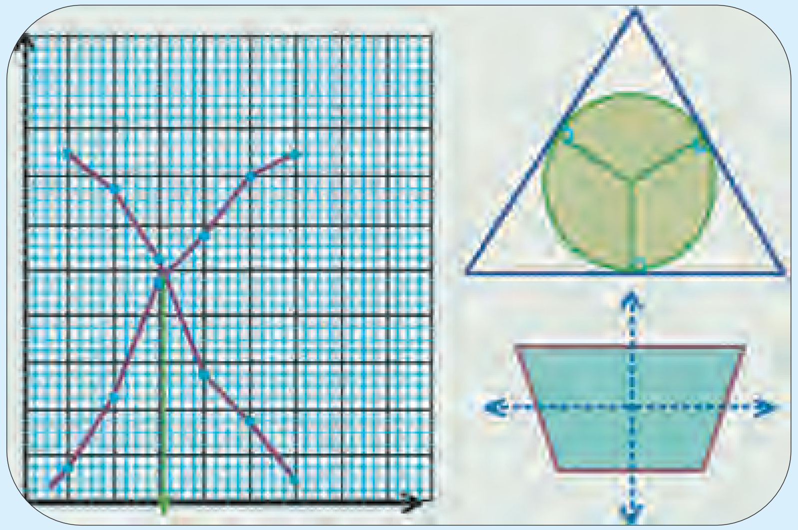
الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

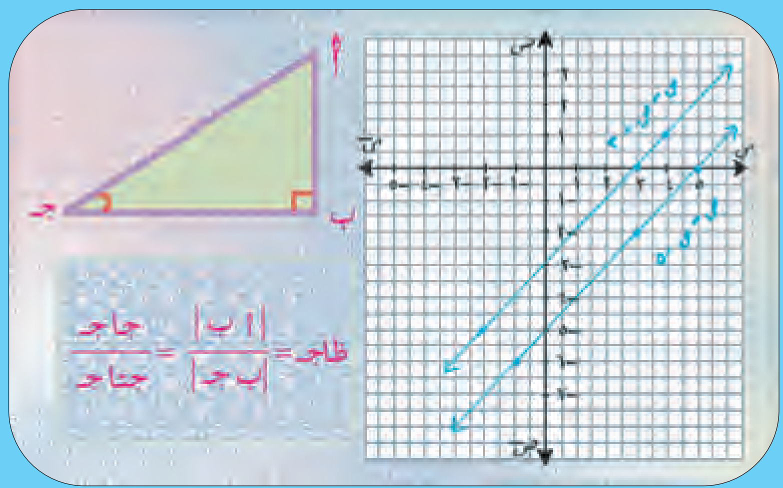


# دليل المعلم

## لتدريس كتاب

# الرياضيات

## للصف التاسع من مرحلة التعليم الأساسي




١٤٣٣هـ / ٢٠١٢م

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

# دليل المعلم

## لتدريس كتاب

# الرياضيات

### للصف التاسع من مرحلة التعليم الأساسي

**التأليف**

| | |
|---|---|
| د. أمة الآله علي حمد الحوري | أ. محمد عبدالرب محمد بشر |
| د. ردمان محمد سعيد | د. علي شاهر نعمان القرشي |
| د. منصور علي صالح عطاء | د. محمد رشاد الكوري |
| أ. مريم عبدالجبار سلمان | أ.عبدالله سلطان عبدالغني الصلاحي |
| أ. محمد علي مرشد | أ. سالمين محمد باسلوم |
| أ.يحيى بكار مصفر | أ. ذا النون سعيد طه |
| أ. عبدالباري طه حيدر | أ. مصطفى عبد الواحد العبسي |
| أ. عبده أحمد سيف | أ. جميلة إبراهيم احمد |
| أ. علي عبدالواحد | أ. أحمد سالم باحويرث |

**إشراف/ د. شكيب محمد باجرش**

**الإخراج الفني**

صف وتصميم وإخراج: جلال سلطان علي

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني

# النشيد الوطني

رددي أيتها الدنيا نشيدي    رديده وأعيدي وأعيدي
واذكري في فرحتي كل شهيدِ    وامنحيه حُللاً مِنْ ضوءِ عيدي

رددي أيتها الدنيا نشيدي
رددي أيتها الدنيا نشيدي

وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي    أنت عهدٌ عالقٌ في كل ذِمَّة
رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُهُ من كل شمس    اُخْلُدِي خَافِقَةً في كل قِمَّة
أمتي .. أمتي .. إمنحيني البأس يا مصدر بأسي    واذخُريني لَكِ يا أكرمَ أمة

عشتُ إيماني وحبِّي أُمميًا
ومسيري فوق دربي عربيا
وسيبقى نبضُ قلبي يمنيا
لن ترى الدنيا على أرضي وصيا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

## أعضاء اللجنة العليا واللجنة الإشرافية للمناهج

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول.
د. عبدالله عبده الحامدي.

| | |
|---|---|
| أ/ جميل علي الخالدي. | د/ صالح ناصر الصوفي. |
| أ.د/ محمد عبدالله الصوفي. | د/ أحمد حسن المعمري. |
| أ/ عبدالكريم محمد الجنداري. | د/ عبد الوهاب عوض كويران. |
| د/ عبدالله علي أبو حورية. | د/ إبراهيم محمد الحوثي. |
| د/ عبدالله لملس. | د/ علي قاسم إسماعيل. |
| أ/ منصور علي مقبل. | د/ عبدالقادر محمد العلبي. |
| أ/ أحمد عبدالله أحمد. | أ/ محمد هادي طواف. |
| أ/ محمد عبدالله زيارة. | أ/ لطفية أحمد حمزة. |

أ/ خالد محمد الجباري.


قررت اللجنة العليا للمناهج في اجتماعها رقم (٣٦) وتاريخ ٢٠٠٢/٣/١٧م طباعة هذا الدليل وتوزيعه للعام الدراسي ٢٠٠١ / ٢٠٠٢م .

الطبعة الثانية

١٤٣٣هـ / ٢٠١٢م

بسم الله الرحمن الرحيم

## تقديم

ونحن نتطلع بتيقظ واهتمام إلى السنوات المقبلة – الفترة الحا سمة في مسيرة التربية والتعليم في بلادنا – والعالم يشهد تطورات علمية وتقنية، مما يفرض علينا مزيداً من الجهد؛ لإيجاد معلم قادر على العطاء، والإنجاز، متفهم لما يجري من تطوير في المناهج التعليمية ، وأساليب تنظيمها وإنتاجها ، والتعامل مع التجديدات التربوية التي تحقق وظيفية المدرسة في المجتمع ، كل ذلك يضيف أدواراً جديدة للمعلم ، مما يتطلب منه الاستعانة بعدد من الأساليب والأدوات التي تمكنه من استيعاب أدواره الجديدة .

ومن بين الأدوات التي تساعد المعلم في تطوير أدائه داخل الصف الدراسي ، والمدرسة دليل المعلم المصاحب لكتاب الطالب ، والذي يتكون من مجموعة من الأساليب التي تمكنه من إدارة التعلم المدرسي، وفهم الكتاب المدرسي كونه يرتبط به .

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة الدليل الذي بين يديك هو أحد الأدوات التي تعينك على أداء رسالتك، وعليك البحث والاطلاع على كل ما هو مفيد من المعلومات بحسب تنوع مصادر المعرفة التربوية والعلمية ، وتدريب طلابك على كيفية التعلم من الكتاب المدرسي ومن غيره من المصادر التعليمية .

بالإضافة إلى ما يتم من تطوير للمناهج والكتب الدراسية وأدلة المعلمين فإننا نؤكد العزم على إصلاح التربية والتعليم بشكل متكامل ، والذي لن يتوقف عند إصدار الكتب المدرسية، وأدلة المعلمين فقط، بل سيتعداه إلى تدريب المعلمين، وإعادة تأهيلهم ، وتحديث أنماط التوجيه والتقويم والاختبارات .

كما لاننسى الجهود الكبيرة لكل من شارك في إنجاز عملية التطوير للمناهج والكتب الدراسية ؛ فنتوجه إليهم بجزيل الشكر لما بذلوه من عمل في سبيل تجسيد أهداف المنهج وتطلعاته ؛ خدمةً وإسهاماً في بناء مستقبل أفضل لأبنائنا وبناتنا .

والله من وراء القصد ،،،

**أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول**

**وزير التربية والتعليم**

**رئيس اللجنة العليا للمناهج**

بسم الله الرحمن الرحيم

# مقدمة الدليل

عزيزنا المدرس ..

عزيزتنا المدرسة ..

إذ يسرنا أن نضع بين يديك هذا الدليل لكتاب الرياضيات للصف التاسع من التعليم الأساسي ، فإننا نرى بالضرورة أن نوصيك ببذل الجهد الكبير للاستفادة منه بمصاحبة الكتاب المدرسي .

ومن أجل أن تتحقق أهداف المادة في هذا الصف ، فإنه يجب السعي الحثيث لتقديم حصص ناجحة ، وهذه الحصص لن تتم إلاّ بتخطيط جيد وهو ما يهدف إليه هذا الدليل .

لقد جاء تطوير مناهج الرياضيات للصفوف العليا ( ٧ – ٩ ) من مرحلة التعليم الأساسي ، وفق استراتيجية تربوية شاملة وخطة واضحة المعالم ، ومن أهم معالمها إنّها تعطى أهمية كبيرة لأدلة المعلمين ، وفق معايير معينة حتى يتمكن المدرس من الاستفادة منها في مجال تخطيط الدروس وتنفيذها .

وإذا كنا قد حرصنا على تقديم مادة علمية سليمة وسلسة وشيقة للطالب في الكتاب المدرسي ، فإننا حرصنا أشد على أن نقترح لك أفضل الطرق وأحسن الأساليب لتخطيط وتقديم حصص فاعلة ومثيرة ومحفزة للتعلم ..

وفي هذا الدليل ستجد في البداية مقدمات توضيحية حول الكتاب المدرسي والدليل نفسه تساعدك على فهم المنهجية التي بُني عليها وكيفية استخدامهما .

نسأل الله أن نكون قد وفقنا لإصابة أهدافنا

والله وراء القصد ،،،

**المؤلفون**

# المحتويات

## تابع المحتويات

# تابع المحتويات

# أهداف تدريس الرياضيات في التعليم العام

## يهدف تدريس الرياضيات في نهاية التعليم العام إلى :

١ – تزويد المتعلم بالمعارف الرياضية المناسبة والتي تؤدي إلى تطوير الشخصية بصورة عامة والجانب العقلي بصورة خاصة ، كما تراعي إشباع الحاجات وتنمية التفاعل الإيجابي في المجتمع .

٢ – إكساب المتعلم القدر الكافي من التطبيقات الرياضية في مختلف المجالات الميدانية عبر مخطط منهجي يراعي فيه متطلبات مواصلة الدراسة اللاحقة .

٣ – ربط المتعلم بين القوانين والعلاقات الرياضية والاستفادة منها كلما سنحت الفرصة .

٤ – إكساب المتعلم القدرة على توظيف المعارف الرياضية في ميادين الحياة المختلفة .

٥ – قدرة المتعلم على صياغة المواقف الحياتية والعملية صياغة رياضية وتحليلها ووضع الفروض واختبارها ، واختيار المناسب منها للوصول إلى الحل .

٦ – استخلاص المتعلم نتائج من الحالات الخاصة ، وتطبيقها على حالات جديدة واستخدام الأسلوب العلمي لحل المشكلات الرياضية بطريقة موضوعية .

٧ – تقدير معقولية الجواب لدى المتعلم وتوقع الحلول المناسبة للعديد من المواقف الرياضية المرتبطة ببيئته والتحقق من صحة النتائج .

٨ – إكساب المتعلم القدرة على الملاحظة والاستقراء والدقة في التعبير .

٩ – إكساب المتعلم مهارات التفكير والإبداع والابتكار .

١٠ – إكساب المتعلم أساليب التفكير المختلفة عند حل المسائل وتطبيق القوانين والمعارف الرياضية ، مثل أسلوب التفكير الاستقرائي والاستنباطي أو التحليل وغيرها .

١١ – إدراك المتعلم أهمية الرياضيات في دراسة فروع العلوم الأخرى .

١٢ – تنمية روح البحث لدى المتعلم ومتابعة التطورات العلمية المعاصرة .

١٣ – إكساب المتعلم ميول واتجاهات إيجابية نحو الرياضيات ، وتنمية اتجاه التعلّم الذاتي .

١٤ – تنمية التذوق الجمالي والفني لدى المتعلم من خلال تناسق الرسومات والأشكال البيانية والبنى الرياضية المختلفة .

١٥ – إكساب المتعلم اتجاهات خلقية واجتماعية وعلمية سليمة مثل الدقة والترتيب والنظام والنظافة والصبر والتأني والتركيز والمتابعة والعمل الجماعي وغيرها .

١٦ – تقدير المتعلم لدور علماء الرياضيات ، خاصة العرب والمسلمين منهم في نقل وتطوير المعرفة الرياضية على مر العصور.

# أهداف تدريس الرياضيات للصفوف الثلاثة الأخيرة ( ٧ – ٩ ) من التعليم الأساسي

## يهدف تدريس الرياضيات في نهاية التعليم الأساسي إلى :

١ – استيعاب المتعلم لمفاهيم المجموعات والعلاقات وإجراء العمليات عليها .

٢ – تمييز المتعلم بين مجموعة الأعداد الصحيحة والنسبية وغير النسبية ، والحقيقية ، وإجراء العمليات الحسابية عليها .

٣ – توضيح المتعلم للحدود والمقادير الجبرية ، وإجراء العمليات عليها .

٤ – تحليل المتعلم المقادير الجبرية .

٥ – حل المتعلم لمعادلات ومتراجحات من الدرجة الأولى والثانية جبرياً وبيانياً .

٦ – تفسير المتعلم لبعض المفاهيم الحديثة في الهندسة مثل ( التناظر ، الانعكاس ، والانسحاب ) .

٧ – توضيح المتعلم لبعض المفاهيم في الهندسة التحليلية .

٨ – إكساب المتعلم المفاهيم والتعميمات الهندسية المتعلقة بالمضلعات ( بشكل خاص المثلثات والرباعيات والدائرة .

٩ – برهنة المتعلم لبعض النظريات المتعلقة بالمضلعات والدائرة .

١٠ – حساب المتعلم مساحات وحجوم بعض الأشكال الهندسية .

١١ – قراءة المتعلم جداول وأشكال إحصائية وتمثيلها بيانياً .

١٢ – حساب المتعلم مقاييس النزعة المركزية .

١٣ – تقدير المتعلم لروح البحث والابتكار من خلال التطورات العلمية المعاصرة .

١٤ – تمثّل المتعلم لبعض القيم العلمية السليمة كالأمانة العلمية ، والدقة ، والنظام ، والنظافة ، والترتيب والموضوعية ، والصبر ، والتأني والتركيز والثقة بالنفس من خلال منهجية علم الرياضيات .

١٥ – إكساب المتعلم اتجاهات إيجابية نحو الرياضيات ، والتعلم الذاتي .

١٦ – تذوق النواحي الجمالية والفنية لدى المتعلم من خلال تناسق الرسومات والأشكال البيانية والبُنى الرياضية المختلفة .

# أهداف تدريس الرياضيات في الصف التاسع من التعليم الأساسي

## يكون المتعلم بعد الانتهاء من دراسة الصف التاسع قادراً على :

١ – التعبير عن المجموعة ، وإيجاد مجموعة الفرق ، والمجموعة المتتمة ، وصف المجموعة .

٢ – التعرف على علاقة التعدي وعلاقة التكافؤ .

٣ – التعرف على التطبيقات ( الدوال ) .

٤ – تحليل المقادير الجبرية بطرق مختلفة ( الثلاثي البسيط وغير البسيط ، المربع الكامل ، إكمال المربع ، مجموع وفرق مكعبين ، -التجميع ) .

٥ – التعرف على الكسر الجبري وإجراء العمليات الأربع على الكسور الجبرية .

٦ – التعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ( ح ) وتمثيلها على خط الأعداد .

٧ – إجراء العمليات الأربع على الأعداد الحقيقية .

٨ – حل معادلات من الدرجة الأولى ذات مجهولين بيانياً وجبرياً .

٩ – حل معادلة من الدرجة الثانية على صورة أ س$^٢$ + ب س + جـ = ٠ بيانياً وجبرياً ( بالتحليل وبالقانون ) .

١٠ – برهنة نظرية فيثاغورث واستخدامها في إيجاد أطوال أضلاع المثلث .

١١ – إيجاد البعد بين نقطتين في مستوى وإحداثيات منصف قطعة مستقيمة .

١٢ – التعرف على الانسحاب والدوران والتكبير وحالات تشابه المثلثات .

١٣ – رسم وبرهنة بعض النظريات المتعلقة بالدائرة ومماساتها ، والأشكال الرباعية الدائرية .

١٤ – التعرف على النسب المثلثية الأساسية للزوايا الحادة .

١٥ – حساب مقاييس النزعة المركزية ( الوسيط ، المنوال ) .

١٦ – تمثل بعض القيم كالدقة والنظام والترتيب والصبر .

١٧ – تقدير أهمية الرياضيات والتعلم الذاتي من خلال البحث عن المعرفة الرياضية .

١٨ – استخدام الآلات الحاسبة لحل بعض المسائل الحسابية والتطبيقية .

١٩ – تقدير دور العلماء وخاصة العرب والمسلمين في وضع أسس الرياضيات .

## جدول توزيع الحصص على الوحدات

| | عنوان الوحدة | عدد الحصص |
|---|---|---|
| ١ | المجموعات والعلاقات | ٢٢ |
| ٢ | تحليل المقادير الجبرية | ٣٢ |
| ٣ | المعادلات | ١٩ |
| ٤ | حساب المثلثات | ١٧ |
| ٥ | الهندسة | ٤٢ |
| ٦ | هندسة الاحداثيات والتحويلات | ٢٨ |
| ٧ | الإحصاء | ١٣ |

## الرموز المعتمدة في كتب الرياضيات للصفوف ( ٧ - ٩ )

$\in$ عنصر في / ينتمي إلى

$\notin$ ليس عنصراً في / لاينتمي إلى

$\subset$ مجموعة جزئية من ( وأيضاً الرمز $\subseteq$ )

$\not\subset$ ليست مجموعة جزئية من ( وأيضاً الرمز $\nsubseteq$ )

{ أ ، ب ، جـ ، . . . } حاصرتا المجموعة

$\cap$ تقاطع

$\cup$ اتحاد

$\phi$ ، { } المجموعة الخالية ( فاي )

سَ' متممة المجموعة سَ .

سَ / صَ = سَ − صَ الفرق بين المجموعتين سَ، صَ .

سَ × صَ حاصل ضرب المجموعتين سَ ، صَ .

ط مجموعة الأعداد الطبيعية

صَ مجموعة الأعداد الصحيحة ( ومنها صَ$^+$ ، صَ$^-$ )

ك مجموعة الأعداد الكسرية ( ومنها ك$^+$ ، ك$^-$ )

ن مجموعة الأعداد النسبية ( ومنها ن$^+$ ، ن$^-$ )

ح مجموعة الأعداد الحقيقية ( ومنها ح$^+$ ، ح$^-$ )

[ أ ، ب ] الفترة المغلقة أ ، ب .

] أ ، ب [ الفترة المفتوحة أ ، ب .

[ أ ، ب [ الفترة نصف المفتوحة من جهة أ .

] أ ، ب ] الفترة نصف المفتوحة من جهة ب .

$\pi$ النسبة التقريبية ( باي ) .

$>$ أكبر من

$<$ أصغر من

$\geq$ أكبر من أو يساوي

$\leq$ أصغر من أو يساوي

$=$ يساوي

$\nless$ ليس أصغر من

$\ngtr$ ليس أكبر من

$\neq$ لايساوي

$\parallel$ يوازي

$\nparallel$ لايوازي

$\perp$ عمودي على

$\not\perp$ ليس عموديا على

$\approx$ يساوي تقريباً

$\equiv$ يكافئ

$\sim$ يشابه

$\cong$ يطابق

$\because$ بما أن

$\therefore$ إذن

$\overline{\text{أ ب}}$ القطعة أ ب

$|\text{أ ب}|$ طول القطعة أ ب .

$\overrightarrow{\text{أ ب}}$ الشعاع الذي بدايته النقطة أ .

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ المستقيم أ ب ( الذي يمر بالنقطتين أ ، ب ) .

$\propto$ يتناسب

$\sum$ المجموع

$\Delta$ المثلث

∢أ ب جـ ، ∢ب الزاوية أ ب جـ ، أو الزاوية التي رأسها ب .

ق ( ∢ أ ب جـ ) قياس الزاوية أ ب جـ .

# منهجية إِعداد الكتاب المدرسي وكيفية استخدامه

عند إِعداد كتب الرياضيات للصفوف العليا ( ٧ – ٩ ) من مرحلة التعليم الأساسي رأى المؤلفون تبني منهجية تواكب استراتيجية مناهج هذه الصفوف التي استندت إِلى السياسة التربوية التعليمية للدولة وإِلى الأسس العامة للتربية ، ومن جملة ما ارتكزت عليه منهجية التأليف مراعاة الطرق والأساليب ما ورد في وثيقة المناهج من ناحية ، وتراعي النمو العقلي والنفسي للطالب من ناحية أخرى ، وكل ذلك مبنياً على التسلسل المنطقي والعلمي للمادة التعليمية ، ولهذا ظهرت ملامح في كتب الرياضيات لهذه الصفوف ، من أهمها :

١ – الحرص على كتابة المادة التعليمية بلغة مبسطة وواضحة ، مع الاعتناء بتوحيد المصطلحات والرموز فيها ، ودعم ذلك بالرسوم التوضيحية والتسلسل المترابط ، وهذا يخدم في الوقت نفسه توليد الحافز للتعلم الذاتي إِلى جانب التدريبات والأنشطة والمداخل التعليمية المناسبة .

٢ – عرض المادة من خلال مداخل وأساليب تدريسية تتفق مع تسلسل المادة ومع النمو العقلي للطالب ، وقد قل العمل بالمحسوسات واقترب أكثر إِلى العمليات التجريدية ، إِذ على الطالب أن يمارس عمليات عقلية أعلى مما سبق أو بمستوى أعلى ، منها : التجريد والتعميم والتصنيف والتفسير والترجمة ، والطالب في هذه الصفوف يمتلك قدرات عقلية تساعده على استخدام أسلوبي التفكير الاستقرائي والاستنتاجي ، والطريقتين التحليلية والتركيبية .

٣ – جرت – قدر الإِمكان – محاولة لتوظيف المادة التعليمية في مواقف كثيرة ، وما التدريبات العملية والأنشطة والمسائل التطبيقية إِلاّ نوعاً من تطبيق مبدأ توظيف المادة التعليمية ، كما إِن ذلك يتضمن بشكل أو آخر تنمية الجانب الوجداني لدى الطلبة ، إِذ ينمي ذلك كثيراً من الميول والاتجاهات والقيم ، والجانب الوجداني يتحقق أيضاً من خلال تقديم المواضيع بشكل منسق إِلى جانب عرض بعض جماليات المادة هنا وهناك .

٤ – مراعاة الفروق الفردية حيث عرضت المادة بتسلسل عبر قدر كافٍ من الأمثلة ، وتنويع في التمارين والمسائل ، وقد أخذ ذلك تدريجا متصاعداً في الصعوبة ، وتخدم التمارين العامة والمسائل في كل وحدة تثبيت المادة التعليمية وتهدف إِلى معالجة الصعوبات والأخطاء الشائعة .

٥ – تقديم المفاهيم بشكل دقيق وربطها بالمصطلحات المناسبة ، دون مغالاة في دقتها الرياضية ولا مبالغة في تعميماتها المجردة . وقد بنيت مراحل تقديم المفاهيم عموماً على ثلاث خطوات هي :

( ١ ) تحديد خصائصها المشتركة ، وهذه عملية التجريد .

( ٢ ) توظيف وتطبيق هذه الخصائص على عناصر أخرى تمثل المفهوم ، وهذه عملية تجسيد وعملية تعميم .

( ٣ ) فصل عناصر المفهوم عن غيرها لمفهوم آخر ، وهذه عملية تصنيف وتمييز ، بل عملية تعميق .

ومن ذلك تمت العناية بصياغة تعاريف لبعض المفاهيم .

٦ – معالجة البرهنة من خلال عدد من المبرهنات والتمارين المبسطة ، تمت ضمن ذلك تحدد المعطيات ( المقدمات ) والمطالب ( النتائج ) وقد اهتم في هذا المجال بتنمية أسلوب الحصول على المبرهنة وصياغتها ، وأسلوب الحصول على فكرة البرهان وعرضه .

وعُنى هنا بأساليب التفكير الاستقرائي والاستنتاجي إلى جانب الطريقتين التركيبية واالتحليلية .

والبرهنة تظهر لأول مرة في هذه الصفوف ، إلاّ أنّها تسير في مراحل على النحو التالي :

( ١ ) إعطاء الأسباب والتعليلات لبعض الخطوات ، وقد مُهّد لذلك في الصفوف السابقة ولا زال مستمراً في هذه الصفوف .

( ٢ ) فهم البرهان والخطوات المنطقية ، ويتركز هذا في الصف السابع .

( ٣ ) إعادة البرهان بتسلسل خطواته وتفسيرها ، وهذا مشترك في الصفين السابع والثامن .

( ٤ ) إقامة البرهان بشكل ذاتي ، حيث يتمكن الطالب بنفسه من إقامة برهان بعض النتائج والمسائل ، ويبدأ هذا من الصف الثامن .

وفي هذا المجال لابد أن يتعرف الطالب على نموذج عرض البرهان ، وكيفية رسم الأشكال والأعمال المساعدة .

٧ – إعطاء أهمية للمهارات موازية لأهمية تقديم المفاهيم ومعالجة المبرهنات ، بحيث لايطغى واحد على الآخر ، وقد اهتم بتوفير متطلبات تكوين المهارات على النحو التالي :

(أ) القدرة على تعليل وتفسير الخطوات لأي أداء ، ويمثل ذلك الفهم .

( ب ) الحصول على نتائج صحيحة ودقيقة ، ويمثل ذلك القدرة ( وهي مرحلة سابقة للمهارة ) .

( جـ) إنجاز العمل المطلوب بشكل صحيح وفي الوقت المحدد بالدقة المطلوبة ، ويمثل هذا اتمام المهارة .

وإذ تفسر المهارة غالباً بأداء المهام بالدقة المطلوبة في الوقت المحدد لها ؛ بمعنى آخر أن المهارة لها جانبان هما الدقة والسرعة .

العناية بالمهارات هو امتداد لما تقدم في الصفوف السابقة ، إلاّ أنه يمتد ويتوسع إلى مهارات أعلى ، وأداءات أكثر دقة ، وآليات أكثر تعقيداً أو أكثر خطوات .

٨ – الاهتمام بحل المسائل ، فهو الأداة الأساسية لتنمية أساليب التفكير عامة ، والرياضي خاصة ، ويعتبر ما سبق تقديمه في الصفوف ( ١–٦ ) من شرح وتوظيف لاستراتيجية حل المسألة هو الأساس للاستمرار في هذا المجال ، والذي قد امتد من حل المسائل اللفظية إلى برهنة مسائل في الهندسة ، والتي تتمثل في الخطوات التالية :

(أ) حصر المعطيات .     ( ب ) تحديد المطلوب .

( جـ) وضع الخطة ، ويتم فيها استعادة المفاهيم والتعميمات في المسألة ، وما يمكن من مفاهيم وتعميمات تساعد على الحل ومن ذلك تحديد العلاقات المتضمنة في المسألة والعمليات اللازمة للحل ، ويشمل ذلك إعادة الصياغة والتوضيح بالأشكال التي تعكس المعطيات وتصور أي عمل مساعد .

( ء ) تنفيذ الحل : ويتم فيه تنفيذ خطة الحل ، ووضع الخطوات في تسلسل منطقي مع تفسيرها وتعليلها ، وتدارك الأخطاء ، إذ يمكن اكتشاف خلل في الخطة أثناء تنفيذها ، أو يمكن اختصارها أو ظهور حلول أخرى أفضل أو أوضح ، وفي نهاية هذه الخطوة تتم صياغة جملة الجواب .

( هـ) التحقق من الحل : وهو مطلب تربوي ، أكثر منه علمي ، إذ يساعد على النقد الذاتي حتى يتمكن الطالب من تلافي أخطائه بنفسه .

وانطلاقاً مما سبق فإننا نرى أن يكون استخدام الكتاب المدرسي وفقاً لما يلي :

أ – أعد الكتاب المدرسي في الأساس لاستخدام الطالب ، إلاّ أنّ المدرس يجد فيه المادة التعليمية الضرورية التي تقدم للطالب ، كما يجد فيه أسلوباً لعرض هذه المادة وتسلسلها ، ونماذج لأساليب التقويم ، حيث إن الكتاب يعكس المنهاج انعكاساً تاماً . وبذلك فالكتاب المدرسي خير معين للمدرس في تخطيط وتنفيذ درسه اليومي .

وهذا لايعني أن يهمل المدرس الاستعانة بالدليل ، فالدليل مكمل للكتاب المدرسي .

كما يوصي المدرس بالمراجع الأخرى العلمية والتربوية ، والتي يمكن أن تساعده في تطوير أساليبه التدريسية وتعمق لديه المادة العلمية .

ب – يعتبر الكتاب المصدر الرئيسي للتعلم ، وقد شكل بحيث يساعد الطالب على التعلم والدراسة الذاتية ، ولذا على المدرس أن يراعي الاستعانة بالكتاب المدرسي في كل حصة دراسية ، فيعطي الطلبة تكليفات ليس فقط لحل التمارين والمسائل ، بل لمراجعة المكتوبة من حيث الشرح والتعاريف والتعميمات والأمثلة المحلولة ، كما يطلب منهم أداء التدريبات والأنشطة طالما أن وقت الحصص لايستوعب ذلك ، وكل هذا يساعد على تشكيل شخصية الطالب العلمية .

وبهذا نرى أن مفهوم الكتاب المدرسي كمجموعة تمارين للطالب مفهوم خاطئ ويمارسه كثير من المدرسين دون أن يدركوا .

جـ – يقدم الكتاب المدرسي للطالب نماذج مثالية للحل ، والتي على الطالب أن يتبعها ويقلدها ولذا ليس بالضرورة أن يعيد المدرس حل أمثلة الكتاب كما هي ثم يطلب نقلها إلى الكراسات ، بل عليه أن يشرح ما غمض في الكتاب وأن يقدم أمثلة أخرى مشابهة يختارها من تمارين الكتاب أو يعدها بنفسه .

ء – يقوم المدرس بتقسيم بنود كل وحدة حسب عدد الحصص المتاحة ، وبذلك يخطط كل حصة بما يمكن أن تغطي المادة التعليمية وأمثلتها وتمارينها ، ويحدد من ذلك الواجبات الصفية والمنزلية بما يخدم أهداف الحصة الدراسية . هذا كل ما يتعلق بالكتاب المدرسي منهجية واستخداماً وقد قدم بشكل مختصر وعلى المدرس التوسع في ذلك من المراجع المناسبة .

# منهجية إعداد دليل المعلم وكيفية استخدامه

لقد تبنى مؤلفو أدلة المعلمين لكتب الرياضيات للصفوف ( ٧ – ٩ ) من مرحلة التعليم الأساسي منهجية تنبع من منهجية تأليف الكتب نفسها وتتواكب مع استراتيجية مناهج هذه الصفوف ، ولهذا جاءت الأدلة مكملة للكتب وتشرحها وتساعد المدرس في تخطيط وتنفيذ الحصص الدراسية بما يراعي خصوصية المواضيع ولايلغي إبداعه في سلوكه التدريسي الذي يعطي له الحق في إبراز شخصيته مع أخذه بعين الاعتبار ظروف طلبته ، ومن هنا ظهرت الملامح التالية في أدلة كتب الرياضيات للصفوف ( ٧ – ٩ ) من مرحلة التعليم الأساسي والتي يؤخذ بها عند استخدام الدليل :

١ – الحرص على أن تخطط جميع الوحدات، بل وجميع الدروس ، إلاّ أنه لم يرد تفصيل بخطوات الحصص ، وبهذا حمل تشكيل كل وحدة ما يلي :

(أ) جدولاً بتوزيع حصص الوحدة إلى دروس حددت عدد حصصها كمقترح مناسب ، وعلى المدرس ألاّ يزيد كثيراً أو ينقص كثيراً عن هذا العدد من الحصص .

( ب ) أهداف الوحدة عامة ، وهو ما يخضع للقياس في اختبار الوحدة نهاية تدريسها وهذه الأهداف مشتقة من أهداف تدريس الرياضيات لهذا الصف ، كما إنها منسجمة – إن لم تكن متطابقة – مع وثيقة المنهاج لكل وحدة .

( جـ) مقدمة للوحدة تحتوي عامة على لمحة تاريخية ، ومفاهيم وتعميمات الوحدة وأقسامها وبعض الأخطاء الشائعة وسبل علاجها وبعض التوجيهات التدريسية العامة ، وكل ذلك يشكل خلفية علمية للمدرس فقط ، ولايجوز التطرق له مع الطلبة في الحصص الدراسية .

( ء ) تخطيطاً لكل درس ، حددت فيه أهداف للدرس ككل مع ذكر عدد الحصص ، ثم تطرّق للمحتوى إن كان جديداً مع ذكر الوسائل التعليمية إن كانت ضرورية وبعد ذلك تم التعرض لتنفيذ الدرس ، بتحديدعنوان عام لكل حصة دراسية وتوجيهات عامة لكل الحصص . جاء بعدها إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل وفكرة عن التقويم للدرس نفسه .

( هـ ) توجيهات في دروس التمارين العامة والمسائل يراعي المدرس من خلالها المراجعة العامة للوحدة ، وتنفيذ عمل صفي ومعالجة الصعوبات والأخطاء والإعداد والتهيئة لاختبار الوحدة ، وكجزء من ذلك يكلف الطلبة بحل اختبار الوحدة الوارد في الكتاب كواجب منزلي .

( و ) يعطي المدرس اختبار الوحدة المعد في الدليل ويمكنه أن يعد اختباراً آخر وفق ذلك النموذج وبما يحقق الأهداف المرسومة ، ويستغل الحصة التالية لمراجعة هذا الاختبار ، ومعالجة الاخطاء والأهداف التي لم تتحقق بشكل أو آخر .

٢ – كل ما قدم للمدرس في الأدلة ما هو إلاّ مقترحات ، ولكنها مواكبة للمادة المعدة في الكتاب ، ولهذا على المدرس أن يكيّف هذه المقترحات ضمن الواقع التدريسي وفق ظروف الصف ، وبما يتيح له الإبداع غير الخارج عن أهداف المنهاج . ولهذا نوصي المدرس بأن يقرأ الدليل قراءة متمعنة ، ثم يخطط كل حصة على حدة

بأهدافها وخطواتها التمهيدية والمادة التعليمية التي ربما يعد لها أمثلة جديدة من عنده ، كما يقدم لها تقويماً مناسباً يعده بنفسه .

٣ – على المدرس أن يعمل بشكل مستمر على تثبيت وتطوير المعارف والمهارات السابقة ، وأن يخطط عملاً صفياً كلما أمكن ، وخاصة في الحصص المحددة للتمارين ، كما يفضل التقويم في نهاية كل درس حتى يطمئن إلى أن أهدافه تتحقق أولاً بأول .

٤ – أن يستخدم الكتاب المدرسي استخداماً فاعلاً كما قد وضح ذلك في منهجية إعداد الكتب المدرسية وكيفية استخدامها ، وأن يوظفها بشكل يومي ، ولايقتصر استخدامها – كما تعود كثير من المدرسين – على تحديد الواجبات والتمارين .

٥ – مراعاة الفروق الفردية أمر هام ، يجب أن يعطية المدرس عناية خاصة ، وذلك بالأخذ بتسلسل المادة ، وتقديم الأمثلة المتدرجة الأقرب فهماً واستخدام الوسائل إن تطلب الأمر وإن لم تذكر في الدليل ، ويتم إعطاء الواجبات الصفية والمنزلية بشكل متدرج في الصعوبة وبحيث يحقق للطلبة المتوسطين شيئاً من تحقيق الذات، وقد يتطلب هذا الأمر من المدرس أن يعد بنفسه أمثلة وتمارين وإلاّ فإننا نوجه نظره إلى أن تكون ضمن أهداف الدرس ومن ذلك مثلاً إعداد التمارين العلاجية لضعفاء الطلبة والتمارين التدريبية للمتوسطين منهم والتمارين والمسائل الإثرائية للمتقدمين .

٦ – كل ما يشار إليه من طرق لتنمية القدرات العقلية على المدرس تنفيذه بشكل أو آخر ، ولذا ربما يكلف المدرس طلابه بالمزيد من العمل خارج الصف ، مثل إنجاز بعض التدريبات أو تنفيذ بعض الأنشطة ، وبما يتيح لهم ربطاً مستمراً بالمادة مع مراعاة تطبيقاتها الهامة في الحياة .

٧ – لم يظهر حل المسألة بشكل بارز في الكتب المدرسية المعنية ، إلاّ في البرهنة ، ولهذا على المعلم ، وكلما اتيحت الفرصة ، أن يعيد ما تعلمه الطلبة في الصفوف السابقة من استراتيجية حل المسألة ، وأن يربطها دائماً بالبراهين المعروضة والمطلوب القيام بها .

٨ – ينصح المدرس بأن يوجّه طلبته إلى تنفيذ حلول التمارين والمسائل بقوالب وأشكال نموذجية يتبعونها دائماً مع العناية بنظافة الحل ونظامه وجمال عرضه .

الوحدة الأولى

# المجموعات والعلاقات

## جدول توزيع الحصص

| البند | الموضوع | عدد الحصص |
|---|---|---|
| ١ – ١ | كتابة المجموعة بالصفة المميزة | ٢ |
| ١ – ٢ | مجموعة الفرق والمجموعة المتممة | ٣ |
| ١ – ٣ | العلاقة المتعدية | ٣ |
| ١ – ٤ | علاقة التكافؤ | ٢ |
| ١ – ٥ | التطبيق | ٤ |
| ١ – ٦ | مجموعة الأعداد الحقيقية | ٢ |
| ١ – ٧ | التطبيق الخطي | ٢ |
| ١ – ٨ | تمارين ومسائل عامة | ٢ |
| ١ – ٩ | اختبار الوحدة | ٢ |
| | المجموع | ٢٢ |

## أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يكتب مجموعة معطاة بالصفة المميزة لفظياً وبالسرد بالصفة المميزة رمزياً والعكس .

٢ – يوجد الفرق بين مجموعتين ويمثله بأشكال فن .

٣ – يوجد المجموعة المتممة لمجموعة معطاة .

٤ – يستنتج قانوني دي مورجان .

٥ – يتعرف على العلاقتين المتعدية والتكافؤ ويميزهما .

٦ – يعرّف التطبيق ، ويمثله سهمياً وبيانياً .

٧ – يكتب المجال والمجال المقابل والمدى للتطبيق .

٨ – يعيّن قاعدة التطبيق .

٩ – يتعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ورمزها ( ح ) .

١٠ – يتعرّف على التطبيق الخطي ويمثله بيانياً .

## المقدمــــة

**لمحــة تاريخيــة :**

جاء تطور الجبر بخروجه عن مفهومه التقليدي كونه تعميماً للحساب إلى اكتشاف البنى الجبرية ، التي فتحت الطريق إلى التعميم والتجريد في علم الجبر الحديث ومن هذه البنى الجبرية المختلفة ماله أهمية كبرى مثل : المجموعات والزمر والحلقه والحقل والجبر البولي وغير ذلك .

بدأ ظهور المجموعات بالذات مقروناً بحل المعادلات الجبرية ذات درجة أعلى من ٣ . كما اكُتشفت المجموعات وتطور مفهومها على أيدي كيلي وهو إنجليزي ( ١٨٢١ – ١٨٩٥ ) حتى أخذت الصورة التي هي عليها الآن .

وتتضح أهمية المجموعة التي تعتبر من أهم الانجازات الرياضية منذ سنة ١٨٠٠م في العمل على توحيد أفرع مختلفة من الرياضيات تبدو غير مرتبطة ببعضها ، وفي دورها أيضاً في تطور ونمو الرياضيات التطبيقية وميكانيكا الكم فلقد ساعدت نظرية المجموعات في التنبؤ بوجود جزئيات جديدة ، وقد بيّن كليد ( ١٨٧٢ ) دور مفهوم المجموعة في توحيد الهندسات عن طريق دراسة اللامتغيرات الخاصة بكل هندسة تحت مجموعة التحويلات الخاصة بها ، كما بيّن لي ( ١٨٧١ ) عن طريق نظرية المجموعات المستمرة ( أو مجموعات لي ) أن المجموعة هي جزء من التحليل الرياضي . إن نظرية المجموعات نظرية رائدة في الرياضيات المعاصرة بعد أن تغلغلت في ثنايا المناهج الدراسية في كل المستويات .

**اقسام الوحدة :**

تنقسم هذه الوحدة إلى تسعة بنود على النحو التالي :

- سبق للطالب دراسة كتابة المجموعات بذكر الصفة المميزة لفظياً وفي هذه الوحدة سيدرس كتابة المجموعة بالصفة المميزة رمزياً .
- كما تعرف الطالب من قبل على عمليات على المجموعات مثل التقاطع والاتحاد وفي هذه الوحدة يدرس الفرق بين مجموعتين والمجموعة المتممة .
- بالنسبة لأنواع العلاقات سبق أن درس الانعكاسية والمتناظرة وهنا يدرس المتعدية والتكافؤ .
- سيدرس هنا التطبيق ومكوناته وكذلك التطبيق الخطي وتمثيله بيانياً .
- في مجموعات الأعداد درس الطالب من قبل المجموعات ط ، صه ، ن ؛ وسيدرس في هذه الوحدة مجموعة الأعداد الحقيقية ( ح ) بعد دراسة مجموعة الأعداد غير النسبية .
- اختتمت الوحدة بتمارين ومسائل عامة واختبار .

**المفاهيم الجديدة في هذه الوحدة :**

طريقة الصفة المميزة وفيها نسجل عنصراً رمزياً ونذكر الصفة التي تحدد ارتباط مثل هذا العنصر في المجموعة ، مثلاً :

سه = { س : س ∈ ط ، س > ٥ }.

**الفرق بين مجموعتين**

يقال لمجموعة العناصر التي تنتمي إلى س~ ولا تنتمي إلى ص~ أنها مجموعة الفرق بين س~ ، ص~ ونكتب س~/ص~ أو س~ − ص~ أي أن :

س~/ص~ = { أ : أ ∈ س~ ، أ ∉ ص~ }.

ويلاحظ ما يلي :

١) س~ − ص~ ≠ ص~ − س~ .

٢) س~ / φ = س~ .

٣) φ /س~ = φ .

٤) س~/ص~ = φ إذا كانت س~ ⊆ ص~ .

٥) س~/ص~ = س~ إذا كانت س~ ∩ ص~ = φ .

**متممة المجموعة :**

إذا كانت المجموعة ش~ هي المجموعة الشاملة ، فإن المجموعة التي تحتوي على عناصر ش~ والتي لاتنتمي إلى س~ تسمى المجموعة المتممة للمجموعة س~ ويرمز لها بالرمز س~′ ، أي أن :

س~′ = { س : س ∈ ش~ ، س ∉ س~ }.

ويلاحظ أن :

١) (س~′)′ = س~ .　　٢) س~ ∪ س~′ = ش~ .　　٣) س~ ∩ س~′ = φ .

٤) (س~ ∩ ص~)′ = س~′ ∪ ص~′ ،　　٥) (س~ ∪ ص~)′ = س~′ ∩ ص~′ } قانونا دي مورجان

ودي مورجان (١٨٠٦ – ١٨٧١) عالم رياضيات انكليزي ولد في الهند وتوفي في لندن ، واهتم بالمنطق كما اهتم بالرياضيات ومن أهم اكتشافاته القوانين المعروفه باسمه السابقه الذكر .

ولبرهنة هذه القوانين نعتمد على فكرة أن الطرف الأيمن مجموعة جزئية من الطرف الأيسر ، والعكس؛ وبذلك يتساوى الطرفان ، ولنأخذ المثال التالي :

للبرهنة على أن (س~ ∪ ص~)′ = س~′ ∩ ص~ .

أولاً : نفرض أن س ∈ (س~ ∪ ص~)′

∴ س ∉ س~ ∪ ص~ (من تعريف المتممة)

∴ س ∉ س~ و س ∉ ص~ ( من تعريف الاتحاد )

∴ س ∈ س~′ و س ∈ ص~′( من تعريف المتممة )

∴ س ∈ س~′ ∩ ص~′( من تعريف التقاطع)

∴ (س~ ∪ ص~)′ ⊆ س~′ ∩ ص~′ (١)

ثانياً : نفرض أن س ∈ س~′ ∩ ص~′

∴ س ∈ س~′ و س ∈ ص~′( تعريف التقاطع )

س ∉ س~ و س ∉ ص~ ( تعريف المتممة )

س ∉ ( سـ ← صـ ) ( تعريف الاتحاد )

س ∈ ( سـ ← صـ )′ ( تعريف المتممة )

∴ ( سـ′ | صـ′ ) ⊆ ( سـ ← صـ )′ ( ٢ )

من ( ١ ) ، ( ٢ ) ينتج أن ( سـ ← صـ )′ = سـ′ | صـ′ .

**أنواع العلاقات :**

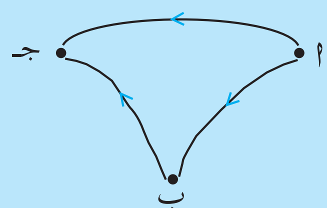
كما نعلم إن كل مجموعة عناصرها ازواج مرتبة تسمى علاقة وتعرف العلاقة أما على مجموعة أو من مجموعة إلى أخرى .

كما سبق دراسة نوعين من العلاقات هما الانعكاسية والمتناظرة وفي هذه الوحدة سندرس العلاقة المتعدية وعلاقة التكافؤ .

**العلاقة المتعدية :**

تكون العلاقة ع متعدية على المجموعة سـ :

إذا كان لكل ( أ ، ب ) ، ( ب ، جـ ) ∈ ع ، فإن ( أ ، جـ ) ∈ ع حيث أ ، ب ، جـ ∈ سـ أي أنه : إذا كان أ مرتبط بعلاقة مع ب ، ب مرتبط بعلاقة مع جـ فإن أ مرتبط بعلاقة مع جـ .




ومن العلاقة المتعدية :

– علاقة التساوي على مجموعة الأعداد مثل :

ط أو صـ أو ح .

– علاقة « > » على أي مجموعة من مجموعات الأعداد .

– لاتكون العلاقة ع متعدية إذا وجد زوجان ( على الأقل ) مثل : ( أ ، ب ) ∈ ع ، ( ب ، جـ ) ∈ ع ولكن ( أ ، ب ) ∉ ع .

**علاقة التكافؤ :**

تسمى العلاقة ع المعرفة على المجموعة سـ علاقة تكافؤ على المجموعة سـ نفسها إذا كانت ع :

(أ) انعكاسية (ب) متناظرة (جـ) متعدية .

أي أنه إذا كان هناك إخلال بأحد الشروط الثلاثة التي تجعل العلاقة علاقة « تكافؤ » فلا داعي للبحث في انواع العلاقات الأخرى .

ومن أمثلة علاقات التكافؤ :

– علاقة « التساوي » على أي مجموعة من الأعداد .

– علاقة « التشابه » على مجموعة المثلثات .

– علاقة « التوازي » على مجموعة المستقيمات ( بفرض أن كل مستقيم يوازي نفسه ) .

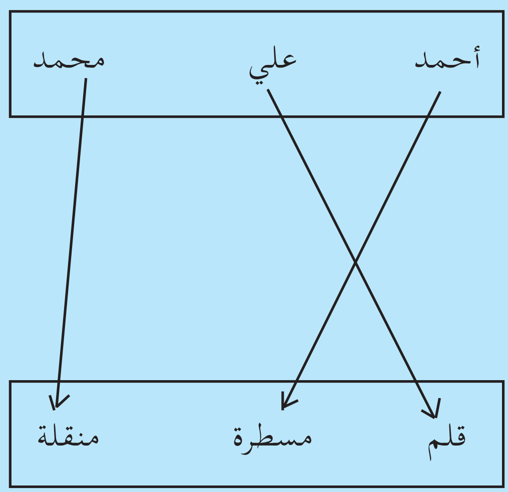
ومن أمثلة العلاقات التي ليست تكافؤ .

– علاقة « > » على مجموعة الأعداد الطبيعية لأنها ليست انعكاسية .

– علاقة « ≤ » على مجموعة الأعداد الطبيعية لأنها ليست متناظرة .

**التطبيق :**

التطبيق هو نوع خاص من العلاقات ، وله أهمية بالغة في الرياضيات ولقد اهتم به العلماء منذ زمن بعيد إذ يرى ( هاملي ) أن موضوع التطبيق يجب أن يكون النواة التي تتجمع حولها جميع الموضوعات الرياضية . وتعتبر العلاقة مدخلاً طبيعياً ومهماً لإدراك مفهوم التطبيق لأن العلاقة هي حالة عامة والتطبيق حالة خاصة منها ، ولهذا ينبغي أن يبدأ تعريف التطبيق بالتعرف على مواقف من علاقات مألوفة متنوعة فمثلاً العلاقة بين طلاب وادواتهم الهندسية .




ثم يعرف التطبيق س ⟵ ص بأنه العلاقة التي تربط كل عنصر في س بعنصر واحد فقط في ص، ويسمى س مجال التطبيق ويسمى ص مجاله المقابل .

أما قاعدة التطبيق هي العلاقة التي تربط كل عنصر في المجال بصورته من المجال المقابل وهناك تطبيقات نحصرها فقط على المجموعات العددية مثل :

ت : ط ⟵ ط حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية .

ت : ص ⟵ ص حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة ، فيتم تمثيلها بيانياً بنقاط ( منفصلة ) في المستوى على استقامة واحدة .

أما التطبيق ت : ح ⟵ ح حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية فيسمى تطبيق خطي وقاعدته هي ت( س ) = أ س + ب ، أ ، ب ∈ ح فيكون تمثيله بيانياً عبارة عن مجموعة النقاط ( المتصلة ) على خط مستقيم وقد تكون قطعة مستقيمة أو شعاع أو خط مستقيم .

## ١ : ١ كتابة المجموعة بالصفة المميزة

**عدد الحصص** : حصتان .

### الأهـــداف

– يكتب المجموعة بطريقة الصفة المميزة ( رمزياً ) .
– يربط كتابة المجموعة بالصفة المميزة لفظياً ورمزياً .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين كالتالي :

الحصة الأولى : كتابة المجموعة بالصفة المميزة .

الحصة الثانية : تمارين ومسائل .

وعند التنفيذ يراعي المدرس ما يلي :

– يذكِّر المدرس طلابه بكتابة المجموعة بطريقة السرد وطريقة ذكر الصفة المميزة « الأسلوب اللفظي » والذي سبق دراسته،وخلال المناقشة يركِّز على الآتي :

أ – الانتماء ورمزه ∋ .

ب – الحاصرتين { } والفاصلة بين كل عنصرين عند كتابة المجموعة بطريقة السرد .

جـ – وجود أكثر من إجابة عند كتابة المجموعة بالصفة المميزة لبعض المجموعات كما في المثال الذي في كتاب الطالب .

– يذكِّر المدرس طلابه بالمجموعة الجزئية والمجموعات العددية ( الفردية والزوجية ) .

– يناقش المدرس المثال الذي في كتاب الطالب لكتابة المجموعات سـ، صـ ، ع على السبورة ، ويطلب من طلابه أن يعطوا صفة مشتركة لعناصر كل مجموعة حتى يتوصل إلى كتابة المجموعات بالصفة المميزة .

– يربط الأسلوبين الرمزي واللفظي أولاً لفظياً ، ثم يكتبها بطريقة رمزية مع التركيز على اختيار الصفة المميزة التي تميز عناصر مجموعة عن غيرها بحيث يمكن باستخدام هذه الصفة أن نحدد بشكل قاطع ما إذا كان عنصر ما ينتمي إلى هذه المجموعة أم لا ، فإذا كانت صفة ما مميزة لعناصر مجموعة معينة فإن كل عنصر في المجموعة يجب أن يتمتع بهذه الصفة ، ويؤكد المدرس على أن الرمز ( : ) يقرأ « حيث » .

– يوضح للطلبة أنه أحياناً يمكن كتابة المجموعة بالطريقتين السرد والصفة المميزة مثل :

سـ = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، .... ، ١٦ }

سـ = { س : س عدد زوجي ، ٢ ◊ س ◊ ١٦ }،

وأحياناً لايمكن كتابة المجموعة إلا بطريقة واحدة مثل :

أ ) مجموعة الأعداد النسبية بين ٢ ، ٣ فهذه المجموعة لايمكن كتابتها إلا بالصفة المميزة ( رمزياً ) وتكتب كالتالي :

{ س : س ∋ ن ، ٢ < س < ٣ } حيث ن مجموعة الأعداد النسبية .

ب ) المجموعة صـ = { ١ ، باب ، قلم ، سمير } لايمكن كتابتها إلا بطريقة السرد حيث أنه لايوجد بين عناصر هذه المجموعة صفة مشتركة .

– يكلّف الطلبة بحل تمارين في الصف وواجب منزلي ( مثل رقم ٥ ، ٧ ) بعد نهاية الحصة الأولى .

– يناقش المدرس حلول الواجب المنزلي السابق مع معالجة الصعوبات التي تظهر من خلال حلول الطلبة، ثم يكلف الطلبة بحل بقية التمارين والمسائل بعضها كواجب صفي والآخر كواجب منزلي .

– يعطي في نهاية الحصة الثانية التمرين المحدد أدناه في التقويم .

### إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ٣ ] سـ = { اللمس، الطعم، السمع ، البصر، الشم }

صـ = { ٠ ، ٢ ، ٣ } .

[ ٤ ] ع = { ٥ ، ٧ ، أ ، ب } ولايمكن كتابتها بالصفة المميزه لعدم وجود صفة مشتركة بين عناصـرهـا .

[ ٦ ] بناءً على تعريف كل من التقاطع والاتحاد وحاصل

ضرب مجموعتين يمكن كتابة المجموعات س | ص،

س ← ص ، س × ص بالصفة المميزة .

[٧] أ ) ( × ) لأن ٣ ليس عدداً زوجياً .

ب )( ✓ )لأن عناصر المجموعة الأولى { ٣ ، –٥ }

أعداد صحيحة أصغر من ٥ .

جـ ) ( ✓ ) لأن مجموعة الأعداد الصحيحة الأصغر من ٥٥ مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة .

## التقـويم

يتم التقويم بنائياً من خلال المناقشة وحل التمارين في الفصل والواجب المنزلي كما يعطى هذا التمرين كخطوة تقويم .

س ) اكتب المجموعتين التاليتين بالصفة المميزة ( رمزياً )

س = { ٦ ، ٨ ، ١٠ } .

ص هي مجموعة حروف كلمة « علم » .

# ١ : ٢ مجموعة الفرق والمجموعة المتممة

**عدد الحصص :** ثلاث حصص .

## الأهـــداف

– يوجد الفرق بين مجموعتين ويمثله بأشكال فِـن .

– يوجد متممة مجموعة ، ويمثلها .

– يستنتج قانوني دي مورجان .

## المحتوى

– فرق المجموعتين س ، ص هو مجموعة عناصرها تنتمي إِلى المجموعة س ولاتنتمي إِلى المجموعة ص، ورمزه : س / ص .

أي أن : س / ص = { ا : ا ∈ س ، ا ∌ ص } .

– متممة المجموعة س ويرمز لها بالرمز سَ، هي :

سَ = ش / س .

أي أن : سَ = { ا : ا ∈ ش ، ا ∌ س } .

– لأي مجموعتين س، ص : ( س | ص )َ = سَ ← صَ،

( س ← ص )َ = سَ | صَ

## الوسائل

ورق مقوى – طباشير ملون .

## تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في ثلاث حصص كالتالي :

الحصة الأولى : مجموعة الفرق والمجموعة المتممة .

الحصة الثانية : قانونا دي مورجان .

الحصة الثالثة : تمارين ومسائل .

ويراعي عند التنفيذ ما يلي :

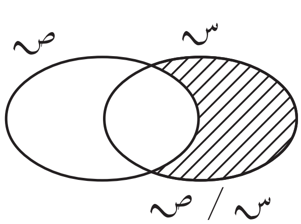
– يمهد للحصة الأولى بما استصعب على الطلبة من الواجب المنزلي السابق .

– يرسم المدرس أولاً شكل ( ١ – ١ ) كما في كتاب الطالب ومن خلاله يراجع مفهومي التقاطع والاتحاد لمجموعتين،ثم يظلل المنطقة كما في شكل( ١–٢ ) ويطلب من الطلبة الإجابة عن السؤال التالي : ماذا تمثل المنطقة المظللة في هذا الشكل ؟

وبالمناقشة يتوصل إلى تعريف الفرق بين المجموعتين س ، ص ، يتم الشيء نفسه بالنسبة للشكل ( ١ –٣ ).

– يناقش مثال ( ١ ) موضحاً ذلك بأشكال فِـن ومستخدماً الطباشير الملونة مع التركيز على العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الأولى ولاتنتمي إلى المجموعة الثانية .

– يستخدم أشكال فِـن بعمل لوحات كوسائل إيضاح تبين مفهوم س / ص ، كما يشجع الطلبة على عمل ذلك ، مثل :



– يوضح الفرق بين طرح الأعداد وفرق المجموعات كي لايخلطوا بينهما أثناء حل التمارين وخصوصاً في المجموعات التي عناصرها أعداد ، ففي عملية الطرح على مجموعة الأعداد نجد أن : ٥ – ٣ = ٢ ، ٣ – ٢ = ١ ولكن في عملية الفرق بين المجموعات تلاحظ أن : { ٥ ، ٣ } / { ٣ ، ٢ } = {٥} .

– يؤكد للطلاب أنه يمكن استخدام رمز الفرق بين المجموعتين سَ، صَ إما سَ/صَ أو سَ –صَ.

– يؤكد كذلك أن الفرق بين مجموعتين هو مجموعة، لذلك عند كتابة ناتج سَ / صَ عليه أن يذكرهم أن لاينسوا الحاصرتين { } بحيث تكتب داخلهما العناصر التي تنتمي إلى سَ ولاتنتمي إلى صَ .

– يؤكد للطلبة أن عملية الفرق على المجموعات ليست تبادلية بعد حل مثال ( ١ ) ويعزز ذلك بأمثلة من عنده مع تمثيلها بأشكال فْن .

– يستبعد الحالات التي تكون فيها سَ / صَ = Φ مثـــل : { ١ ، ٢ } / { ١ ، ٢ ، ٣} = Φ ، Φ / {١، ٢}= Φ ، Φ / Φ = Φ .

– يذّكر الطلبة بأن المجموعة الشاملة لعدة مجموعات معلومة ليست وحيده إذ أن كل مجموعة تكون هذه المجموعات جزئية منها تصلح ان تكون مجموعة شاملة .

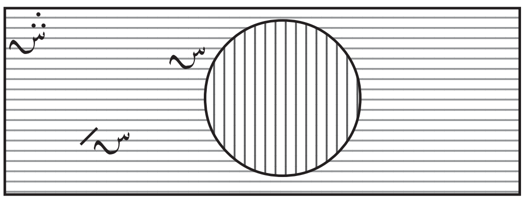
– يـؤكـد للطلبــة انه عنـد وضـع سؤال ، وعينـت به مجموعة شاملة لعدة مجموعات معلومة فإنها في هذه الحالة تكون وحيدة وعلى الطلبة الالتزام بها أثناء الحل .

– يؤكد ان المتممة ما هي إلا فرق بين المجموعتين مثل شَ ، سَ وبمناقشة المثال التمهيدي في الكتاب ليتوصل إلى تعريف المتممة .

– يؤكد للطلبة أثناء شرح المثال رقم ( ٢ ) أن سَ′ تقرأ « متممة سَ » .

– يوضح أن المتممة مرتبطة بالمجموعة الشاملة دائماً وبالتالي نجد سَ □ شَ ولكن عند إيجاد سَ / صَ لايشترط أن تكون صَ □ سَ كما يؤكد أن سَ′ مجموعة وليست مجرد عناصر لذلك لابد من كتابة الحاصرتين { } عند كتابة سَ′ بطريقة السرد .

– يمكن للمدرس أن يعد لوحات لأشكال فـن ملونة لتوضح مفهوم المتممة ، مثل :



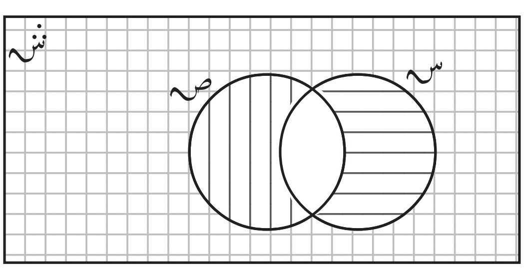

ثم يؤكد المدرس للطلبة من خلال هذا الشكل أنه مهما كانـت سَ فإن : سَ′ ← سَ = شَ ، سَ | سَ′= Φ ، سَ′ = شَ / سَ .

– يكلف الطلبة بحل تمارين في الفصل وواجب منزلي ( مثل رقم ٣ ، ٤ ) .

– يمهد للحصة الثانية بمناقشة الصعوبات التي واجهت الطلبة في الواجب المنزلي السابق .

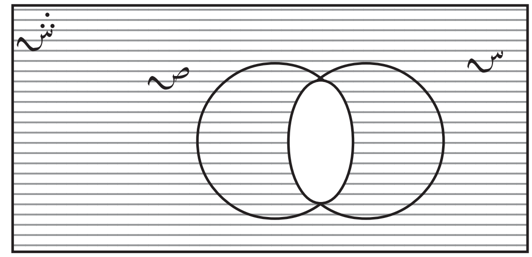
– يستنتج المدرس قانوني دي مورجان من خلال مثال( ٣ ) مستخدماً أشكال فْـن لتوضيح ذلك،كما يلي :

أولاً :يرسم سَ،صَ، شَ( انظر الشكل المرسوم ادناه )




ثم يظلل المنطقة التي تمثل سَ′ ، بخطوط رأسيه ( أو بلون معين ) ، ثـم يـظـلـل المنطـقـة التي تمـثـل صَ′ بخطوط أفقية وبلون آخر .

يلاحظ أن : سَ′← صَ′كل المنطقة المظللة وهي المنـطـقـة المظللـة فـي الشـــكل التـالـي الـذي يمثـل ( سَ | صَ )′ .




أذن ( س | ص )َ = سَ ← صَ ، وبالمثل يوضح ( س ← ص )َ = ( سَ | صَ ) .

- يكلف الطلبة بحل تمارين في الفصل وواجب منزلي ( مثل رقم « ٦ » ) .
- يمهد للحصة الثالثة بمراجعة تعاريف الفرق بين مجموعتين والمجموعة المتممة وذلك من خلال مناقشة الصعوبات في الواجب المنزلي السابق .
- يناقش المدرس ما تبقى من التمارين في الحصة الثالثة مع المرور عليهم أثناء الحل لتذليل كل الصعوبات لديهم .
- يعطى في نهاية الحصة الثالثة التمرين المحدد أدناه في التقويم أو ما يشابه ذلك .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[٣] مجموعة الأرقام في النظام العشري = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩} .

[٥] ش = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٨} ، س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٦} يمكن إيجاد ( س | ص )َ باعتبارها تساوي سَ ← صَ.

[٧] أ ) س | ص     ب ) ص / س .

جـ ) سَ.

ء ) ( ل ← م )َ     هـ ) ( س | ص )َ

و ) ( س / ص ) ← ( ص / س ) .

## التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال المناقشة وأداء الطلبة لحل التدريبات في الصف والواجب المنزلي ، ويمكن إعطاء السؤال التالي أو سؤال شبيه نهاية الحصة الثالثة كخطوة تقويم :

إذا كانت ش = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } ، س = {٢ ، ٤ } ، ص = { ٤ ، ٥ ، ٦ } فأوجد

أ ) س / ص ، ب ) ( س ← ص )َ.

## ١ : ٣ العلاقة المتعدية

**عدد الحصص :** ثلاث حصص .

### الأهداف

- يعرف العلاقة المتعدية ويميزها .
- يرسم المخطط السهمي والبياني للعلاقة المتعدية .

### المحتوى

- تكون العلاقة ع متعدية على المجموعة س : إذا كان لكل (أ ، ب) ، (ب ، جـ) ∈ ع فإن ( أ ، جـ) ∈ ع.
- تكون العلاقة ع غير متعدية على المجموعة س: إذا وجد زوجان مرتبان (أ ، ب) ، (ب ، جـ) ∈ ع ولكن (أ ، جـ) ∉ ع .

### الوسائل

ورق مقوى ، أقلام سحرية ، ورق رسم بياني .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : العلاقة الانعكاسية والعلاقة المتناظرة ( مراجعة ) .

الحصة الثانية : العلاقة المتعدية .

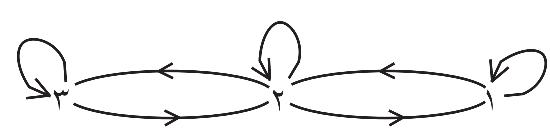
الحصة الثالثة : تدريبات وتمارين .

وعند تنفيذ الدرس على المدرس مراعاة التالي :

- يتم مراجعة العلاقة الانعكاسية والعلاقة المتناظرة من

خلال تمارين لعلاقات على مجموعة عددية معطاة، ويطلب من الطلبة إعطاء أمثلة لعلاقات أخرى على هذه المجموعة ، ثم يطلب منهم تصنيف هذه العلاقات إلى علاقات انعكاسية وعلاقات متناظرة، ويطلب منهم رسم هذه العلاقات بواسطة المخططات السهمية والبيانية ويحاول أن يطرح المعلم بعض الأسئلة على الطلاب مثل : متى تكون العلاقة انعكاسية ؟ متناظرة؟ ويتم ذلك على الحالات المختلفة سواء كانت العلاقات من الأزواج المرتبة أو ممثلة بمخططات سهمية وبيانية ويتوصل مع الطلبة إلى القاعدة الخاصة لتمييز كل نوع: « تكون العلاقة ع انعكاسية على المجموعة س ، إذا كان لكل ٲ ∈ س فإن (ٲ ، ٲ) ∈ ع ، أو إذا وُجد عند كل عنصر في المخطط السهمي عروة» ، وتكون العلاقة ع ليست انعكاسية إذا وجد عنصر واحد على الأقل من س لايرتبط بنفسه أو إذا وجد عنصر واحد على الأقل (في المنطلق) في مخططها السهمي لاتوجد عنده عروة .

وبالمثل بالنسبة للعلاقة المتناظرة « تكون العلاقة ع متناظرة على المجموعة س: إذا كان (ٲ ، ب) ∈ ع فإن (ب ، ٲ) ∈ ع ، حيث ٲ ، ب ∈ س ، أو إذا وجد في المخطط السهمي للعلاقة سهم خارج وسهم داخل عند كل نقطة من النقاط التي تمثل عناصر المجموعة المعرفة عليها العلاقة . كما هو موضح في المخطط السهمي التالي : فهذا المخطط يمثل علاقة انعكاسية وعلاقة متناظرة .




– يكلف الطلبة بحل تدريبات صفية وتمارين ومسائل كواجب منزلي على العلاقتين الانعكاسية والمتناظرة.

– عند تقديم مفهوم العلاقة المتعدية ابدأ ببعض العلاقات المألوفة لدى الطلبة مثل : « أطول من » ، « أخو » ، « التساوي » على مجموعة أعداد مثل { ٲ ، ب ، جـ }، فإنه إذا كان ٲ = ب وَ ب = جـ فإن ٲ = جـ ، وعلاقة « التوازي » على مجموعة مستقيمات مثل : { ل↔ ، م↔ ، ن↔ } ، فإذا كان ل↔ // م↔ ، م↔ // ن↔ فإن ل↔ // ن↔ ، وكذا علاقة « أصغر من »، « أكبر من » . . .الخ إلى أن يتوصل مع الطلبة إلى تعريف العلاقة المتعدية ويوضح المدرس إنه أحياناً يُطلق عليها العلاقة الانتقالية ، ويؤكد على المحتوى الوارد في محتوى الدرس .

– لكي نقرر ما إذا كانت ع علاقة متعدية على المجموعة س أم لا ، فإنه يجب فحص كل الحالات التي يكون فيها (ٲ ، ب) ∈ ع ، (ب ، جـ) ∈ ع .

فمثلاً لتكن س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ولتكن ع = { (١ ، ١)، (١ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٣) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) } فهل ع علاقة متعدية .

إذا بدأنا بالعلاقة (١ ، ٣) فإننا نختار جميع الأزواج المرتبة الأخرى (٣ ، ٲ) حيث ٲ ∈ س ، ٲ © ٣ ، وهذه الازواج هي (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) أي أن: (١ ، ٣) ، (٣ ، ١) ∈ ع ⟵ (١ ، ١) ∈ ع تحقق شرط التعدي .

(١ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ∈ ع ⟵ (١ ، ٢) ∈ ع تحقق شرط التعدي .

هل معنى ذلك أن ع علاقة متعدية ، بالتأكيد لانستطيع أن نحكم عليها إنها متعدية . لماذا؟

إذ يجب فحص جميع الحالات الأخرى (٣ ، ١)، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٢ ، ١) وإذا وجدنا أن شروط العلاقة المتعدية قد تحققت في كل حالة فإن العلاقة تكون علاقة متعدية .

– يفضل أن يصاحب الرسم الشرح حيث يقوم المدرس برسم المخطط السهمي والبياني للعلاقة المتعدية .

– يكلف الطلبة بحل تدريبات في الصف وأخرى في المنزل .

### إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[١] ع١ متعدية ، ع٢ ليست متعدية لأن (٢ ، ١) ، (٣ ، ١) ∈ ع٢ ⟵ (٣ ، ٢) ∉ ع .

ع٣ ليست متعدية لأن (١ ، ٢) ، (١ ، ٢) ∈ ع٣ ⟵ (١ ، ١) ∉ ع٣ .

ع٤ متعدية ، لأنه لايوجد ما ينفي شرط التعدي .

ع٥ متعدية لماذا ؟ ع٦ متعدية . لماذا ؟

[٣] نكتب العلاقة من خلال البحث عن أي عددين ∈ ل مجموعهما عدد فردي ، ثم نفحص كل الأزواج المختلفة المساقط .

[٤] أ ) انعكاسية ، ليست متناظرة ، متعدية .

ب ) انعكاسية ، ليست متناظرة ، متعدية .

[٥] ع = {(−٢ ، ٢) ، (−١ ، ١) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (−٢ ، −٢) ، (−١ ، −١) ، (٢ ، −٢) ، (١ ، −١)} ، ثم افحصها .

[٧] ع = {(−١ ، ١) ، (١ ، −١) ، (٠ ، ٠) ، (−٢ ، ٢) ، (٢ ، −٢)} ، ثم نفحص العلاقة ع .

### التقويم

من خلال المناقشة والمتابعة لحلول الطلاب يهتم المعلم بالتقويم البنائي فيطرح أسئلة من حين لآخر ، وكذلك يعطي الواجبات الصفية والمنزلية .

وفي نهاية الحصة الثالثة يمكن أن يعطي المعلم التمرين مثل التالي كخطوة تقويم للدرس :

إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ع علاقة على س حيث ع = {(١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (١ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢)} .

فهل ع علاقة متعدية ؟ ولماذا ؟

## ١ : ٤ علاقة التكافؤ

**عدد الحصص** : حصتان .

### الأهداف

– يعرف علاقة التكافؤ ويميزها .

– يرسم المخطط السهمي والبياني لعلاقة التكافؤ .

### المحتوى

– تكون العلاقة ع علاقة تكافؤ على المجموعة س : إذا كانت ع علاقة انعكاسية ومتناظرة ومتعدية على المجموعة س .

– تكون العلاقة ع ليست علاقة تكافؤ إذا لم تكن ع انعكاسية أو متناظرة أو متعدية .

### الوسائل

ورق مقوى ، أقلام سحرية ، ورق رسم بياني .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : علاقة التكافؤ

الحصة الثانية : تدريبات وتمارين .

وعند تنفيذ الدرس على المدرس مراعاة الآتي :

– لاتعتبر علاقة التكافؤ علاقة جديدة على الطلاب ، بل هي بمثابة تطبيق لكل العلاقات السابقة : الانعكاسية ، المتناظرة ، المتعدية ، ولهذا يجب أن يدرك الطلبة بشكل جيد ما المقصود من العلاقات الثلاث إدراكاً سليماً حتى يستطيعوا أن يحكموا إذا كانت أي علاقة معطاه علاقة تكافؤ أم لا .

ولهذا يجب أن يوجه المدرس بعض الأسئلة عند دراسة علاقة التكافؤ :

مثلاً : هل العلاقة المعطاة والمعرفة على المجموعة س ينطبق عليها شرط العلاقة الانعكاسية؟

هل العلاقة المعطاة والمعرفة على المجموعة سـ تنطبق عليها شرط العلاقة المتناظرة ؟

هل العلاقة المعطاة والمعرفة على المجموعة سـ تنطبق عليها شروط العلاقة المتعدية ؟

– وإذا لم تكن إحدى العلاقات الثلاث متوفرة فإن العلاقة ليست علاقة تكافؤ ، أي إذا كان هناك إخلال بأحد الشروط الثلاثة التي تجعل العلاقة ( تكافؤ ) فلاداعي للبحث في العلاقات الأخرى .

– يكلف الطلبة بحل تدريبات في الصف في نهاية الحصة الأولى وتمارين ومسائل كواجب منزلي .

– تخصص الحصة الثانية لمراجعة الواجب المنزلي وكما يكلف الطلبة بالمزيد من الواجبات الصفية وحل التمرين الخاص بالتقويم في نهاية الحصة .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[٤] ع = {(–٢ ، –٢) ، (–٢ ، –١) ، (–٢ ، ٠) ، (–٢ ، ١) ، (–٢ ، ٢) ، (–١ ، –١) ، (–١ ، ٠) ، (–١ ، ١) ، (–١ ، ٢) ، (٠ ، ٠) ، (٠ ، ١) ، (٠ ، ٢) ، (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٢) } ، ثم اختبرها إنها ليست علاقة تكافؤ ، لأنها غير متناظرة .

[٥] أ ) علاقة تكافؤ .

ب ) ليست متناظرة وبالتالي فهي ليست علاقة تكافؤ .

جـ) ليست انعكاسية وبالتالي فهي ليست علاقة تكافؤ .

[٨] ع = {(١ ، ٥) ، (٥ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٦ ، ٠) ، (٠ ، ٦)} ، ثم نفحص هذه العلاقة فيما إذا كانت علاقة تكافؤ أم لا .

[٩] أ ) سـ = {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} .

ب ) ع = {(٥ ، ٣) ، (٧ ، ٥) ، (٩ ، ٧)} .
= {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ سـ ، أ > ب } .

جـ) ليست علاقة تكافؤ . لماذا ؟

## التقــويم

من خلال المناقشة يهتم المدرس بالتقويم البنائي فيطرح أسئلة من حين لآخر ، كما يتم من خلال متابعة حلول الطلبة للواجبات الصفية والمنزلية .

وفي هذا الدرس يمكن أن يعطى المدرس تمرينا مثل التالي في نهاية الحصة الثانية .

إذا كانت سـ = {٢ ، ٣ ، ٥} ، ع علاقة على المجموعة سـ ، حيث ع = {(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) } فهل ع علاقة تكافؤ ؟ اذكر السبب .

# ١ : ٥ التطبيـــق

**عدد الحصص :** ٤ حصص .

## الأهـــداف

– يعرف التطبيق من سـ إلى صـ ومكوناته ( المجال والمجال المقابل والقاعدة ) .

– يرسم المخطط السهمي والبياني لتطبيق معطى .

– يوجد صور عناصر المجال وفقاً للتطبيق .

– يوجد قاعدة التطبيق .

## المحتوى

– التطبيق هو علاقة من سـ إلى صـ تربط كل عنصر من سـ بعنصر واحد فقط من صـ . تسمى سـ مجال التطبيق ، وتسمى صـ المجال المقابل للتطبيق، وتسمى مجموعة صور المجال مدى التطبيق .

– قاعدة التطبيق هي العلاقة التي تربط كل عنصر من المجال بصورته من المجال المقابل .

– يعين مدى التطبيق وفقاً لقاعدة التطبيق .

## الوسائل

ورق مقوى ، أقلام سحرية ، ورق رسم بياني .

## تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في أربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : التطبيق .

الحصة الثانية : تدريبات وتمارين .

الحصة الثالثة : مدى التطبيق وقاعدة التطبيق .

الحصة الرابعة : تدريبات وتمارين .

وعند تنفيذ الدرس على المدرس مراعاة الآتي :

– تتم مراجعة مفهوم العلاقة من مجموعة إلى أخرى ، ومن ثم توظيف العلاقات في عرض مفهوم التطبيق.

– يبدأ المدرس بالتمهيد الذي في كتاب الطالب ويطلب من الطلبة اكتشاف أوجه الاختلاف بين هذه العلاقات : ففي العلاقة ع$_1$ يخرج من أحد عناصر س وهو ( ب ) سهمان ، وفي العلاقة ع$_2$ لا يخرج من أحد عناصر س وهو ( جـ ) أي سهم . بينما تتميز العلاقة ع$_3$ بأن كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط إلى عنصر من عناصر ص . ومن هذه الملاحظة الموجهة يتوصل الطلبة مع المدرس إلى أن العلاقة ع$_3$ تختلف عن العلاقتين الأخريين، إذ أن كل عنصر من عناصر س يرتبط فقط بعنصر واحد من عناصر ص .

ولهذا نعرّف هذه العلاقة بأنها تطبيق بينما لانعتبر العلاقتين الأخريين بأنهما تطبيقان .

– يؤكد للطلاب أن كل علاقة ليست تطبيقا بينما كل تطبيق علاقة .

– كما يتعرف الطلبة مفهوم التطبيق باستخدام الأزواج المرتبة حيث إن كل عنصر من عناصر المجال يظهر كمسقط أول في زوج واحد فقط من الأزواج المرتبة المحددة للعلاقة .

– ينبغي الاهتمام بالمصطلحات المستخدمة في هذا الدرس وهي المجال والمجال المقابل ومدى التطبيق وقاعدة التطبيق ، ثم يوضح لهم طريقة التعبير عن التطبيق رمزياً :

ت : س ⟵ ص ، ويقرأ التطبيق ت من س إلى ص.

– يحاول المدرس أن يدرب طلابه على رسم المخططات السهمية والبيانية للتطبيق وكذلك تدريبهم على التعرف على المجال والمجال المقابل وقاعدة ومدى التطبيق بمعلومية المخطط السهمي فقط .

– يكلف الطلبة بحل تدريبات صفية وتمارين ومسائل كواجب منزلي على التطبيق ومجاله ومجاله المقابل في نهاية كل حصة .

– وبالنسبة لقاعدة التطبيق يمكن أن يبدأ المدرس بالتمهيد التالي أو الحوار التالي بينه وبين طلابه :
يطلب من أحد الطلاب أن يذكر له أي عدد

فإذا قال ٥ قال المدرس ٧ .

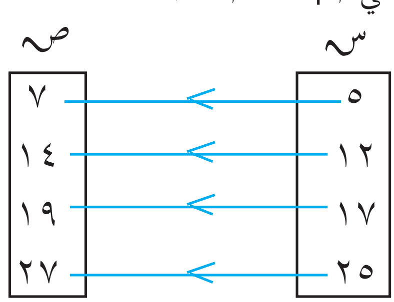
فإذا قال آخر ١٢ قال المدرس ١٤ .

وإذا قال ثالث ١٧ قال المدرس ١٩ .

وإذا قال رابع ٢٥ قال المدرس .... ؟

يسأل المدرس طلابه عن العدد الذي يجب أن يقوله ، حتى يساعدهم على اكتشاف القاعدة التي تربط بين أعدادهم وأعداده .

إن القاعدة التي تربط بين عناصر س وعناصر ص هي ا ⟵| ا + ٢ .



ويؤكد المدرس على أن كل عدد ذكره الطلاب قد حدد له عدد مناظر واحد فقط ويسمى صورة العدد الأول طبقاً لقاعدة الربط بين العددين ويعبر عن ذلك بالشكل التالي :

ت(٥)=٧ ، ت(١٢)=١٤، ت(١٧)=١٩،

ت(٢٥) = ... وتسمى مجموعة الصور بالمدى .

ويمكن ان يكتب التطبيق باستخدام عناصر الأزواج المرتبة :

التطبيق ت = {(٥ ، ٧)، (١٢ ، ١٤)، (١٧ ، ١٩)، (٢٥ ، ٢٧)} .

– يمكن أن يوجه المدرس مثل الأسئلة التالية للطلبة حتى يتم إثراء معلوماتهم وتعميق فهمهم :

هل يمكن اعتبار العلاقة السابقة تطبيق ؟

هل كل علاقة تعتبر تطبيقاً ولماذا ؟

– يكلف الطلبة بحل تدريبات صفية وتمارين ومسائل كواجب منزلي على المدى وقاعدة التطبيق .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[٥] ع = {(١ ، ١٥)، (٢ ، ٩٢)، (٣ ، ٤٣)، (٣ ، ٣٤)، (٤ ، ٤٣)، (٤ ، ٣٤)} ثم يكمل الحل .

[٦] ب) قاعدة التطبيق أ هي أ ⟼ ٢أ + ٣

قاعدة التطبيق ب هي أ ⟼ أ$^{٢}$ .

قاعدة التطبيق جـ هي أ ⟼ $\frac{١}{٢}$ أ .

[٧] أ) ت(١) = ٣ ، ت(٢) = ٦ ، ت(٣) = ١١ ، ت(٤) = ١٨ .

∴ مدى التطبيق {٣ ، ٦ ، ١١ ، ١٨} .

[٨] أ) ت(٠) = ٠ + ١٠ = ١٠ ، ت(٥) = ٥ + ١٠ = ١٥، ت(١٠) = ٢٠، ت(١٥) = ٢٥ .

∴ المدى = {١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥}.

ب) ت = {(٠ ، ١٠) ، (٥ ، ١٥) ، (١٠ ، ٢٠)، (١٥ ، ٢٥)} .

[٩] أ) ت(٠) = ٠ – ٣ = –٣ ، ت(١) = ١ – ٣ = –٢، ت(٢) = ٤ – ٣ = ١، ت(–١) = ١ – ٣ = –٢ ، ت(–٢) = ٤ – ٣ = ١ .

ت = {(٠ ، –٣)، (١ ، –٢)، (٢ ، ١)، (–١ ، –٢)، (–٢ ، ١)}

مدى التطبيق = {–٣ ، –٢ ، ١} .

[١٠] أ) ع$_{١}$ تطبيق

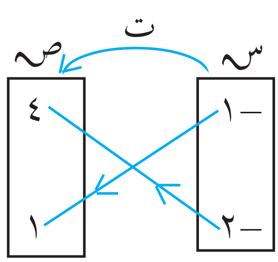
ع$_{٢}$ ليس تطبيق

ع$_{٣}$ تطبيق

## التقويم

من خلال حل التدريبات الصفية والمنزلية ومتابعة المناقشات الصفية يكون المدرس تقويماً بنائياً حول مستوى تحقق الأهداف .

ويمكن أن يعطي المعلم التمرينين التاليين أو مثلهما في نهاية الحصة الرابعة :




أ) ت : س ⟵ ص .

– اكتب المجال والمجال المقابل للتطبيق .

– أوجد قاعدة التطبيق .

ب) لتكن س = {٢ ، ٣ ، ٥} ، ص = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} وكانت ت : س ⟵ ص معرفاً بالقاعدة.

أ ⟼ أ + ٢ .

– أوجد مدى التطبيق .

– ارسم المخطط السهمي لهذا التطبيق .

## ١ : ٦ مجموعة الأعداد الحقيقية

**عدد الحصص :** حصتان .

### الهـــدف

– يتعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ، ويمثلها على خط الأعداد .

### المحتوى

– مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة ناتجة من اتحاد مجموعة الأعداد النسبية ( ن ) ومجموعة الأعداد غير النسبية ( ن′ ) ويرمز لها بالرمز ح .

أي أن : ح = ن ∪ ن′ .

### الوسائل

فرجار – مسطرة – طباشير ملون .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين كالتالي :

الحصة الأولى : مجموعة الأعداد الحقيقية .

الحصة الثانية : تمارين ومسائل .

وعند تنفيذ الدرس يقوم المدرس بمراعاة ما يلي :

– يذّكّر طلابه بمجموعات الأعداد ط ، ص ، ن والعلاقة بينها .

– يكتب المدرس على السبورة أعداد مربعات كاملة ويطلب إيجاد الجذر التربيعي لكل منها ، ثم يكتب أعداد مثل ٢ ، ٣ ، ٥ ويلاحظ عدم قدرة الطلبة على إيجاد جذورها التربيعية .

– يقسم الطلبة إلى مجموعتين ويطلب منهم حل التدريب الذي في كتاب الطالب حسب تقسيماته ، ثم يتم مقارنة النتائج بعد تسجيلها على السبورة ومنها يستخلص أن العدد $\sqrt{٢}$ لايمكن كتابته على صورة $\frac{أ}{ب}$ ويمكن كتابته على صورة كسر عشري غير منته وغير دوري .

– يعطي أمثلة تعزز مفهوم العدد غير النسبي .

– يوضح للطلبة كيفية تمثيل العدد $\sqrt{٢}$ كما هو في كتاب الطالب .

– يوضح المدرس للطلبة أن ح = ن ∪ ن′ مستخدماً الطباشير الملون وبرسم أشكال ڤن كما يوضح ط ⊂ ص ⊂ ن ⊂ ح .

– يرسم خط الأعداد موضحاً بعض النقاط لأعداد حقيقية مثل : ٣ ، $-\frac{١}{٢}$ ، $\sqrt{٢}$ ، $١\frac{١}{٤}$ ، $-٢\frac{٣}{٥}$ .

– يناقش مثال ( ١ ) مركزاً على الفرق بين الأعداد النسبية وغير النسبية .

– يذكر الطلبة بكتابة المجموعة بالصفة المميزة .

– يوضح للطلبة الفترات بالرسم على خط الأعداد ومستخدماً الطباشير الملون .

– يناقش مثال ( ٢ ) مؤكداً على الفترات المحددة وغير المحددة .

– يكلّف الطلبة بتمارين في الصف وواجب منزلي مثل رقم ( ٢ ) .

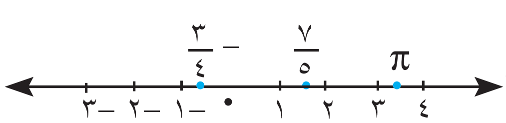
– يمهّد للحصة الثانية بمناقشة الصعوبات التي واجهت الطلبة في الواجب السابق .

– يكلّف الطلبة بحل بقية التمارين مع التوجيه وتذليل الصعوبات للطلبة أثناء الحل .

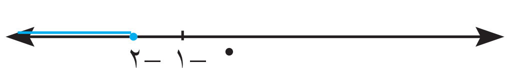
### إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ١ ] أ ) غير نسبي ب ) نسبي .

[ ٢ ] جـ )




[ ٤ ] هـ ) ]– ∞ ، –٢ ] تمثل كالتالي :



## التقـويم

من خلال التدريبات الصفية وحل التمارين والمناقشة يكوّن المدرس تقويماً بنائياً ويعطي سؤالاً كالتالي في نهاية الحصة الثانية كخطوة تقويم :

مثّل الفترة ] −٣ ، ٣ [ على خط الأعداد واكتبها بالصفة المميزة .

# ١ : ٧ التطبيـق الخطـي

**عدد الحصص** : حصتان .

## الهـــدف

– يعرف التطبيق الخطي ، ويمثله بيانياً .

## المحتوى

– التطبيق الخطي هو تطبيق من ح ⟵ ح ، وقاعدته هي ت ( س ) = أ س + ب ؛ أ ، ب ∋ ح .

## الوسائل

أوراق رسم بياني .

## تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : التطبيق الخطي وتمثيله البياني .

الحصة الثانية : تدريبات وتمارين .

وعند تنفيذ الدرس تتم مراعاة ما يلي :

– تعلم أن المستقيم يتحدد بمعرفة نقطتين منه ، وبما أن التمثيل البياني للتطبيق الخطي هو خط مستقيم، لذا نكتفي عند رسم التطبيق الخطي أن نمثل نقطتين في مستوى الإحداثيات ، ثم نرسم المستقيم المار بهما فيكون هو التمثيل البياني للتطبيق الخطي .

– يلاحظ المدرس أنا تدرجنا حول تمثيل التطبيق الخطي بيانياً وذلك من خلال توسعة المجال على النحو التالي : من ط ⟵ ط والتمثيل البياني هنا مجموعة من النقاط ( المنفصلة ) تقع على استقامة واحدة ( مجموعة من النقاط تقع على شعاع ) .

ثم من صـ ⟵ صـ ، والتمثيل البياني في هذه الحالة مجموعة من النقاط ( المنفصلة ) تقع على خط مستقيم .

وأخيراً من ح ⟵ ح ، والتمثيل البياني هنا عبارة عن مجموعة من النقاط ( المتصلة ) على خط مستقيم ، وقد تكون قطعة مستقيمة أو شعاع أو خط مستقيم ، ويجب على المدرس أن يوضح ذلك للطلبة .

– كما ينبغي أن يوضح المدرس للطلبة أننا لم نأخذ التمثيل البياني للتطبيق على مجموعة الأعداد النسبية وذلك لوجود نقط بين الأعداد النسبية هي غير نسبية مثل $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ ، ... الخ حيث يجب تحديدها لأنها غير داخله في التطبيق وهو أمر صعب ، ولهذا تجنبنا عدم الخوض في الأعداد النسبية .

– يكلِّف الطلبة بحل تدريبات صفية وتمارين ومسائل كواجب منزلي .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[٧] النقاط التي تنتمي إلى التطبيق هي ( −٢ ، ٢ ) ، ( ٠ ، ٢ ) ، ( −١ ، ٢ ) .

[٨] أ ) ( ٠ ، ١ ) ، ( −١ ، ٠ ) .

ب ) تختار أي ثلاث نقاط من ح ونعوض في القاعدتين والقاعدة التي تنتمي نقاطها إلى المستقيم تكون هي قاعدة التطبيق المرسوم .

## التقــويم

يتم تقويم بنائي من خلال التدريبات والمناقشات داخل الصف وحل الواجب المنزلي ويتعرف المدرس من خلاله مستوى تحقيق أهداف الدرس ، وفي نهاية الحصة الثانية يمكن أن يعطي تمريناً كالتالي :

مثّل التطبيق ت (ا) = ا – ٤ بيانياً ، هل النقطة ( $\frac{١}{٢}$ ، – $\frac{١}{٢}$ ٣ ) تنتمي إلى هذا التطبيق .

## ١ : ٨ تمارين ومسائل عامــة

**عدد الحصص** : حصتان .

### الهـــدف

يهدف هذا الدرس إلى تثبيت وتعميق المفاهيم وتطوير المهارات المتعلقة بهذه الوحدة .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين وعلى المدرس مراعاة ما يلي :

– إن تمارين ومسائل هذا الدرس تغطي كل أهداف الوحدة وذلك من أجل تثبيت وتعميق المفاهيم وتطوير المهارات التي احتوت عليها الوحدة .
– ترصد الأهداف التي لم تتحقق ويسعى المدرس إلى معالجتها .
– تتم معالجة الاخطاء والصعوبات التي واجهت الطلبة وذلك من خلال حل التمارين والمسائل .
– بالإضافة إلى هذه التمارين والمسائل يعطى الاختبار الذي في كتاب الطالب كواجب منزلي من اجل تهيئة الطلبة للاختبار الذي في الدليل .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[٣] ع = {( ا ، ب ) : ا نصف ب ، ا ∈ س ، ب ∈ ص } .

[٤] ب ) لايمكن كتابة المجموعة ص بالصفة المميزة لعدم وجود صفة مشتركة بين العناصر .

[٨] جـ) أوجد أولاً س/ ، ص/، ثم أوجد الفرق بينهما .

[١٣] ع متعـديـة لأن ( ا ، ب ) ، ( ب ، جـ ) ∈ ع ⟵ ( ا ، جـ ) ∈ ع .

ع ليست علاقة تكافؤ لأنها ليست متناظرة .

[١٥] المدى = { –٥ ، –٤ ، –٣ ، –٢ } .

[١٦] المدى = {١٧ ، ١٤ ، ١١ } ، القاعدة : ت(ا) = ٣ا + ٢ .

## التقــويم

هذا الدرس يعتبر مع الاختبار تقويماً ختامياً .

## ١ : ٩ اختبـــار الوحـدة

**عدد الحصص** : حصتان .

### الهـــدف

يهدف إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : يعطـي الاختبـار الذي فـي الدليـل أو اختباراً مشابهاً وبحيث يغطي أهداف الوحدة. الاختبار الذي في الدليل يغطي هذه الأهداف حسب الجدول التالي :

| رقـم السـؤال | رقـم الهـدف |
|---|---|
| ١ | ١ ، ٢ |
| ٢ | ٣ ، ٤ |
| ٣ | ٥ |
| ٤ | ٦ ، ٧ ، ٨ |
| ٥ | ٩ ، ١٠ |

الحصة الثانية : يعطـي معالجـة للصعـوبات والأخطاء التي برزت من خلال تصحيح أوراق الإجابة والتركيز على الأهداف التي لم تتحقق .

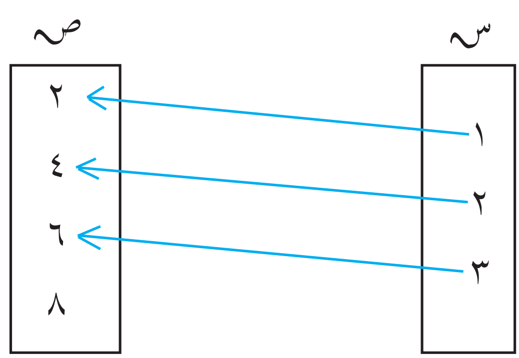
**الاختبـــار :**

[ ١ ] إذا كانت س = { ا : ا ∈ ط ، ا < ٧ } .
ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ،
أوجد س / ص ومثلة بأشكال ڤن

[ ٢ ] إذا كانت ش = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } ،
س = { ٣ ، ٥ ، ٧ } ، ص = { ٤ ، ٥ ، ٦ } ،
ا) أوجد س̸ ،
ب) تحقق من صحة أن : ( س ∪ ص )̸ = س̸ ∩ ص̸

[ ٣ ] إذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٣ } بين أن العلاقة ع = { ( ٠ ، ٠ ) ، ( ١ ، ١ ) ، ( ٣ ، ٣ ) } على س تمثل علاقة تكافؤ ، ثم ارسم مخططها السهمي .

[ ٤ ] ا) المخطط السهمي المرسوم أدناه يمثل تطبيقاً من س إلى ص . لماذا ؟




ب ) اكتب المجال والمجال المقابل والمدى للتطبيق .
جـ) عين قاعدة التطبيق .

[ ٥ ] ارسم التطبيق الخطي : ت( س ) = س + ٣ .

# الوحدة الثانية

# تحليل المقادير الجبرية

## جدول توزيع الحصص

| البند | الموضوع | عدد الحصص |
|---|---|---|
| ٢ – ١ | مراجعة | ٢ |
| ٢ – ٢ | المقدار الثلاثي | ٦ |
| ٢ – ٣ | التحليل بإكمال المربع | ٣ |
| ٢ – ٤ | مجموع مكعبين والفرق بينهما | ٣ |
| ٢ – ٥ | التحليل بالتجميع | ٣ |
| ٢ – ٦ | ضرب وقسمة الكسور الجبرية | ٥ |
| ٢ – ٧ | المضاعف المشترك الأصغر | ٢ |
| ٢ – ٨ | جمع وطرح الكسور الجبرية | ٤ |
| ٢ – ٩ | تمارين ومسائل عامة | ٢ |
| ٢ – ١٠ | اختبار الوحدة | ٢ |
| | المجموع | ٣٢ |

## أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يحلّل المقدار الثلاثي .

٢ – يتعرف على المقدار الثلاثي بصورة مربع كامل ، ويحلّله .

٣ – يكمل أي مقدار معطى إلى مربع كامل .

٤ – يحلل مقدار ثلاثي بإكمال المربع .

٥ – يحلل مجموع مكعبين ، والفرق بينهما .

٦ – يحلل مقادير جبرية بالتجميع .

٧ – يكتب الكسور الجبرية في أبسط صورة .

٨ – يضرب ويقسم كسور جبرية .

٩ – يجمع ويطرح كسور جبرية .

## المقدمـــة

قام علماء العرب والمسلمين بمجهودات جبارة إذ أضافو إضافات جوهرية في الرياضيات ، ولقد ظهر في عصر الدولة العباسية جمهرة من العلماء البارزين في العلوم الرياضية استطاعوا أن يقدموا خدمات للعلوم عامة ، اشتغل فريق منهم بعلم الجبر وأتوا فيه بأعمال تجعل حتى الدارس الغربي يعترف لهم بالسبق ، لما قدموه للبشرية في هذا الحقل الحيوي ، وقد قال كاجورى في كتابه « تاريخ الرياضيات » « إنّ العقل ليندهش عندما يرى ما عمله العرب والمسلمون في الجبر » .

ومن هؤلاء الذين لهم دور في هذا الحقل :

- محمد بن موسى الخوارزمي ( ٧٨٠ – ٨٥٠م ) .
- بو الحسن ثابت بن قرة ( ٨٢٦ – ٩٠١م ) .
- أبو كامل المصري ( ٨٥٠ – ٩٣٠م ) .
- عمر الخيام ( ١٠٤٤ – ١١٢٣م ) .
- نصير الدين الطوسي ( ١٢٠١ – ١٢٧٤م ) .
- أبو الحسن القلصادي ( ١٤١٢ – ١٤٩٦م ) .
- بهاء الدين العاملي ( ١٥٤٧ – ١٦٢٢م ) .

وغيرهم .

ومن أهم أعمالهم :

- أوجدوا دراسة منظمة للمقادير الجبرية لأسس مختلفة مستخدمين العمليات الحسابية على هذه المقادير ( من جمع وطرح وضرب وقسمة ) .
- تعرضوا لضرب وقسمة وجمع وطرح الكسور الجبرية .
- وضعوا قواعد لجمع مربعات الأعداد ومكعباتها .
- درس العرب العلاقات :

$$( ا + ب )^٣ = ا^٣ + ب^٣ + ٣ ا ب^٢ + ٣ ا^٢ ب$$

$$( ا - ب )^٣ = ا^٣ + ٣ ا ب^٢ - ( ب^٣ + ٣ ا^٢ ب )$$

$$( ا^٢ - ب^٢ ) = ( ا - ب ) ( ا + ب )$$

$$( ا^٣ + ب^٣ ) = ( ا + ب ) ( ا^٢ - ا ب + ب^٢ )$$

$$\left( \frac{ا + ب}{٢} \right)^٢ - \left( \frac{ا - ب}{٢} \right)^٢ = ا ب \ .$$

كما درسوا الكميات ، س ، $س^٢$ ، $س^٣$ ، .... ، وكذلك الكميات $\frac{١}{س}$ ، $\frac{١}{س^٢}$ ، $\frac{١}{س^٣}$ ، ... ، وعمليات الضرب والقسمة العائدة لهذه القوى .

**أقسام الوحدة :**

تتضمن هذه الوحدة « تحليل المقادير الجبرية »عشرة بنود خصص لها ٣٢ حصة .يتناول البند الأول مراجعة

لما سبق دراسته في تحليل المقادير الجبرية . أما البند الثاني فقد تناول المقدار الثلاثي البسيط وغير البسيط والمربع الكامل وطرق تحليلهم ، وتناول البند الثالث التحليل بإكمال المربع ، وفي البند الرابع تم تقديم مفهوم مجموع مكعبين ، والفرق بينهما وكيفية كتابتهما كحاصل ضرب عوامل . أما البند الخامس فتناول تحليل مقادير مكونة من أربعة حدود أو خمسة حدود باستخدام التجميع وفي البنود من السادس وحتى الثامن تمت معالجة الكسور الجبرية والعمليات عليها ، وفي نهاية هذه الوحدة قدمت تمارين ومسائل عامة تشمل جميع بنود الوحدة لتثبيت وتعميق المفاهيم التي وردت فيها واختبار للوحدة كتدريب للطالب .

**المفاهيم الأساسية وأساليب التدريس :**

– المقدار الثلاثي البسيط وهو على الصورة :

س$^{٢}$ + ب س + جـ ، حيث ب ، جـ ∈ ح .

– المقدار الثلاثي غير البسيط وهو على الصورة :

ا س$^{٢}$ + ب س + جـ ، حيث ا ، ب ، جـ ∈ ح ، ا © ٠ .

– المقدار الثلاثي المربع الكامل :

ا$^{٢}$ ∠ ٢ ا ب + ب$^{٢}$ = ( ا ∠ ب )$^{٢}$ .

– إكمال المقدار كمربع كامل .

– مجموع مكعبين والفرق بينهما :

س$^{٣}$ + ص$^{٣}$ = ( س + ص ) ( س$^{٢}$ – س ص + ص$^{٢}$ ) .

س$^{٣}$ – ص$^{٣}$ = ( س – ص ) ( س$^{٢}$ + س ص + ص$^{٢}$ ) .

– المضاعف المشترك الأدنى ( الأصغر ) للمقادير الجبرية .

– الكسور الجبرية .

وعند تدريس هذه الوحدة عموماً يراعي المدرس ما يأتي :

– يبين للطلبة أن تحليل المقدار الجبري ما هو إلا وضع المقدار في صورة حاصل ضرب لأبسط عوامله .

– يوضح أن المقصود بكلمة ( حلل ) أن يكون التحليل تاماً .

– يوضح للطلبة أنه عند تحليل المقدار الثلاثي بصفة عامة نقوم بما يلي :

أولاً : فك الأقواس والاختصار ، وجود العامل المشترك ، ترتيب الحدود تنازلياً حسب قوى إحداها .

ثانياً : البحث فيما إذا كان مربعاً كاملاً .

ثالثاً : نستخدم حالات التحليل المعروفة .

– يوضح للطلبة أهمية إخراج العامل المشترك الأعلى لحدود المقادير إن وجد قبل تحليلها .

– يربط بين طرق التحليل المختلفة ليكسب الطلبة مهارة من التحليل وانتقاء الطريقة المناسبة حيث أن شكل المقدار يوحي بطريقة التحليل .

– يوضح للطلبة إن النظرة الشاملة للمقدار يوحي بطريقة التحليل ، وخاصة إذا كان بين حدوده عوامل مشتركة .

– يبين للطلبة أنه عند تحليل مقدار جبري بوجه عام يتم اتباع ما يأتي :

١ ) ترتيب حدود المقدار الجبري حسب قوة أي متغير فيه .

٢ ) إخراج العامل المشترك الأعلى بين جميع حدوده إن وجد .

٣ ) يمكن تحديد نوع التحليل المناسب حسب عدد حدود المقدار الجبري :

* ثلاثة حدود ( المقدار الثلاثي الجبري بحالاته ) نطبق طريقة تحليله وفق حالة هذا المقدار .
* حدان ( الفرق بين مربعين أو مجموع مكعبين والفرق بينهما ) نطبق طريقة تحليل كل منهما :

■ أكثر من ثلاثة حدود : وطريقة تحليله ( إخراج العامل المشترك الأعلى – التجميع ) ثم نتبع طريقة أي نوع من أنواع التحليل فيجب اتباع المحاولة والخطأ حتى تنتج طريقة التحليل .

**بعض الأخطاء الشائعة التي قد يقع الطالب فيها في هذه الوحدة :**

قد يفهم أن :

١ ) $(س + ص)^{٣} = س^{٣} + ص^{٣}$ .

٢ ) عندما تكون الكسور الجبرية على صورة مقدار كالتالي :

$$\frac{\cancel{س} + ٢}{٣\cancel{س} + ٦} = \frac{٢}{٣ + ٦} = \frac{٢}{٩} \quad .$$

قد يتم اختصار الرمز س من البسط والمقام ، وكذلك في صورة الكسر التالي :

$$\frac{(\cancel{س + ١}) + (س - ٢)}{(\cancel{س + ١})\,(س - ٣)} = \frac{(س - ٢)}{(س - ٣)} \quad .$$

قد يتم اختصار العامل ( س + ١ ) من البسط والمقام ، وهنا يتم التوضيح في حالة وجود اشارة جمع أو طرح لايمكن الاختصار ، والإختصار يتم في حالة وجود الضرب فقط .

٣ ) عند إكمال مقدار إلى مربع كامل قد ينسى الطالب طرح الحد الذي تم إضافته وبالتالي تتغير قيمة المقدار المراد تحليله .

لذا يجب التركيز على توضيح المفاهيم والإكثار من الأمثلة كي يتغلب الطالب على تلك المشاكل .

## ٢ : ١ مــراجعـــــة

**عدد الحصص :** حصتان .

### الأهـــداف

– تثبيت المعارف والمهارات في تحليل المقادير الجبرية .
– إخراج العامل المشترك والفرق بين مربعين .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين كالتالي :
الحصة الأولى : العامل المشترك الأكبر ، والفرق بين مربعين .
الحصة الثانية : تمارين ومسائل .

– يبدأ المدرس بمراجعة ضرب حدود جبرية في مقادير جبرية ، ثم ضرب مقدار جبري في آخر بحيث يكون الناتج فرق بين مربعين .
– يوضح أن حاصل الضرب عبارة عن مقدار جبري عوامله تلك العوامل التي تم ضربها .
– يُذكّر المدرس االطلبة بكل من :
التحليل باستخراج العامل المشترك .
تحليل الفرق بين مربعين .
– مناقشة الأمثلة أو ما شابه ذلك من التمارين .
– حل تمارين كتدريبات صفية يقوم المدرس أثناء حل الطلبة لها بتقديم التوجيهات والمساعدة لمن يحتاج .
– إعطاء بعض التمارين كواجب منزلي على أن تتم مناقشتها في الحصص التالية .

### ارشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ٣ ] (م – ٢ )$^{٢}$( م – ١ ) .

[ ١٠ ] يتم أولاً إخراج العامل المشترك بحيث يكون المقدار ٣ م ( ل$^{٢}$ – $\frac{٩}{٤}$ م$^{٢}$ ) ، ثم يستكمل التحليل .

[ ١٢ ] يفضل تحويل الكسر العشري إلى كسر عادي بالصورة $\frac{١٦}{١٠٠}$ م$^{٢}$ – $\frac{ب^{٢}}{٩}$ ، ويستكمل التحليل .

[ ١٣ ] ٤٠ × ٩٠ = ٣٦٠٠

في المسائل من رقم ١٤ – ١٦ ، ١٨ ، ٢٠ ، ٢٢ يتم أولاً استخراج العامل المشترك ، ثم يستكمل التحليل .

### التقــويم

يعتبر هذا الدرس تقويماً قبلياً لهذه الوحدة ، من خلال أداء الطلبة في حل الواجبات الصفية والمنزلية يكوّن المدرس فكرة عن مدى تحقق أهداف الدرس وإذا لم تتحقق أهداف الدرس بالمستوى المطلوب فعلى المدرس معالجة الوضع بشكل أو آخر ( حصة إضافية أو تمارين إضافية للطلبة دون المستوى ) حيث يشكل هذا الدرس الأساس لما بعده فيجب أتقان محتواه قبل مواصلة دراسة الوحدة .

## ٢ : ٢ المقـــدار الثـــلاثـــي

**عدد الحصص :** ست حصص .

### الأهـــداف

– يميز المقدار الثلاثي البسيط عن المقدار الثلاثي غير البسيط .
– يحلل مقدار ثلاثي « بسيط وغير بسيط » .
– يتعرف على المقدار الثلاثي المربع الكامل ، ويحلله
– يكمل أي مقادير إلى مربع كامل ، ويحلله .

### المحتوى

– الصورة العامة للمقادير الثلاثية البسيطة هي :
$س^{٢} + ب\ س + جـ$ ، حيث ب ، جـ ∋ ح .
– الصورة العامة للمقادير الثلاثية غير البسيطة هي :
$أ\ س^{٢} + ب\ س + جـ$ ، حيث أ ، ب ، جـ ∋ ح ، أ © ٠ .
– لتحليل المقـدار الثلاثـي البسيـط الذي صورتـه : $س^{٢} + ب\ س + جـ$ يحلل الحد المطلق ( جـ ) إلى عاملين مجموعهما يساوى معامل الحد الأوسط ( ب ) وبصورة عامة يكون المقدار :
$س^{٢} + (م + ن)\ س + م\ ن = (س + م)\ (س + ن)$
حيث م ، ن ∋ ح ، م + ن = ب ، م ن = جـ .
– المقدار الثلاثي المربع الكامل يتكون من : مجموع كميتين مربعتين مضافاً إليه « أو مطروحاً منه » ضعف حاصل ضرب الكميتين .
– يحلل المقدار الثلاثي المربع الكامل بالشكل التالي : ( الجذر التربيعي للحد الأول ∠ الجذر التربيعي للحد الثالث )$^{٢}$ والإشارة تتبع الحد الأوسط .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في ست حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : المقدار الثلاثي البسيط .
الحصة الثانية : تدريبات صفية .
الحصة الثالثة : المقدار الثلاثي غير البسيط .
الحصة الرابعة : المقدار الثلاثي المربع الكامل .
الحصة الخامسة والسادسة : تمارين ومسائل .

وعند تنفيذ الدرس يراعى ما يأتي :

– يمهد للدرس بعرض مقادير جبرية مكونة من ثلاثة حدود على الصورة العامة $أ\ س^{٢} + ب\ س + جـ$ البعض منها فيها أ = ١ والبعض فيها أ © ١ ومن خلالها يبين نوع كل منها ( الثلاثي البسيط ، والثلاثي غير البسيط ) .
– تعطى مقادير جبرية مكونة من حدين على صورة ( س + م ) ، ( س + ن ) حيث م ، ن ∋ ح ، وتتم عملية الضرب لها بالشكل التالي :
$(س + م)(س + ن) = س(س + ن) + م\ (س + ن)$
$= س^{٢} + ن\ س + م\ س + م\ ن$
$= س^{٢} + (ن + م)\ س + م\ ن$
– مناقشة ناتج الضرب ومقارنته بالصورة العامة : $س^{٢} + ب\ س + جـ$ ، ويوضح بأن عوامل ( جـ ) هي م ، ن ، ومجموعها ( م + ن ) = ب وفي ضؤ ذلك يتم التوصل إلى أن معامل الحد الأوسط هو عبارة عن مجموع عاملين للحد الثالث « الحد المطلق » ، ومن ثم يتم استنتاج قاعدة تحليل المقدار الثلاثي البسيط .
– تعطى تدريبات صفية ، ومن خلالها توضح جميع عوامل الحد المطلق ، وكيفية الاختبار للعوامل التي مجموعها يساوى معامل الحد الأوسط .
– يتم التركيز على إشارات عوامل الحد المطلق : عندما يكون الحد المطلق موجبا تكون إشارة العاملين موجبتين معاً أو سالبتين معاً وذلك حسب إشارة الحد الأوسط ، أما إذا كان الحد المطلق سالب فإن العاملين مختلفان في الإشارة ، أحدهما موجب

والآخر سالب ومجموعهما يساوى معامل الحد الأوسط .

– تعطى مقادير جبرية مكونة من حدين على الصورة ( ٣ س + ٥ )( ٢ س + ٧ ) وتتم عملية الضرب باستخدام خاصية التوزيع أي أن :

( ٣س + ٥ )( ٢س + ٧ ) = ٣س ( ٢س + ٧ ) + ٥ ( ٢س + ٧ )

= ٦س$^{٢}$ + ٢١ س + ١٠ س + ٣٥

= ٦س$^{٢}$ + ( ٢١ + ١٠ ) س + ٣٥

ويتم توضيح أن حاصل ضرب معامل الحد الأول في الحد المطلق = ٢١٠ ويساوى حاصل ضرب العاملين اللذين مجموعهما يساوى معامل الحد الأوسط .

أي أن ٦ × ٣٥ = ٢١٠ = ٢١ × ١٠ ولتحليل مقدار ثلاثي غير بسيط على صورة أ س$^{٢}$ + ب س + جـ نتبع الخطوات التالية :

١ ) إيجاد حاصل ضرب معامل الحد الأول × الحد المطلق، ويحلل ناتج الضرب إلى عاملين مجموعهما يساوى معامل الحد الأوسط .

٢ ) يكتب معامل الحد الأوسط على صورة مجموع العامل .

٣ ) يؤخذ العامل المشترك لكل حدين متتالين على حدة ثم يؤخذ المقدار المشترك للمقدارين الناتجين من تحليل كل حدين متتالين .

– يعود الطلبة على التحقق من صحة التحليل .

– تعطى تدريبات على تحليل المقدار الثلاثي غير البسيط .

– تعطى مقادير جبرية تحلل إلى عوامل متساوية ، ومن خلالها توضح أن الناتج يمثل مربعا كاملا .

– تناقش الحدود للمقدار حتى يتم التوصل إلى تعريف المقدار الثلاثي المربع الكامل وكيفية تحليله .

– يعطى المثال ( ٧ ) كتدريب صفي .

– حل تمارين ومسائل كتدريبات صفية .

– تعطى تمارين ومسائل كواجب منزلي نهاية كل حصة وفقاً لما ينجز في تلك الحصة .

– متابعة الواجبات المنزلية ومعالجة جوانب القصور لدى الطلبة .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

– عند تحليل أي مقدار يتم أولاً استخراج العامل المشترك إن وجد ، ثم يستكمل التحليل .

[ ٢٤ ] أولاً يرتب المقدار تنازلياً حسب قوة ع كما يلي –٥ع$^{٢}$ + ١٩ ع + ٤ ويفضل استخراج ( –١ ) عامل مشترك .

–١ ( ٥ع$^{٢}$ – ١٩ ع – ٤ ) = – ( ٥ع + ١ )( ع – ٤ )

[ ٢٦ ] يرتب المقدار بحسب قوة ل$^{٢}$ كما يلي :

ل$^{٢}$ – ٧ل م – ٣٠م$^{٢}$ = ( ل – ١٠ م )( ل + ٣م ) .

[ ٢٩ ] ( $\frac{\text{س}}{٢}$ – ٣ )$^{٢}$ .

[ ٣٠ ] ( أ – $\sqrt{٥}$ )$^{٢}$ .

[ ٣٢ ] ٥ ( ب – ٢ جـ ) ( ب – ١٠جـ )

[ ٣٥ ] يفضل كتابة المقدار بالصورة :

$\frac{٢٥}{١٠٠}$ أ$^{٢}$ + أ ب + ب$^{٢}$ ) = ( $\frac{٥}{١٠}$ أ + ب )$^{٢}$ .

[ ٣٧ ] مساحة الحديقة = ( طول ضلعها )$^{٢}$ .

( س$^{٢}$ + ٢٤س + ١٤٤ ) م$^{٢}$ = ( س + ١٢ )$^{٢}$ م$^{٢}$ .

∴ طول الحديقة = ( س + ١٢ ) م .

عند س = ١٥٣

∴ طول الحديقة = ١٥٣ + ١٢ = ١٦٥ م .

[ ٣٨ ] الحجم = طول الضلع × نفسه × نفسه

= ( س + ٥ ) ( س + ٥ ) ( س + ٥ )

= ( س + ٥ )$^{٣}$ م$^{٣}$ .

## التقـــويم

– يتم تقويم بنائي من خلال المناقشة ، ومتابعة حل التدريبات الصفية والواجبات المنزلية .

– في نهاية الحصة السادسة يطلب حل تمرين أو اثنين مثل الآتي .

حلل ما يأتي :

أ) $س^٢ - س - ٤٢$ .

ب) $٣ص^٢ + ٨ص - ٣$ .

جـ) $٩أ^٢ - ٦أ ب + ب^٢$ .

## ٢ : ٣ التحليـل بإكمـال المربـع

**عدد الحصص :** ثلاث حصص .

### الأهـــداف

– يكمل مقدار معطى إلى مربع كامل .

– يحلل مقدار معطى بإكمال المربع .

### المحتوى

– لإكمال المقـدار $س^٢ + ب س$ إلى مربـع كامـل ، نضيف إليه مربع نصف معامل س ، أي $(\frac{ب}{٢})^٢$ فنحصل على :

$س^٢ + ب س + (\frac{ب}{٢})^٢ = (س + \frac{ب}{٢})^٢$ وهو مربع كامل .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : إكمال المربع .

الحصة الثانية : تحليل المقدار الثلاثي بإكمال المربع .

الحصة الثالثة : تدريبات صفية .

وعند تنفيذ الدرس يراعى ما يأتي :

– يمهد للدرس بمراجعة المقـدار الثلاثي المربع الكامل وكيفية تحليله إلى عوامل من خلال عرض بعض الأمثلة مثل :

* $س^٢ + ٤س + ٤ = (س + ٢)^٢$ .
* $ص^٢ - ٦ص + ٩ = (ص - ٣)^٢$ .
* $٤س^٢ + ٢٠س ص + ٢٥ص^٢ = (٢س + ٥ص)^٢$ .

– يعطى المقدمة الموجودة في كتـاب الطالـب وذلك بعرض المثالين : $س^٢ + ٢ ب س + ب^٢$ ، $س^٢ + س$ ويناقش طريقة تحليلهما مع الطلبة .

– يوضح للطلبة أن المقـدار $س^{٤} + ٤ س^{٢}$ والذي يمكن تحليله بطريقة أخرى وذلك بتحويله إلى مربع كامل .

– يستنتج مع الطلبة قاعدة إكمال المقدار إلى مربع كامل وذلك من خلال عرض الأمثلة المختلفة .

– يوضـح لهـم القاعـدة التي تستخدم في إكمـال المقدار إلى مربع كامل وذلك بإضافة مربع نصف معامل س إلى المقدار يشترط أن يكون معامل الحد الأول واحد .

– يوضح لهم أنه عند تحليل مقـدار ثلاثي باستخـدام الإكمال إلى مربع كامل وذلك بإضافة الحد $\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}$ ( مربع نصف معامل س ) يجب أن يطرح الحد نفسه حتى لايتغير قيمة المقدار المطلوب تحليله .

– يوضح للطلبة انه قد يصادفنا مقادير كل من حديها الأول والأخير مربع كامل ولايمكن تحليلها بالطرق السابقة ، ولتحليلها نقوم بالإكمال إلى مربع نضيف ثم نطرح الحد الأوسط الذي يكوّن مع الحدين الأول والأخير مقداراً ثلاثياً على صورة مربع كامل ويؤكد على ضرورة المحافظة على قيمة المقدار .

– يكلف الطلبة بحل بعض التدريبات الصفية والمنزلية على أن يتم مراجعة بعضها في الحصة التالية .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[١] ٤ ) $م^{٤} + ٤ م^{٢} + \left(\frac{٤}{٢}\right)^{٢} = (م^{٢} + ٢)^{٢}$ .

٦ ) $ل^{٢} - ٣ ل + \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \left(ل - \frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ .

[٢] ٢ ) مربع نصف معامل س $= \left(\frac{٥}{١٢}\right)^{٢}$ .

$$\left(ص - \frac{٥}{١٢}\right)^{٢} - \frac{١٦٩}{١٤٤}$$

$$= \left(ص - \frac{٣}{٢}\right)\left(ص + \frac{٢}{٣}\right) .$$

٧ ) $٢٥ \left(ص^{٢} - \frac{٢٢}{٥} ص + \frac{٨}{٥}\right)$

$= ٢٥ (ص - ٤) \left(ص - \frac{٢}{٥}\right)$ .

[٤] ٤ ) $٣ (٤ س^{٤} + ٢٥ ص^{٤} - ٢٤ س^{٢} ص^{٢})$

$= ٣ (٤ س^{٤} - ٢٤ س^{٢} ص^{٢} + ٢٥ ص^{٤})$

$= ٣ [ ٤ س^{٤} - ٢٠ س^{٢} ص^{٢} + ٢٥ ص^{٤}$

$- ٢٤ س^{٢} ص^{٢} + ٢٠ س^{٢} ص^{٢} ]$

$= ٣ [ (٢ س^{٢} - ٥ ص^{٢})^{٢} - ٤ س^{٢} ص^{٢} ]$

= ... أكمل الحل .

٥ ) $(أ^{٢} - ٢ أب + ٢ب^{٢})(أ^{٢} + ٢ أب + ٢ب^{٢})$ .

## التقـــويم

يقوّم المدرس الطلبة تقويماً بنائياً من خلال المناقشة ومتابعة حل التدريبات الصفية والواجبات المنزلية .

وفي نهاية الحصة الثالثة يقدم التمرين التالي أو ما شابهه كخطوة تقويم :

– حلل : $٢ ص^{٤} - ١٤ ص^{٢} + ٢$ .

## ٢ : ٤ مجموع مكعبين والفرق بينهما

**عدد الحصص :** ثلاث حصص .

### الهـــدف

– يحلل مجموع مكعبين ، والفرق بينهما .

### المحتوى

$س^٣ + ص^٣ = ( س + ص ) ( س^٢ – س ص + ص^٢ )$

أي أن : مجموع مكعبي حدين = ( الحد الأول + الحد الثاني ) ( مربع الحد الأول – الحد الأول × الحد الثاني + مربع الحد الثاني )

$ا^٣ – ب^٣ = ( ا – ب ) ( ا^٢ + ا ب + ب^٢ )$ .

أي أن : الفرق بين مكعبي حدين = ( الحد الأول – الحد الثاني ) ( مربع الحد الأول + الحد الأول × الحد الثاني + مربع الحد الثاني ) .

### تنفيذ الدرس

يتم تنفيذ هذا الدرس في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : تحليل مجموع مكعبين .

الحصة الثانية : تحليل الفرق بين مكعبين .

الحصة الثالثة : تدريبات ومسائل .

عند تنفيذ الدرس يراعى ما يأتي :

– يمهد المدرس للدرس بمراجعة مفهوم مكعب الحد ، والمكعب الكامل والجذر التكعيبي من خلال أمثلة .

– يناقش مع الطلبة التدريب ( $س^٣ + ص^٣$ ) ÷ ( س + ص ) من خلال القسمة المطولة ، ثم يستنتج معهم أن خارج القسمة عبارة عن المقدار $س^٢ – س ص + ص^٢$ .

أي أن : $\frac{س^٣ + ص^٣}{س + ص} = س^٢ – س ص + ص^٢$ .

– يتحقق مع الطلبة أن حاصل ضرب المقدار ( س + ص ) في المقدار $س^٢ – س ص + ص^٢$ هو $س^٣ + ص^٣$

أي أن : $( س + ص ) ( س^٢ – س ص + ص^٢ )$

$= س^٣ + ص^٣$ وهو عبارة عن مجموع مكعبي الحدين س ، ص .

– يوضح للطلبة أن كلاً من : ( س + ص ) و ( $س^٢ – س ص + ص^٢$ ) يعتبر عاملاً من عوامل المقدار $س^٣ + ص^٣$ .

– يوضح المدرس للطلبة أن $ا^٣ + ب^٣$ يسمى مجموع مكعبين ، أما المقدار $ا^٣ – ب^٣$ فيسمى الفرق بين مكعبين وباستخدام قواعد الإشارة نحصل على أن : $ا^٣ – ب^٣ = ا^٣ + ( –ب )^٣$ ومن هنا يمكن الاستفادة من قاعدة تحليل مجموع مكعبين لتحليل الفرق بين مكعبين

أي أن :

$ا^٣ – ب^٣ = ا^٣ + ( –ب )^٣$

$= [ ا + ( –ب ) ] [ ا^٢ – ا ( –ب ) + ( –ب )^٢ ]$

$= [ ا – ب ] [ ا^٢ + ا ب + ب^٢ ]$ .

– يعطى المدرس التدريب $\frac{ا^٣ + ب^٣}{ا – ب}$ ، ثم يطلب منهم التحقق من أن $( ا – ب ) ( ا^٢ + ا ب + ب^٢ )$

$= ا^٣ – ب^٣$ .

– يوضح المدرس للطلبة أهمية إخراج العامل المشترك الأكبر لحدود المقادير – إن وجد – قبل التحليل .

– يلفت المدرس انتباه الطلبة إلى أنه إذا كان هناك مقدار يمكن تحليله كفرق بين مكعبين وكفرق بين مربعين فيستحسن تحليله أولاً كفرق بين مربعين ويعرض المثال ( ٢ ) جـ .

– يكلف الطلبة بحل بعض التمارين والمسائل كواجب صفي وفق موضوع الحصة ويقوم بمتابعة الطلبة أثناء أداء هذه الواجبات ويقدم التوجيه والمساعدة لمن يحتاج .

– يكلف الطلبة في نهاية كل حصة بحل بعض التمارين كواجب منزلي على أن يتم مراجعة بعضها في الحصة التالية .

## ارشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ١ ] ء) ليس مجموع مكعبين لأن ٩ ليس مكعباً كاملاً .

هـ) س$^{٦}$ + ٣$^{٦}$ = (س$^{٢}$)$^{٣}$ + (٣$^{٢}$)$^{٣}$

= (س$^{٢}$ + ٩ ) ( س$^{٤}$ − ٩س$^{٢}$ + ٨١ )

[ ٢ ] هـ) ليس فرق بين مكعبين لأن ٢٥ ليس مكعباً كاملاً .

[ ٣ ] ٣) $\frac{١}{س^{٣}} + \frac{١}{ص^{٣}}$

$= (\frac{١}{س} + \frac{١}{ص})(\frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{س ص} + \frac{١}{ص^{٢}})$ .

٤ ) ٨( ٢ أ − ب ) ( ٤ أ$^{٢}$ + ٢ أ ب + ب$^{٢}$ ) .

٨ ) س (ع − ل ) ( ع$^{٢}$ + ع ل + ل$^{٢}$ ) .

١٢ ) ٢ [ ١ − (س − ١ )$^{٣}$ ] ، ثم تحلل كفرق بين مكعبين .

١٥ ) (٠,٣ أ + $\frac{٥}{٩}$ ب ) (٠,٠٩ أ$^{٢}$ − $\frac{١}{٦}$ أ + $\frac{٢٥}{٨١}$ )

١٩ ) (م − ن ) ( ٧ م$^{٢}$ + ٤ م ن + ن$^{٢}$ )

[ ٥ ] ( س + ٣ )$^{٣}$ + ( س − ٣ )$^{٣}$

= ٢س (س$^{٢}$ + ٢٧ )

## التقـويم

يقـوم المدرس الطلبة تقويماً بنائياً من خلال المناقشات الصفية ومـن خلال متابعة حل بعض التدريبات الصفية والواجب المنزلي ، وفي نهاية الحصة الثالثة يقدم تمرينين كالتاليين كخطوة تقويم :

حلل ما يأتي :

أ ) س$^{٣}$ + ٨ ص$^{٣}$ .

ب ) س$^{٦}$ − ١ .

## ٢ : ٥ التحليل بالتجميع

**عدد الحصص** : ثلاث حصص .

### الهـــــدف

يحلل مقادير جبرية باستخدام التجميع .

### تنفيذ الدرس

يتم تنفيذ هذا الدرس في ثلاثة حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : التحليل بالتجميع .

الحصة الثانية والثالثة : تدريبات صفية .

وعند تنفيذ الدرس تتم مراعاة ما يأتي :

– يكتب المدرس المثال :

$س^٢ + ﺃ س + ب س + ﺃ ب$ على السبورة ، ثم يناقش الطلبة عن إمكانية تحليله ويتوصل مع الطلبة إلى أنه لايوجد عامل مشترك بين حدود المقدار . كما إنه مقدار رباعي لانستطيع تحليله بالطرق السابقة .

– يوضح للطلبة الطريقة المناسبة لتحليل ذلك المقدار من خلال ضم ( تجميع ) بعض الحدود غالباً بوضع كل حدين معاً ، ثم نقوم بتحليل كل تجمع بإي أسلوب تراه مناسباً .

– يوضح للطلبة بأن عملية التجميع ممكن أن تتم بأكثر من طريقة ، وكلها توصلنا إلى النتيجة نفسها ويعطى على ذلك أكثر من مثال .

– يبين للطلبة أن عملية التجميع تستخدم لتحليل المقادير الجبرية المكونة من أربعة حدود أو أكثر ويعرض عليهم الأمثلة الموجودة في كتاب الطالب .

– يوضح للطلبة أنه إذا حُصر المقدار بين قوسين مسبوقين بعلامة سالبة فعند فتح القوسين يجب تغيير الإشارة لما بداخل القوسين .

– يكلف المدرس الطلبة بحل بعض التدريبات الصفية وحل بعض التمارين كواجب منزلي على أن يتم مناقشة بعضها في الحصة التالية .

### ارشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[٤] $( ب - ١ ) [ ﺃ^٢ ( ب + ١ ) + ١ ]$ .

[٦] $( س^٢ + ٤ ) ( ٣ س + ٢ )$ .

[٨] $( ٥ س + ٤ ص ) ( ٥ س + ٤ ص + ﺃ )$ .

[١٣] $٢ س [ س^٢ ( س + ٣ ) - ٩ ( س + ٣ ) ]$

$= ٢ س [ ( س + ٣ ) ( س^٢ - ٩ ) ]$

$= ٢ س ( س + ٣ )^٢ ( س - ٣ )$ .

[١٩] $س^٧ ( س^٦ + ١ ) + ( س^٦ + ١ )$

$= ( س^٦ + ١ ) ( س^٧ + ١ )$

$= ( س^٢ + ١ ) ( س^٤ - س^٢ + ١ ) ( س^٧ + ١ )$ .

### التقـــويم

يقوّم المدرس الطلبة تقويماً بنائياً من خلال مناقشة وحل التدريبات الصفية والواجبات المنزلية . كما يقدم تمريناً كالتالي في نهاية الحصة الثالثة .

حلل : $ﺃ س + ١ + س + ﺃ$ .

## ٢ : ٦ ضرب وقسمة الكسور الجبرية

**عدد الحصص** : خمس حصص .

### الأهـــداف

١ ) يختصر الكسور الجبرية .

٢ ) يضرب ويقسم كسور جبرية .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : اختصار الكسور الجبرية .

الحصة الثانية : تدريبات ومسائل .

الحصة الثالثة : ضرب الكسور الجبرية .

الحصة الرابعة : قسمة الكسور الجبرية .

الحصة الخامسة : تدريبات ومسائل .

وعند تنفيذ الدرس على المدرس أن يراعي الآتي :

* يبدأ المدرس باختصار كسور عددية ، ثم يضرب ويقسم كسور عددية .
* يختصر كسور جبرية مضروبه أو مقسومة بسطها ومقامها حد واحد .
* يختصر كسور جبرية مضروبة أو مقسومة بسطها ومقامها مقادير جبرية ، وفي هذه الحالة يؤكد المدرس على أن يتم أولاً تحليل المقادير الجبرية بأي طريقة من طرق التحليل المختلفة ، وبعدها يتم اختصار أي عامل من البسط مع أي عامل يساويه من المقام .
* يؤكد المدرس للطلبة بأنه لاتتم عملية الاختصار بين عمليات الجمع والطرح فمثلاً لايمكن اختصار الكسر التالي على هذا النحو :

$$\frac{\cancel{س} - ٢}{٢\cancel{س} - ٤} = \frac{-٢}{٢ - ٤} = \frac{-٢}{-٢} = ١$$ فهذا خطأ .

يقع به كثير من الطلبة ؛ فعند اختصار أي كسر جبري كلٌّ من بسطه ومقامه عبارة عن مقادير جبرية ، لابد أولاً من تحليلها إلى عواملها فالكسر السابق يختصر على هذا النحو :

$$\frac{س - ٢}{٢س - ٤} = \frac{\cancel{(س - ٢)}}{٢\cancel{(س - ٢)}} = \frac{١}{٢}$$

أي لابد أولاً من تحليل كلٍّ من البسط والمقام بإحدى طرق التحليل المختلفة وتكتب على شكل حاصل ضرب عوامل وبعدها يتم اختصار أي عامل من البسط مع أي عامل يساويه في المقام .

* في نهاية الحصة الأولى يحدد المدرس بعض التمارين كواجب منزلي يناقشها في الحصة الثانية ويحل ما صعب عند الطلبة ويحل بعض التمارين كتدريبات صفية ، ثم يناقشها مع الطلبة .
* في بداية الحصة الثالثة يتطرق إلى ضرب الكسور الجبرية حيث يبدأ بإعطاء أمثله عددية ويوضح بأنه عند عملية ضرب الكسور يتم اختصار أي عامل من البسط مع أي عامل مشترك معه من المقام .
* عند قسمة الكسور فإن عملية القسمة تتحول إلى ضرب مع قلب القاسم « أي يصبح بسطه مقاماً ومقامه بسطاً » .
* عند قسمة كســور جبرية بسطها ومقامها عبارة عن مقادير جبريـة ، فإنه يتـم أولاً تحليل كلٍّ من البسط والمقام بإحدى طرق التحليل المختلفة ، ثم تتم تحويل عملية القسمة إلى ضرب وبعدها تتم عملية الاختصار .
* يناقش المدرس مع الطلبة بعض التمارين كتدريبات صفيـة بما يسمح له الوقـت في الحصتين الثالثة والرابعة . كما يحدد لهم بعض التمارين كواجب منزلي في نهاية الحصتين الثالثة والرابعة .
* يحل المدرس مع الطلبة تمارين الواجب الصعبة ، وبعدها يناقش بعض التمارين كتدريبات صفية لترسيخ مفهوم الاختصار .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[أ] ٣) $\frac{\text{ع} + ٥}{\text{ع} - ٣}$ .

٤) $\frac{\text{س ص}}{٢(\text{س} - \text{ص})}$ ٥) $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س} + ٣}$

٦) $\frac{\text{ص} - ٣}{\text{ص} + ٣}$ ٧) $\frac{\text{س} - ٥}{\text{س}^٢ - \text{س} + ١}$

٨) $\frac{١}{\text{س} + ٥}$ ٩) $(\text{أ} + ٣\text{ب})(\text{أ} - \text{ب})$

١٠) $\text{س} - ١$ .

[ب] ٢) $\frac{١}{\text{س} + ٣}$ ٣) $\frac{٢(\text{ص} - ٤)}{(\text{ص} - ٣)(\text{ص} - ٥)}$

٤) $\frac{\text{س} - ٥}{\text{س} - ٩}$ ٥) ١

٦) $\frac{٦(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ٣)(\text{س}^٢ + ١)}$ ٧) $\frac{\text{س}^٢(\text{س}^٢ + \text{س} + ١)}{(\text{س}^٢ + ٢)^٢}$

٨) $\frac{\text{س}(\text{س} + \text{ص})}{\text{ص}}$ ٩) $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ١}$

١٠) $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢(\text{س} - \text{ص})}$ ١١) $\frac{٢\text{س} + ١}{٣}$

١٢) $\frac{٢}{٢\text{س} - ٣}$ .

### التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال المناقشات الصفية ومتابعة حل التدريبات الصفية ، وحل تمارين الواجب المنزلي ، وفي نهاية الحصة الخامسة يعطى تمريناً أو تمرينين كالتالي كخطوة تقويم:

احتصر :

$$\frac{\text{س}^٢ - ٥}{(\text{س} + ١)} \times \frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٨} \div \frac{\text{س}^٢ - ٢٥}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢٠}$$

## ٢ : ٧ المضاعف المشترك الأصغر

**عدد الحصص** : حصتان .

### الهـــدف

يوجد المضاعف المشترك الأصغر لمقدارين جبريين أو أكثر .

### المحتوى

المضاعف المشترك الأصغر لمقدارين جبريين أو أكثر هو أصغر مقدار يقبل القسمة على هذه المقادير ، ويرمز له (م . م . أ )

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : المضاعف المشترك الأصغر لمقدارين جبريين أو أكثر .

الحصة الثانية : تدريبات ومسائل .

وعند تنفيذ الدرس يراعي المدرس الآتي :

* يبدأ المدرس بإعطاء أعداد نسبية ويوضح كيفية إيجاد المضاعف المشترك للمقامات ويؤكد بأنه لاتتم عمليتا جمع وطرح الأعداد النسبية إلا بعد توحيد المقامات .
* يوجد المدرس المضاعف المشترك الأصغر لعدة حدود جبرية ، ثم يوجد المضاعف المشترك الأصغر لمقدارين جبريين ، ثم لعدة مقادير جبرية ، ويؤكد عند إيجاد م . م . أ لعدة مقادير جبرية لابد أولاً من تحليلها بإحدى طرق التحليل السابقة وذلك أثناء عرض الأمثلة المتدرجة في الصعوبة في كتاب الطالب .
* بعد حل ومناقشة الأمثلة ، يتوصل المدرس مع الطلبة إلي تعريف المضاعف المشترك الأصغر .

وفي نهاية الحصة الأولى يحدد المدرس للطلبة بعض التمارين كواجب منزلي وفي الحصة الثانية يناقش مع الطلبة تمارين الواجب ويحل ما صعب عندهم ، ويكلّف الطلبة بحل بعض التمارين كتدريبات صفية لترسيخ مفهوم كيفية إيجاد ( م . م . أ ) لعدة مقادير جبرية كي يستطيع الطلبة في الدرس القادم من جمع وطرح كسور جبرية مختلفة المقامات .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[٣] ب(ب – ١ ) ( ب + ١ ) ( ٣ ب + ٢ )

[٤] ٤س ( س – ٢ )( س +٢ )( س –١ )( س$^{٢}$ +٢ س +٤ )

[٥] س ( ٣ س – ٢ ) ( ٢ س – ٣ ) ( ٢ س + ٣ ) ( ٩س$^{٢}$ + ٦س + ٤ )

[٨] ٢ ( ٣ س – ٢ ) ( س + ١ ) ( س$^{٢}$ – س + ١ ) ( ٩س$^{٢}$ + ٦س + ٤ )

[٩] ( س$^{٢}$ – ٥ )$^{٢}$ ( ٥ س$^{٢}$ – ١ ) ( ٤ س$^{٢}$ + ١ ) ( ٥ س$^{٢}$ + س + ١ )

[١٠] ١٥ س ص ( ٢ س – ٣ص )$^{٢}$ ( ٢ س + ٣ ص )$^{٢}$ ( ٤ س$^{٢}$ + ٦ س ص + ٩ ص$^{٢}$ )

[١١] س$^{٢}$ ( س – ١ ) ( س – ٢ ) ( س + ٢ )$^{٢}$ ( س – ٣ ) ( س + ٣ ) ( س$^{٢}$ + ٤ ) .

[١٢] –٣٠ س ( س + ٢ ) ( س –١ ) ( س – ٣ ) ( س – ٢ ) .

## التقــويم

يتم التقويم بنائياً من خلال مشاركة الطلبة في المناقشات ومن خلال متابعة أدائهم عند حل التدريبات الصفية وتمارين الواجب المنزلي ، ثم يعطي المعلّم تمريناً كالتالي في نهاية الحصة الثانية كخطوة تقويم :

أوجد م . م . أ للمقادير التالية :

أ$^{٣}$ + ب$^{٣}$ ، أ$^{٢}$ – أ ب – ٢ ب$^{٢}$ ، ٢ أ$^{٢}$ – ٢ ب$^{٢}$ .

# ٢ : ٨ جمع وطرح الكسور الجبرية

**عدد الحصص** : أربع حصص .

## الهـــدف

يجمع ويطرح كسور جبرية .

## تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في أربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : جمع الكسور الجبرية .

الحصة الثانية : طرح الكسور الجبرية .

الحصة الثالثة والرابعة : تدريبات صفية .

وعند تنفيذ الدرس يراعى الآتي :

* يبدأ المدرس بجمع وطرح أعداد نسبية مقاماتها موحدة ، ثم مختلفة المقامات ، حيث يؤكد في الحالة الثانية على توحيد المقامات أولاً وكذلك بإيجاد ( م . م . أ ) الأصغر للمقامات ، وبعد توحيدها تتم عملية الجمع أو الطرح .
* يؤكد المدرس على إن يتم الشئ نفسه عند جمع أو طرح الكسور العادية وعند جمع أو طرح الكسور الجبرية .
* عند جمع أو طرح الكسور الجبرية يتم اتباع الخطوات التالية :

١ ) نحلل كل من بسوط ومقامات الكسور الجبرية بإحدى طرق التحليل المختلفة .

٢ ) نوجد م . م . أ للمقامات .

٣ ) نقسم المضاعف المشترك الأصغر على مقام كل كسر ،ونضرب خارج القسمة في بسط الكسر المعني .

٤ ) نجري عملية الاختصار .

* يبين المدرس للطلبة كيفية ترتيب الحدود الجبرية لأي مقدار جبري غير مرتب وتتم المحافظة على الإشارات لجميع الحدود ؛ فمثلاً :

المقدار : $٥\text{س} - \text{س}^{٢} - ٦$ يتم ترتيبه على النحو التالي :

$-\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٦ = -(\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦)$ ويحلل

$-(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٢)$ .

* يؤكد المدرس للطلبة بأنه إذا وجدت أكثر من عملية في التمرين الواحد يجب اتباع الآتي :

- إذا وجدت أقواس نبدأ بالعمليات التي بين الأقواس أولاً .
- نجري عمليات الضرب والقسمة أيهما يأتي أولاً .
- أخيراً نجري عمليات الجمع والطرح أيهما يأتي أولاً .

### ارشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[١] أ) ١ ب) $\frac{٤}{(\text{س}+٢)(\text{س}+٣)}$

جـ) $\frac{(\text{س}+٦)(٣\text{س}+١)}{(٣\text{س}+٢)}$ ء) $\frac{١}{\text{س}+٣}$

و) $\frac{٢}{\text{س}-٧}$ ى) ١ .

[٢] أ) $\frac{\text{س}^{٢}+\text{س}+١٦}{(\text{س}-١)(\text{س}+٥)}$ ب) $\frac{-(\text{س}^{٢}-٥\text{س}-١٤)}{(\text{س}-١)(\text{س}+٥)}$

جـ) $\frac{٣}{\text{س}+٥}$ ء) $\frac{٣(\text{س}+٥)}{(\text{س}-١)^{٢}}$

[٣] أ) $\frac{٣\text{س}+٤}{(\text{س}+٣)(\text{س}-٢)}$ ب) $\frac{\text{س}^{٣}-٢\text{س}^{٢}-٧\text{س}+٢}{(\text{س}-٢)(\text{س}+١)}$

جـ) $\frac{-(\text{س}^{٢}-١٦\text{س}+١٢)}{٢\text{س}(\text{س}-٢)}$ ء) $\frac{\text{س}+٨}{(\text{س}+٣)}$

[٦] ١

[٧] $(٤\text{ص}+٤)$ سم .

### التقويم

يتم التقويم بنائياً من خلال مشاركة الطلبة ، ومتابعة حل التدريبات الصفية وتمارين الواجب المنزلي . كما يعطى مثل التمرين التالي في نهاية الحصة الرابعة كخطوة تقويم : اختصر الآتي

$$\frac{\text{س}^{٢}-٥\text{س}+٦}{٣\text{س}^{٢}-٦\text{س}} \times \frac{٣\text{س}}{\text{س}^{٢}-٩} + \frac{\text{س}+٢}{\text{س}^{٢}+٥\text{س}+٦}$$

## ٢ : ٩ تمارين ومسائل عامة

**عدد الحصص** : حصتان .

### الهدف

يهدف هذا الدرس إلى تثبيت المفاهيم وتطوير المهارات التي وردت في هذه الوحدة .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين وعلى المدرس مراعاة ما يلي :

- التركيز على المفاهيم وقواعد التحليل واختصار الكسور الجبرية .
- التحقق من صحة التحليل وذلك بضرب هذه العوامل في بعضها لنحصل على المقدار الأصلي .
- الإتقان للعمليات على الكسور الجبرية من قبل الطلبة والتأكيد عليها .
- تكليف الطلبة بحل بعض التمارين والمسائل كتدريبات صفية .
- تكليف الطلبة بحل بعض التمارين والمسائل كواجب منزلي .
- متابعة الواجب المنزلي ومعالجة الصعوبات والأخطاء من واقع مشاهدات وملاحظات حلول الطلبة لتمارين هذا الدرس .
- تكليف الطلبة بحل الاختبار الوارد في الكتاب كواجب منزلي استعداداً لاختبار الوحدة في الحصة التالية .

### إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[٢٤] $\text{أ}^{١٢} - \text{ب}^{١٢} = (\text{أ}^{٦} - \text{ب}^{٦})(\text{أ}^{٦} + \text{ب}^{٦})$ يستكمل التحليل ويكون الناتج = $(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})$

$(أ^٢+ب^٢)(أ^٢+أب+ب^٢)(أ^٢-أب+ب^٢)$
$(أ^٤-أ^٢ب^٢+ب^٤)$ .

[٢٧] يتم أولاً استخراج العامل المشترك بأحدى الصور الآتية: $٢\,(س^٣-\frac{٢٧}{٨}ص^٣)$ ثم يستكمل التحليل.

أو $\frac{١}{٤}\,(٨س^٣-٢٧ص^٣)$ ثم يستكمل التحليل.

[٢٨] $٢\,(٠{,}٠٠٨\,س^٣+٢٧ص^٣)$ ثم يستكمل التحليل.

[٢٩] الحد الأوسط = $\sqrt{٢\times س^٢\times ١}=\sqrt{٢}\,س^٢$ .

∴ المقدار = $س^٤+٢س^٢+١-٩س^٢$

$=(س^٢+١)^٢-٩س^٢$ ويستكمل التحليل.

[٣٤] الحد الأوسط = $\sqrt{٢\times ٢س^٢\times ٣ص^٢}$

المقدار $=٤س^٤+١٢س^٢ص^٢+٩ص^٤-١٢س^٢ص^٢$

$=(٢س^٢+٣ص^٢)^٢-١٢س^٢ص^٢$

$=(٢س^٢+٣ص^٢-٢\sqrt{٣}\,س\,ص)$

$(٢س^٢+٣ص^٢+٢\sqrt{٣}\,س\,ص)$ .

[٣٨] يكتب المقدار بالصورة :

$ل^٢+(-م^٢+٢م\,ن-ن^٢)=ل^٢-(م^٢-٢م\,ن+ن^٢)$

$=ل^٢-(م-ن)^٢$ ويستكمل التحليل .

[٤٠] نضع المقدار بالصورة الآتية :

$(ل^٣-٢٧م^٣)+(ل^٢-٦ل\,م+٩م^٢)$

$=(ل-٣م)(ل^٢+٣ل\,م+٩م^٢)+(ل-٣م)^٢$

ويستكمل التحليل .

[٤٣] $\frac{أ-٢ب}{٢أب\,(٢أ+ب)}$ .

[٤٥] $\frac{١}{(س-١)(س-٢)(س-٣)}$ .

[٤٧] ابدأ بما داخل القوس والناتج = $\frac{٣}{س-١}$

[٤٩] $-١$ . [٥١] $\frac{٣س-٢}{(س-٣)(س+٤)}$ .

[٥٣] طول الغرفة = $(س+٩)$ م .

[٥٦] طول الغرفة يكون $(س+٣)$ م .

## ٢ : ١٠ اختبار الوحدة

**عدد الحصص** : حصتان .

### الهدف

يهدف هذا الدرس إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : يعطى الاختبار الذي في الدليل والذي يغطى اهداف الوحدة حسب الجدول التالي :

| رقم السؤال | الفقرة | رقم الهدف |
|---|---|---|
| ١ | أ | ٩ |
| | ب | ٢ ، ٣ |
| ٢ | أ | ١ |
| | ب | ١ |
| | جـ | ٥ |
| | ء | ٦ |
| ٣ | | ٤ |
| ٤ | أ | ٧ ، ٩ |
| | ب | ٧ ، ٨ |

بالامكان إعطاء الطلبة اختباراً مشابهاً للذي في الدليل شريطه تغطية أهداف الوحدة . يصحح الاختبار ويتم تحديد أخطاء الطلبة والتعرف على الأهداف التي لم تتحقق .

الحصة الثانية : تعالج الاخطاء وتذلل الصعوبات .

## الاختبـــار :

[ ١ ] أ) أوجد العامل المشترك الأكبر ، والمضاعف المشترك الأصغر للآتي :

٥ م$^{٣}$ ، ١٥ م$^{٢}$ ل ، ٢٠ م$^{٣}$ ل$^{٢}$ .

ب ) أكمل الفراغ بحيث يكون المقدار مربعاً كاملاً :

س$^{٢}$ − ٦ س + . . .

[ ٢ ] حلل ما يأتي :

أ ) أ$^{٢}$ + ٣ أ − ١٨

ب ) ٣ ص$^{٢}$ − ٢٤ ص + ٤٨

جـ) $\frac{\text{ل}^{٣}}{٨}$ + ٦٤ م$^{٣}$ .

ء ) س ص − ٣ س ع + ٣ ص م − ٩ ع م .

[ ٣ ] حلل بإكمال المربع المقدار : س$^{٢}$ + ٢ س − ٨

[ ٤ ] اختصر ما يأتي إلى أبسط صورة :

أ ) $\frac{٢}{\text{س}^{٢} - \text{س ص}} + \frac{٢}{\text{ص}^{٢} - \text{س ص}} + \frac{٤}{\text{س ص}}$ .

ب ) $\left(\frac{١}{\text{س}^{٢}} - \frac{١}{\text{ص}^{٢}}\right) \div \left[\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{س ص}} \times \left(\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{ص}}\right)\right]$ .

# الوحدة الثالثة

# المعـــادلات

## جدول توزيع الحصص

| البند | الموضـــوع | عدد الحصص |
|---|---|---|
| ٣ – ١ | معادلة الدرجة الأولى | ٣ |
| ٣ – ٢ | نظام المعادلات من الدرجة الأولى ذات متغيرين | ٦ |
| ٣ – ٣ | معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد | ٣ |
| ٣ – ٤ | مسائل تطبيقية | ٣ |
| ٣ – ٥ | تمارين ومسائل عامة | ٢ |
| ٣ – ٦ | اختبار الوحدة | ٢ |
| | المجمـــوع | ١٩ |

## أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يعبر عن مجموعة الحل لمعادلة من الدرجة الأولى ذات متغيرين .

٢ – يمثل معادلة الدرجة الأولى ذات متغيرين بيانياً .

٣ – يحل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى ذات متغيرين جبرياً ( بالحذف والتعويض والمقابلة ) .

٤ – يحل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً .

٥ – يحل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بالتحليل والقانون العام .

٦ – يحل مسائل تطبيقية على المعادلات .

## المقدمـــة

لقد قام المصريون القدماء بحل معادلات الدرجة الأولى منذ أكثر من أربعة آلاف سنة ، أي أنهم وجدوا للمعادلة $ا س + ب = ٠$ الحل $س = - \frac{ب}{ا}$ ، وتمثل هذه المعادلة هندسياً خط مستقيم .

أما معادلة الدرجة الثانية التي على الصورة $ا س^٢ + ب س + جـ = ٠$ فقد قسمها الخوازمي إلى خمسة أقسام بقصد إيجاد الحلول لها ، وقد أشرنا إلى أنواع المعادلات ودور العلماء العرب والمسلمين في حلها في دليل الصف الثامن .

ومن علماء الرياضيات الذين طوروا أعمال الخوازمي العالم شجاع أسلم الشهير بأبي كامل « ٨٥٠ – ٩٣٠م » الذي كان لأعماله أثرها الكبير على الكرخي ويقول سميت عن أبي كامل « لم يظهر كاتب معاصر لابي كامل أكثر ذكاءً منه في حل المعادلات وتطبيقها على مسائل الهندسة » .

كما حاول العلماء المسلمون حل معادلات الدرجة الثالثة مثل ثابت بن قرة الذي حل بعض الحالات الخاصة بتضعيف المكعب حلاً هندسياً .

والحسن بن الهيثم « ٩٦٥ – ١٠٣٩م » حل معادلات الدرجة الثالثة ، وأعطى أبو الوفاء حلولاً هندسية لبعض معادلات الدرجتين الثالثة والرابعة .

أما الكرخي المولود في مدينة كرخ في العراق فقد ظهر في بداية القرن الخامس الهجري ، وكان من أعظم الرياضيين الذين كان لهم أثر حقيقي في تقدم العلوم الرياضية ، وقد استطاع حل المعادلات عن طريق تحويلها إلى الصورة $ا س^٢ + ب س + جـ = ٠$ بالقانون العام المعروف حالياً ، وقد وجد ذلك بالصيغة

$$س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ ا جـ}}{٢ ا} .$$

كما وضع الرياضيون العرب والمسلمون طرقاً لحل المعادلات البسيطة والتربيعية والتكعيبية ولم يهتموا بالجذر السالب لمعادلة الدرجة الثانية ، وقد استمر العرب والمسلمون في تطوير الرياضيات حتى أواخر القرن السابع عشر الميلادي .

ومن العلماء الأوربيين الذين درسوا الكتب العربية في الرياضيات العالم الرياضي الفرنسي فيثا « ١٥٤٠ – ١٦٠٣ » الذي كان من أهم إنجازاته تحسين نظرية المعادلات ، وهو الذي أوجد قانون مجموع الجذرين وحاصل ضربهما للمعادلة التربيعية .

كما يعد القرن السابع عشر الميلادي من أخصب الفترات الحديثة في نمو علم الجبر ووضع الأسس لتطوراته الحديثة من خلال الدراسة النظرية العامة للمعادلات التي أثبتها العالم الألماني جاوس في بداية القرن التاسع عشر .

وهذه الوحدة تتضمن ستة بنود خصص لها ١٩ حصة تناول البند الأول حل معادلات الدرجة الأولى ذات متغيرين جبرياً وبيانياً ، أما البند الثاني فيتعلق بحل معادلتين من الدرجة الأولى ذات متغيرين جبرياً وبيانياً .

وقد تناول البند الثالث حل معادلة الدرجة الثانية ذات متغير واحد بالتحليل والقانون العام ، وتناول البند الرابع مسائل تطبيقية ، والبند الخامس تمارين ومسائل عامة ، وانتهت هذه الوحدة باختبار الوحدة .

**المفاهيم الاساسية :**

التمثيل البياني لحل المعادلات ، ونوعية الحل والقانون العام ، والمميز = $\Delta$ = ب$^{٢}$ – ٤ أ جـ ، وعند التدريس يؤكد على الآتي :

– إذا كانت المعادلة تحوى كسراً ، ووجد أن أصفار المقام يمثل أحد حلول معادلة الدرجة الثانية ذات متغير واحد يُستبعد هذا الحل لأنه عند التعويض ستجد أن المقام يساوى صفراً .

## ٣ : ١ معادلة الدرجة الأولى ذات متغيرين

**عدد الحصص :** ثلاث حصص .

### الأهـــداف

– يميز معادلة الدرجة الأولى ذات متغيرين .

– يعبرّ عن مجموعة الحل لمعادلة الدرجة الأولى ذات متغيرين .

– يمثل بيانياً مجموعة حل معادلة الدرجة الأولى ذات متغيرين

### المحتوى

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الأولى ذات متغيرين هي : أ س + ب ص = جـ حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، أ © ٠ ، ب© ٠ .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : حل معادلة الدرجة الأولى ذات متغيرين.

الحصة الثانية : يحل المعادلة بيانياً .

الحصة الثالثة : تمارين ومسائل .

وعند تنفيذ الدرس يراعي المدرس ما يلي :

– يمهد للدرس بعرض بعض المعادلات مثل :

٣ س = ٥ ، ٣ س + ١ = ٥ – س ، س$^{٢}$ = ٤ .

٢س + ٣ ص = ٥ ، س – ٥ص + ٣ = ٠ ،

٣ س + ص$^{٢}$ = ١ .

– يناقش المدرس هذه المعادلات حتى يستنتج الصورة العامة لمعادلة الدرجة الأولى ذات متغيرين .

أ س + ب ص = جـ حيث أ ، ب ، جـ ∋ ح ، أ © ٠ ، ب© ٠ .

– يوضح أن حل معادلة الدرجة الأولى ذات متغيرين هو عبارة عن أزواج مرتبة من الشكل ( س ، ص ).

– يعطى معادلة وبعض الأزواج المرتبة مثل : س + ص = ٣

( ٢ ، ١ ) ، ( ٥ ، –٢ ) ، ( ٣ ، ٢ ) ، ( –١ ، ٤ ) ، ( ٠ ، ٣ ) ، ويبحث عن الأزواج التي تمثل حلاً للمعادلة ، وذلك بالتعويض عن كل زوج . فمثلاً بالنسبة للزوج ( ٢ ، ١ ) .

الطرف الايمن : س +ص = ٢ + ١ = ٣ = الطرف الايسر ، وبالمثل بالنسبة للأزواج الأخرى حتى يجد أن الأزواج المحققة للمعادلة هي ( ٢ ، ١ ) ، ( ٥ ، –٢ ) ، ( –١ ، ٤ ) ، ( ٠ ، ٣ ) ، ثم يطرح على الطلبة السؤال هل هناك أزواج أخرى تحقق المعادلة ؟ اذكر بعضها .

– يوضح أنه عند فرض قيمة عددية لأحد المتغيرين نحصل على قيمة مناظرة للمتغير الآخر ، ثم يستنتج أن مجموعة حل المعادلة هو عبارة عن عدد لانهائي من الأزواج المرتبة ولكن عند الحل يكتفى ببعض منها .

– يناقش حل الأمثلة ومن خلالها يتم التأكيد على التالي :

* كتابة المعادلة بدلالة أحد المتغيرين وجعل معامله الأخر الواحد الصحيح .
* اختيار قيم بسيطة سهلة التعويض بها لإيجاد قيمة المتغير الاخر .
* تكوين جدول القيم .
* تمثيل الحلول في المستوى الإحداثي ، كل حل يمثل بنقطة في هذا المستوى، ثم يصل بين النقاط .
* التحقق من صحة الرسم وذلك بزوج مرتب يمثل حلاً للمعادلة نجد أنه يقع على المستقيم المرسوم .

– إشراك الطلبة في حل التمارين والمسائل .

– تكليف الطلبة بحل تمارين ومسائل كتدريبات صفية .

– تكليف الطلبة بحل تمارين ومسائل كواجب منزلي وفقاً لما ينجز في كل حصة .

## ارشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[١] أ ، ى ، هـ .

[٢] جـ) س = $\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٤}$ ، ص = $\frac{٢ - ٤س}{٣}$

و) بعد فك الأقواس : س = $\frac{٣ص - ٥}{٢}$ ،

ص = $\frac{٢س + ٥}{٢}$ .

[٤] عند ص = −٤ نجد أن س = $\frac{-٤}{٣}$

∴ الزوج المرتب هو ( $\frac{-٤}{٣}$ ، −٤ ) ،

وبالمثل عند ص = $\frac{١}{٢}$ نجد الزوج هو ( $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ )

[٥] اكتب المعادلة بدلالة أحد المتغيرين ولتكن س = ٤ − $\frac{٢}{٣}$ ص ، افرض قيما بسيطة للمتغير ص مثل { ٠ ، ٣ ، −٣ } ، ثم عوض في المعادلة لتحصل على قيم س المناظرة ، مثل كل زوج مرتب بنقطة في المستوى ، وصل بين النقاط لتحصل على مستقيم يمثل مجموعة حل المعادلة .

### التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال متابعة أداء الطلبة عند حل الأعمال الصفية والواجبات المنزلية ، ومشاركتهم في المناقشات ، ثم يطرح السؤال التالي كخطوة تقويم نهاية الحصة الثالثة .

أوجد ثلاثة أزواج تمثل حل للمعادلة :

س + ٣ ص = ٥ .

## ٣ : ٢ نظام المعادلات من الدرجة الأولى ذات متغيرين

**عدد الحصص :** ست حصص .

### الأهداف

– يتعرف نظام معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى ذات متغيرين .

– يحل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى ذات متغيرين جبرياً « بالمقابلة ، والتعويض ، والحذف » .

– يحل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى ذات متغيرين بيانياً .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في ست حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : حل المعادلتين بطريقة المقابلة .

الحصة الثانية : حل المعادلتين بطريقة التعويض

الحصة الثالثة : حل المعادلتين بطريقة الحذف .

الحصة الرابعة : حل المعادلتين بيانياً .

الحصة الخامسة والسادسة : تمارين ومسائل .

وعند تنفيذ هذا الدرس يراعي ما يلي :

– يبين النظام الخطي لمعادلتين من الدرجة الأولى ذات متغيرين على أنه مجموعة المعادلتين اللتين يرمز المتغيران فيهما إلى الشيئين نفسيهما في آن واحد ، ويوضح ذلك بعدة أمثلة .

– يمهد للدرس بإيجاد ثلاثة حلول لكل من المعادلتين : ٢ س + ص = ٦ ، ص + س = ٥ ، ويناقش حلول كل معادلة على حده ، ثم يسأل الطلبة عن وجود حل متساوٍ لكل من المعادلتين ؟ إذا كانت الاجابة بالنفي . يعطى الزوج المرتب ( ١ ، ٤ ) ويطلب منهم التحقق في كلا المعادلتين ، ثم يستنتج أن الزوج

المرتب الذي يحقق كلاً من المعادلتين هو حل المعادلتين معاً .

– يناقش حل المعادلتين السابقتين بطريقة المقابلة كما يلي :

* كتابة كلٍّ من المعادلتين بدلالة أحد المتغيرين وليكن كما يلي :

ص = ٦ – ٢ س ——— ( ١ )

ص = ٥ – س ——— ( ٢ )

* ∵ الطرف الأيمن في كلٍّ من المعادلتين يتساوى .

∴ الطرف الأيسر في كلا المعادلتين يجب أن يتساوى أي أن :

٦ – ٢ س = ٥ – س

∵ – ٢ س + س = ٥ – ٦

∴ س = ١

* يعوّض عن قيمة س في إحدى المعادلتين ولتكن ( ١ )

∴ ص = ٦ – ٢ × ١ = ٦ – ٢ = ٤

∴ مجموعة الحل هي { ( ١ ، ٤ ) } .

* للتأكد من صحة الحل يتم التحقق في كلا المعادلتين .

– يناقش مثالاً آخر بطريقة التعويض أو المثال السابق كما يلي :

* يكتب إحدى المعادلتين بدلالة أحد المتغيرين، ويسميها بالمعادلة ( ٣ ) .

أي أن : ص = ٦ – ٢ س —— ( ٣ )

* يعوّض عن المتغير ص بقيمته في المعادلة الأخرى ( ٢ ) أي أن : ٦ – ٢ س + س = ٥

∴ س = ١

* بالتعويض عن قيمة س = ١ في المعادلة ( ٣ ) ستجد أن ص = ٤ .

∴ مجموعة الحل = { ( ١ ، ٤ ) } .

– يناقش حل مثال ثالث بطريقة الحذف ومن خلاله يتم التأكيد على الآتي :

* البحث عن تساوي معامل أحد المتغيرين في كلا المعادلتين وذلك للتخلص منه بالعملية المناسبة « الجمع أو الطرح » أما إذا كان المعامل غير متساوٍ لكل من المتغيرين في المعادلتين مثل :

٢ س + ٣ ص = ٧ ——— ( ١ )

٣ س – ٥ ص = ١ ——— ( ٢ )

* إذا أردنا أن نحذف المتغير ص نضرب المعادلة ( ١ ) في ( ٥ ) والمعادلة ( ٢ ) في ( ٣ ) ، ثم نجمع المعادلتين.

* إذا أردنا أن نحذف المتغير س نضرب المعادلة ( ١ ) في ( ٣ ) والمعادلة ( ٢ ) في ( ٢ ) ، ثم نطرح إحدى المعادلتين من الأخرى .

* بعد حذف أحد المتغيرين نحصل على معادلة في متغير واحد ، نوجد قيمة هذا المتغير .

* نعوض عن قيمة المتغير المعلوم في إحدى المعادلتين فنحصل على قيمة المتغير الآخر والزوج المرتب الذي سنحصل عليه هو الذي يمثل حل المعادلتين.

* يتم التحقق من صحة الحل .

– يكلف الطلبة بحل تمرين كتدريب صفي على النحو الآتي :

* يقسم الطلبة إلى ثلاث مجموعات : المجموعة الأولى تحل بالتعويض والثانية بالمقابلة والثالثة بالحذف،ثم يوضح أن مجموعة الحل هي نفسها.

– يناقش امثلة لحل المعادلتين بيانياً كما يلي :

* إيجاد جدول القيم لكل معادلة على حده .

* التمثيل البياني لمجموعة حل كل معادلة على حده في المستوى الاحداثي ومن خلال عدة أمثلة يوضح الآتي :

١ – إذا كان المستقيمان متقاطعين بنقطة فإن هذه النقطة تمثل مجموعة الحل وهذه النقطة تحقق كلاً من المعادلتين .

٢ – إذا كان المستقيمان متوازيين « لاتوجد نقطة مشتركة » فإن مجموعة الحل مجموعة خالية $\phi$.
٣ – إذا كان المستقيمان منطبقين « فإن مجموعة الحل تتكون من عدد لانهائي من الحلول » وكل نقطة من المستقيم تحقق المعادلتين معاً .

– يكلّف الطلبة بحل تمارين ومسائل كتدريبات صفية ومن خلال ذلك يتم معالجة أخطاء الطلبة .
– يكلّف الطلبة بحل تمارين ومسائل كواجب منزلي نهاية كل حصة وفقاً لما ينجز في الحصة ويتابع بعض دفاتر الطلبة ويعالج الأخطاء إن وجدت .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

أولاً : [ ٢ ] مجموعة الحل = {( ٢ ، –٣ )}.
[ ٣ ] مجموعة الحل = {( ٥ ، –١ )}.

ثانياً : [ ٢ ] ١٥ س – ص = ٤ ، ٣ ص – ٥س = ٠

مجموعة الحل = {( $\frac{٣}{١٠}$ ، $\frac{١}{٢}$ )}.

[ ٤ ] مجموعة الحل = {( $\frac{٢٤}{٥}$ ، $\frac{-١٢}{٥}$ )}.

ثالثاً : [ ٢ ] ( ٢ ، ٣ )
[ ٣ ] ( ١ ، ١ )
[ ٦ ] $\phi$ المستقيمان متوازيان .
[ ٧ ] عدد لانهائي من الحلول« المستقيمان منطبقان ».

رابعاً : [ ٢ ] ( $\frac{١٣}{٤}$ ، $\frac{٥}{٤}$ )
[ ٣ ] ( –٢ ، ١ )

## التقــويم

يتم التقويم البنائي من خلال مناقشة الطلبة ومتابعة حلهم للتدريبات الصفية والواجبات المنزلية ، وفي نهاية الحصة السادسة يُعطى سؤال كالتالي كخطوة تقويم :
حل المعادلتين الآنيتين بيانياً ، وحقق الناتج جبرياً :
س + ص = ٧ ، ٢ س – ص = ٥ .

# ٣ : ٣ حـل معـادلات الدرجـة الثانيـة في متغير واحد

## أولاً : بالتحليل

**عدد الحصص** : حصتان .

### الأهـــداف

– يتعرف على معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد .
– يحل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين على النحو التالي :
الحصة الأولى : حل المعادلات بالتحليل .
الحصة الثانية : تمارين ومسائل .
وعند تنفيذ الدرس يراعى الآتي :
– يمهد للدرس بعرض المعالادت الآتية :
٥ ع$^{٢}$ – ٢٠ = ٠ ، س$^{٢}$ – ٧ س = ٠ ،
٣ ص$^{٢}$ – ٢ ص + ٥ = ٠ ، ويناقشها مع الطلبة من حيث المتغير والدرجة حتى يتم الوصول إلي أن كل معادلة من هذه المعالادت تسمى معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد .
– يوضح بأن كل معادلة من الدرجة الثانية تسمى أيضاً معادلة تربيعية .
– يناقش حل المعادلات السابقة كامثلة ، ومن خلالها يوضح الآتي :
* يجعل المعادلة تساوى الصفر .
* يحلل الطرف الأيمن إلي حاصل ضرب مقادير .
* يؤكد على أن حاصل ضرب مقدارين يساوى صفراً . أما المقدار الأول يساوى صفراً أو المقدار الثاني يساوى صفراً .
* يؤكد على أن لمعادلة الدرجة الثانية ذات متغير واحد حلان .

– يناقش حل المثال الرابع لحل المعادلة بإكمال المربع.
– يكلف الطلبة بحل بعض التمارين كتدريبات صفية.
– يكلف الطلبة بحل تمارين ومسائل كواجبات منزلية.

## ارشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[٢] ٥ص$^{٢}$ – ٢٠ ص = ٠

٥ ص ( ص – ٤ ) = ٠

∴ مجموعة الحل = { ٠ ، ٤ }.

[٥] تجمع الحدود المتشابهة وتصبح المعادلة.

٧ س$^{٢}$ + ١٦ س – ١٥ = ٠

( ٧ س – ٥ ) ( س + ٣ ) = ٠

∴ مجموعة الحل = { –٣ ، $\frac{٥}{٧}$ }.

[٦] تتم عملية الضرب في الطرف الأيمن، وتتم عملية تجميع للحدود المتشابهة حتى تصبح المعادلة:

٣ س$^{٢}$ – ١١ س – ٤ = ٠ .

∴ مجموعة الحل = { – $\frac{١}{٣}$ ، ٤ }.

[٧] ص$^{٢}$ – ص = ١

ص$^{٢}$ – ص + ( $\frac{١}{٢}$ )$^{٢}$ = ١ + ( $\frac{١}{٢}$ )$^{٢}$

( ص – $\frac{١}{٢}$ )$^{٢}$ = $\frac{٥}{٤}$

مجموعة الحل = { –٠,٦٢ ، ١,٦٢ }.

[١١] مجموعة الحل = { – $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$ }.

[١٢] مجموع الحل = { –٢,٧٣ ، ,٧٣ }.

## ثانياً: بالقانون العام

**عدد الحصص** : حصتان .

### الأهـــداف

– يستنتج على القانون العام .
– يحل معادلة الدرجة الثانية بالقانون العام .

### المحتوى

يسمى القانون التالي بالقانون العام لحل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد :

$$س = \frac{- ب \mp \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ} .$$

حيث أ معامل س$^{٢}$ ،ب معامل س، جـالحد المطلق.
– يسمى المقدار ( ب$^{٢}$ – ٤ أ جـ) بالمميز ويرمز لها بالرمز $\Delta$ .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين على النحو التالي :
الحصة الأولى : حل المعادلة بالقانون العام .
الحصة الثانية : تمارين ومسائل .
وعند التنفيذ يراعى الآتي :
– يمهد للدرس بحل المعادلة س$^{٢}$ – ٤ س – ٥ = ٠ بالتحليل .
– يعرض للطلبة القانون العام موضحاً فيه أن : أ معامل س$^{٢}$ ، ب معامل س ، جـ الحد المطلق.
– يحل المعادلة السابقة بالقانون العام ، وينبه الطلبة بأن الحل هو نفسه .
– يناقش مع الطلبة استنتاج القانون العام كما هو موضح في الكتاب ويعطي فرصه كافية ليفهم الطلبة كل خطوة لإيجاد القانون .
– يناقش حل مثال آخر لايمكن تحليله مثل : ص$^{٢}$ + ٥ ص + ٣ = ٠ .

– يوضح أن الحل بالقانون العام يتم لحل معادلة الدرجة الثانية ذات متغير واحد . سواء كانت تحل بالتحليل أو لاتحل بالتحليل .

– يناقش أمثلة متنوعة من خلالها يبين الحالات الثلاث للمميز $\Delta$ .

※ إذا كان $\Delta > ٠$ للمعادلة حلان حقيقيان غير متساويين .

※ إذا كان $\Delta = ٠$ للمعادلة حلان حقيقيان متساويان .

※ إذا كان $\Delta < ٠$ للمعادلة حلان غير حقيقين، أي لايوجد لها حل في ح .

– يكلف الطلبة بحل تمارين ومسائل كتدريبات صفية .

– يكلف الطلبة بحل تمارين ومسائل كواجب منزلي وتتم المتابعة له ومن خلال ذلك تعالج الصعوبات لدى الطلبة .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[٤] مجموعة الحل = { −٢,١٨٥ ، ٠,٦٨٥ } .

[٧] مجموعة الحل = { −١,١٦٧ ، −٠,٢ } .

[١٠] مجموعة الحل = { −٣,١٥ ، ٠,١٥ } .

[١١] مجموعة الحل = { $\frac{١}{٢}$ ، ٣ } .

[١٢] مجموعة الحل = { ٠,٦ ، ٧,٤ } .

[١٣] مجموعة الحل = { −١ ، $\frac{٥}{٤}$ } .

## التقـويم

التقويم البنائي يتم من خلال متابعة حل التدريبات الصفية والواجبات المنزلية وفي نهاية الحصة الثانية يطرح المدرس السؤال الآتي كخطوة تقويم .

حل المعادلة : $س^{٢} - س - ٦ = ٠$ بالقانون العام .

# ٣ : ٤ مسـائـل تـطـبـيـقـيـة

**عدد الحصص :** ثلاث حصص .

## الأهـداف

– يحول المسألة التطبيقية إلى معادلة أو معادلات يتم حلها .

– يتحقق من صحة الحل والفرضيات .

## تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في ثلاث حصص ، وعند التنفيذ يُراعى الآتي :

– يُمهد للدرس بمناقشة حل المعادلات الآتية :

$س + ص = ١٣$ ، $س - ص = ٥$ ،

$س^{٢} - ٣ س + ٢ = ٠$ ، ومن خلال ذلك يؤكد على ما يلي :

※ حل معادلة واحدة من الدرجة الأولى في متغيرين هو عبارة عن أزواج مرتبة من الشكل ( س ، ص ) .

※ عند حل نظام معادلات من الدرجة الأولى ذات متغير فمن الضروري أن يكون عدد المعادلات يساوى المتغيرات ، ثم يوضح نوع الحل .

– يناقش حل المثال الأول ومن خلاله يوضح الآتي :

※ كيفية تكوين المعادلة بناءً على المعطيات في المسألة التطبيقية .

※ حل المعادلة أو المعادلات والتحقق من صحة الحل .

– يناقش بعض التمارين والمسائل كأمثلة من خلالها يؤكد على ما يلي :

※ القراءة الجيدة للمسألة التطبيقية .

※ الفرضيات للمعطيات وتمثيل العلاقات بين المتغير أو المتغيرات .

※ تكوين المعادلة أو المعادلات التي تتحدث عنها المسألة وحلها بالطرق المناسبة .

※ التحقق من صحة الفرضيات والحل .

– يكلف الطلبة بحل مسائل كتدريبات صفية ومتابعتها ومساعدة من يحتاج إلى مساعدة أو توجيه عند الحل .

– يكلف الطلبة بحل بعض المسائل كواجب منزلي وتتم متابعتها ومعالجة الأخطاء والصعوبات في الحصة التالية .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ٣ ] نفرض أن طول القطعة الأولى = س

∴ طول القطعة الثانية = س – ١٨

س = ٣ ( س – ١٨ )

∴ طول القطعة الأولى = ٢٨ متراً ، طول القطعة الثانية = ١٠ أمتار .

[ ٥ ] العدد ٥٨ .

[ ٧ ] العدد $\frac{٤}{٣}$ أو $\frac{٣}{٤}$ .

[ ٩ ] نعوض عن س = ٣ بالمعادلة ، ثم نوجد قيمة ب = –١ ، ونعوض عن قيمة ب بالمعادلة ،ثم نحل المعادلة ويكون الحل الآخر = $\frac{-٥}{٢}$ .

[ ١١ ] عدد الأغنام = ٣٠ ، عدد الدجاج = ١٥ .

[ ١٢ ] عُمر الأبن = ١٢ سنة ، عُمر الأب = ٣٦ سنة .

[ ١٣ ] العددان ٧ ، ٩ .

## التقــويم

يتم التقويم البنائي من خلال متابعة حل التدريبات الصفية والواجبات المنزلية ، وفي نهاية الحصة الثالثة يعطى السؤال الآتي كخطوة تقويم :

مستطيل مساحته ٥٠ متراً مربعاً فإذا كان طوله ضعف عرضه . فما بُعديه ؟

# ٣ : ٥ تمارين ومسائل عامة

**عدد الحصص** : حصتان .

## الهـــدف

تثبيت المفاهيم وتطوير المهارات التي وردت في هذه الوحدة .

## تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين ويُراعى ما يأتي :

– مراجعة حلول المعادلات التالية جبرياً وبيانياً .

※ معادلة الدرجة الأولى ذات متغير واحد .

※ معادلات الدرجة الأولى ذات متغيرين موضحاً نوع الحل .

※ معادلة الدرجة الثانية ذات متغير واحد .

– التخطيط الجيد في اختيار التمارين والمسائل المناسبة لمستويات الطلبة وتشمل جميع دروس الوحدة .

– يناقش حل بعض التمارين على المعادلات بمشاركة الطلبة ، ومن خلالها يوضح الحل الجبري والحل البياني .

– توفير جو التنافس والتحفيز والتعاون بين الطلبة في حل التمارين والمسائل وذلك عن طريق التعلم التعاوني بتقسيمهم إلى مجموعات .

– يكلف الطلبة بحل بعض التمارين والمسائل كتدريبات صفية وكواجبات منزلية ومن خلال متابعتها يساعد من يحتاج إلى مساعدة لتذليل الصعوبات التي يواجهها .

– يكلف الطلبة بحل الاختبار الذي في الكتاب كواجب منزلي استعداداً لاختبار الوحدة في الحصة التالية .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ٧ ] نعوض عن الزوج ( –١ ، ل ) في المعادلة وبحل

المعادلة نجد أن ل =∠ ١

[١٠] السطر الأخير في الجدول (٣ ، ١) ، (٤ ، ١)
يصحح إلى (٣ ، ١) ، (٠ ، −١) .

[١٣] مجموعة الحل = {٧ ، ٤}.

[١٦] مجموعة الحل = {−٢ ، ٣}.

[١٧] مجموعة الحل = {$\frac{-٢٩}{٦}$ ، $\frac{٩١}{٦}$}.

[٢٠] ليس لها حل في ح لأن $\Delta < ٠$ .

[٢٤] س = $\frac{٢٥ \angle \sqrt{١٧٧}}{٤}$

[٢٦] مجموعة الحل = {−١ ، $\frac{٥}{٢}$}.

[٢٨] ليس لها حل في ح لأن $\Delta < ٠$ .

[٢٩] مجموعة الحل = {$\frac{-٥}{٧}$} العدد « ١ » لايمثل حلاً للمعادلة لانه يجعل المقام يساوى صفراً .

[٣٥] عُمر عماد = ٣٠ سنة ، عمر عبدالله = ١٨ سنة

[٣٨] عدد الطلبة ٣٠ طالباً .

[٣٩] عدد الآليات = ١٢ ، عدد المجنزرات = ٦ .

### التقــويم

يتم التقويم من خلال أداء الطلبة في حل التدريبات الصفية والمشاركة ، كما يعتبر هذا الدرس تقويماً للوحدة .

## ٦:٣ اختبــار الوحــدة

**عدد الحصص** : حصتان .

### الهــدف

قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين على النحو التالي :
الحصة الأولى : يعطى الاختبار الذي في الدليل والذي يغطى اهداف الوحدة حسب الجدول التالي :

| رقم السؤال | رقم الهــدف |
|---|---|
| ١ | ٢ ، ٤ |
| ٢ | ٣ |
| ٣ | ١ ، ٤ |
| ٤ | ٥ |
| ٥ | ٦ |

ويمكن أن يعطي المدرس اختباراً مشابهاً يقوم بإعداده بنفسه شريطة أن يغطي أهداف الوحدة .
وبعد تصحيح الاختبار ورصد أخطاء الطلبة يقوم المدرس في الحصة التالية بمناقشة هذه الإخطاء وتعريف الطلبة بها وكيفية تجنبها .

## الاختبــار :

[ ١ ] أكمل الفراغ فيما يأتي بما يجعل العبارة صحيحة .

عند حل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى ذات متغيرين بيانياً فإنه إذا كان :

١ – المستقيمان متوازيين مجموعة الحل ......

٢ – المستقيمان متقاطعين مجموعة الحل ......

٣ – المستقيمان منطبقين مجموعة الحل ......

[ ٢ ] حل المعادلتين الآنيتين جبرياً وتحقق من صحة الحل :

س + ٢ص = ٧ ، ٢ س = ٣ص .

[ ٣ ] حل المعادلتين الآنيتين بيانياً وتحقق من صحة الحل :

س – ص = ٣ ، ٢ س = ٣ – ص

[ ٤ ] حــل المعــادلــة : س – ٤ = $\frac{٢}{س}$ علمــاً بـأن $\sqrt{٦} \simeq ٢,٤٤$ .

[ ٥ ] مربع عدد صحيح موجب يزيد عن خمسة أمثالة بمقدار ١٤ . فما هو هذا العدد ؟

الوحدة الرابعة

# حساب المثلثات

## جدول توزيع الحصص

| البند | الموضوع | عدد الحصص |
|---|---|---|
| ٤ – ١ | العلاقات العددية في مثلث قائم الزاوية | ٥ |
| ٤ – ٢ | النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة | ٦ |
| ٤ – ٣ | النسب المثلثة الأساسية للزوايا الخاصة ( ٣٠ْ ، ٦٠ْ ، ٤٥ْ ) | ٢ |
| ٤ – ٤ | تمارين عامة ومسائل | ٢ |
| ٤ – ٥ | اختبار الوحدة | ٢ |
| | المجموع | ١٧ |

## أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يبرهن أن مربع ضلع قائم في مثلث يساوي حاصل ضرب الوتر في مسقط هذا الضلع على الوتر.

٢ – يستنتج أن مربع الارتفاع في مثلث قائم يساوي حاصل ضرب جزئي الوتر المحددين بهذا الارتفاع.

٣ – يبرهن مبرهنة فيثاغورث ، ويستنتج عكسها .

٤ – يتعرف على النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة .

٥ – يوجد النسب المثلثية الأساسية لزاوية حادة إذا علمت إحدى هذه النسب .

٦ – يستنتج النسب المثلثية الأساسية للزوايا الخاصة ( ٣٠ْ ، ٦٠ْ ، ٤٥ْ ) .

**لمحـــة تاريخيـــة :**

هناك اتفاق إجماعي في إنساب الاكتشاف المستقل لـ( مبرهنة فيثاغورث ) إلى العالم الرياضي الأغريقي « فيثاغورث » الذي تذكر بعض المصادر التاريخية أنه ولد في حوالي ( ٤٧٢ ق.م ) ، وقد لعبت هذه المبرهنة دوراً تاريخياً أساسياً في تطور الرياضيات ، وتفيد بعض المصادر التاريخية أن قدماء المصريين قد استخدموا قبل فيثاغورث بألف سنة ، حالة خاصة من مبرهنته في سبيل إنشاء زوايا قائمة .

ويبدو أنهم لاحظوا أن كل مثلث تناسبت أضلاعه مع الأعداد ٣ ، ٤ ، ٥ هو مثلث قائم الزاوية ، وانطلاقاً من هذه الملاحظة استطاعوا إنشاء مثلثات قائمة الزاوية بالطريقة التالية : انطلاقاً من نقطة ا ، كانوا يمدون قصبتين من الخيزران ويأخذون عليها نقطتان ب ، جـ تبعدان عن ا بمقدار مضاعفات العددين ٣ ، ٤ من الوحدات الطولية ، ثم يثبتون اتجاه القصبتين بحيث يكون طول $\overline{\text{ب جـ}}$ مضاعفاً للعدد ٥ من نفس الوحدات الطولية ، وبالنسبة السابقة نفسها .

ويقال أن فيثاغورث قد تعلم ذلك على أيدي المصريين القدماء ، واستطاع أن يعمم النتيجة بإثبات أن « مساحة المربع المنشأ على الوتر في المثلث القائم تكافئ مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين » .

وقد لاحظ فيثاغورث أن أولى نتائج مبرهنته عدم وجود قياس مشترك بين طول قطر المربع وطول ضلعه : إذا كان طول ضلع المربع يساوى ١ فإن مربع طول قطره يساوى ٢ ، ولكن من غير الممكن قياس طول هذا القطر نفسه بالوحدة نفسها التي استخدمت لقياس طول الضلع ، أو بأجزائها .

ونعبر عن هذا في وقتنا الحاضر بالقول : أن طول قطر المربع هو $\sqrt{٢}$ ، إلاّ أنه من غير الممكن التعبير عن هذا الجذر بكسر عادي أو بكسر عشري ، أي أن $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبي . أما فيثاغورث فقد رفض أن يعتبر $\sqrt{٢}$ عدداً ، لأن الأعداد بالنسبة له تخضع لمفهوم القياس بوحدة .

وبعد فيثاغورث لاحظ الرياضيون وجود أعداد مثل $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ ، ... الخ ، تنطبق عليها الاعتبارات الواردة أعلاه ، وهكذا دخلت البشرية في طريق اكتشاف الأعداد الحقيقية .

وفي علم المثلثات يمكن القول أن الفضل يعود إلى العرب الذين جمعوا ما تشتت من كتب الاغريق ، وترجموا كل ما وصل اليهم ، ثم بدأو بالتعديل والابتكار ، وقد شجعهم على ذلك تقدمهم في علم الفلك وأحوال النجوم ، وقد زاد العرب على النسبتين ( جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية ) الظل ، وينسب ابتكار الظل إلى الرياضى العربي أبي الوفاء محمد البوزجاني ( ٩٤٠ – ٩٩٨م ) ، وقد ظهرت هذه النسب المثلثية وغيرها في مؤلفات العرب وانتقلت منهم إلى الأوربيين ، وينسب المنصفون من المؤرخين إلى العرب فصل المثلثات على علم الفلك. استخدم العرب الظل في إيجاد ارتفاع الهرم من خلال مثلثات قائمة وثبات النسب فيها ، وهي ما تسمى النسب المثلثية .

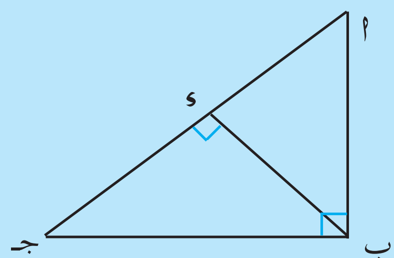
وتمر في حياتنا اليومية كثير من المسائل والتطبيقات كحساب المسافات بين الأمكنه وارتفاعات الأبراج

والعمارات والأعمدة ، ولتنمية قدرات الطلبة على حل مثل هذه المسائل والتطبيقات سنتاول في هذه الوحدة دراسة النسب المثلثية للزاوية الحادة .

**أقسام الوحدة :**

تتضمن هذه الوحدة خمسة بنود ، خصص لها ١٧ حصة ، يتناول البند الأول العلاقات العددية في مثلث قائم ، ويليها مباشرةً موضوع النسب المثلثية الأساسية ( جا ، جتا ، ظا ) للزاوية الحادة ، حيث يتعرف الطالب على هذه النسب ، ويوجدها إذا عُلمت إحداها ، يأتي هذا ضمن موضوعات البند الثاني ، أما في البند الثالث من الوحدة فيتعرف الطالب على النسب المثلثية الأساسية للزوايا الخاصة ( ٣٠ْ ، ٦٠ْ ، ٤٥ْ ) ويتضمن البند الرابع تمارين عامة ومسائل تهدف إلى تثبيت المفاهيم والتعميمات المتضمنة في الوحدة بصورة عامة . ونختتم هذه الوحدة بالبند الخامس الذي يتضمن اختباراً للوحدة .

**المفاهيم والمصطلحات الجديدة :**




١ ) على الشكل المجاور ، أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب .
- أء يسمى مسقط الضلع القائم على الوتر أ جـ .
- جـ ء ، ء أ يسميان جزئي الوتر المحددين بالارتفاع ب ء .

٢ ) مجموعة الأعداد مثل ( ٣ ، ٤ ، ٥ ) والتي يمكن أن تكون أضلاع مثلث قائم الزاوية تسمى الثلاثي الفيثاغورثي أو الأعداد الفيثاغورثية ، وهناك ثلاثيات كثيرة تنطبق عليها هذه الخاصية مثل : ( ٥ ، ١٢ ، ١٣ ) و ( ٩ ، ٤٠ ، ٤١ ) .

٣ ) – جيب الزاوية جـ ، يرمز له جا جـ .
- جيب تمام الزاوية جـ ، يرمز له جتا جـ .
- ظل الزاوية جـ ، يرمز له ظاجـ .

## ٤ : ١ العلاقات العددية في مثلث قائم الزاوية

**عدد الحصص :** خمس حصص .

### الأهــــداف

١ – يبرهن أن مربع ضلع قائم في مثلث يساوى حاصل ضرب الوتر في مسقط هذا الضلع على الوتر .
٢ – يستنتج أن مربع الارتفاع في مثلث قائم يساوى حاصل ضرب جزئي الوتر المحددين بهذا الارتفاع .
٣ – يبرهن مبرهنة فيثاغورث ويستنتج عكسها .
٤ – يميز المثلث القائم إذا علمت أطوال أضلاعه .

### المحتوى

– مربع ضلع قائم في مثلث يساوى حاصل ضرب الوتر في مسقط هذا الضلع على الوتر .
– مربع الارتفاع في مثلث قائم يساوي حاصل ضرب جزئي الوتر المحددين بهذا الارتفاع .
– في المثلث القائم ، مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين .
– في أي مثلث ، إذا كان مربع أحد الأضلاع يساوى مجموع مربعي الضلعين الآخرين فإن المثلث يكون قائم الزاوية .

### الوسائل

مسطرة ، منقلة ، فرجار ، طباشير ملون .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في خمس حصص على النحو التالي :
الحصص الثلاث الأولى : العلاقات العددية في مثلث قائم .
الحصتان الأخيرتان : تمارين ومسائل .
وعند تنفيذ الدرس يراعي المدرس ما يلي :

– التمهيد للدرس بمراجعة للمفاهيم الأساسية التي تعتبر متطلبات أساسية للدرس ، مثل التشابه ، العلاقات بين أطوال أضلاع مثلث ، مسقط ضلع قائم على الوتر ، جزئي الوتر المحددين بالارتفاع النازل من الرأس المقابل لهذا الوتر .
– إشراك الطلبة في برهان المبرهنات ، وذلك باستخدام أسلوب المناقشة في شرح الدرس . فمثلاً عند تناول مبرهنة ( ١ ) ، يطلب المعلم من أحد الطلبة ترجمة منطوق المبرهنة رمزياً ، ويطلب من الآخر تحديد المطلوب بأسلوب رمزي أيضاً ، ثم يسأل عن عدد المثلثات المتشابهة في الشكل ( ٢ ) من كتاب الطالب، سيتوصل مع الطلبة إلى أن الشكل ( ٢ ) يحتوي على ثلاثة مثلثات متشابهة هي ب ا جـ ، ب ء ا ، ا ء جـ ، ثم يطلب من أحد الطلبة تحديد زوج من المثلثات المتشابهة له علاقة بالمطلوب الأول وكذا تحديد التناسب الناتج من تشابه المثلثين والذي له علاقة أيضاً بالمطلوب، وهكذا يستمر في إدارة النقاش إلى أن يصل إلى المطلوب، ثم يبدأ بصياغة البرهان بطريقة منطقية معللاً كل خطوة من خطوات البرهان .
– إبراز أهمية مبرهنة فيثاغورث وعكسها ، من خلال ضرب أمثلة لاستخداماتها العملية ، مثل استخدام المهندس المعماري لفكرة المبرهنة عند تخطيط قطعة أرض لغرض إقامة مبنى عليها إذ يراعى أن تكون الزاوية بين أي جدارين من جدران المبنى قائم ، كذلك عند تخطيط ملاعب كرة القدم والطائرة ، كما يستخدم الفكرة نفسها النجار عند عمل المكتبات والدواليب وغرف النوم ... الخ . ويفضل أن يختار المعلم أمثلة تطبيقية من واقع البيئة التي يعيش فيها الطلبة .
– عند تنفيذ الطلبة للتدريب الوارد في كتاب الطالب عقب عكس مبرهنة فيثاغورث ، سيلاحظ الطلبة

أنه لايمكن رسم القطعة المستقيمة بطول $\sqrt{٢}$ باستخدام المسطرة فقط ، وهنا يتم إرشادهم إلى اعتبار $\sqrt{٢}$ هو طول الوتر في مثلث قائم ومتساوي الساقين طول كل منهما هو « ١ » وباستخدام المسطرة والمنقلة يتم رسم المثلث القائم فيكون الوتر هو طول القطعة المستقيمة المطلوب رسمها . وبنفس الفكرة يتم رسم القطعة المستقيمة بطول $\sqrt{٣}$ ، حيث $\sqrt{٣}$ هو طول ضلع قائم في مثلث قائم طول الوتر فيه هو « ٢ » وطول الضلع القائم الآخر هو « ١ » والزاوية بين هذا الضلع والوتر هي $٦٠^\circ$ .

- تدريب الطلبة على التعبير الرمزي عن النص اللفظي للمبرهنة ، وكذلك التعبير عن النص الوارد في الكتاب باستخدام كلمات وجمل مرادفة لكلمات وجمل النص الأصلي للمبرهنة ، وهذا من شأنه الارتقاء بمستوى الطلبة من مجرد حفظ النصوص إلى فهمها .
- قبل نهاية الحصة الثالثة يحدد المعلم بعض التمارين كواجب منزلي ، ويفضل أن تكون ضمن التمارين ( ١ – ٤ ) لأنها تمارين عددية ومباشرة يمكن أن تساعد في تثبيت الأفكار الأساسية التي تحتويها المبرهنات ، وفي الحصة الرابعة يتم مناقشة الطلبة في حل الواجب ومعالجة الأخطاء إن وجدت وتعزيز الأداء الجيد لدى الطلبة ، ثم يحدد لهم واجبا منزليا آخر من ضمن التمارين ( ٥ – ٨ ) على أن يتم مناقشته مع الطلبة في الحصة الخامسة ، ويراعى عند مناقشة هذه المجموعة من التمارين أنها تهدف إلى تنمية قدرة الطلبة على البرهان، ويمكن أن يتم التحقق من صحة الصيغ العامة لهذه التمارين بواسطة أعداد حقيقية كخطوة لاحقة للبرهان وليس قبله .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[٢] الحالتان ب ) ، ء ) فقط يكون فيهما المثلث قائم الزاوية ، لأن مربع الضلع الأكبر في كل منهما يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين ، بينما هذا الشرط لايتوفر في الحالات الأخرى .

[٤] $|\text{ب جـ}| = ٥$ ، $|\text{جـ ء}| = ٣,٢$ ، $|\text{أ جـ}| = ٤$ ، $|\text{أ ء}| = ٢,٤$ .

[٥] $\because$ ع هو طول الضلع الأكبر في المثلث القائم $\therefore$ $\text{ع}^٢ = \text{س}^٢ + \text{ص}^٢$ ، ومهما كان العدد الحقيقي الموجب د ، فإن المعادلة السابقة تكافئ المعادلة :

$$\text{ع}^٢ \times \text{د}^٢ = \text{س}^٢ \times \text{د}^٢ + \text{ص}^٢ \times \text{د}^٢ \ .$$

$$(\text{ع د})^٢ = (\text{س د})^٢ + (\text{ص د})^٢ \ .$$

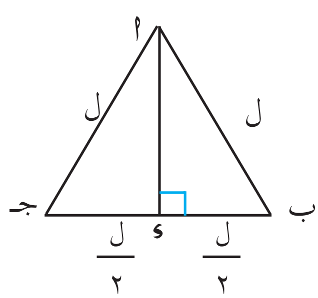
$\therefore$ الأعداد ع د ، س د ، ص د هي أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية .

[٦] $|\text{ب جـ}|^٢ = |\text{أ ب}|^٢ + |\text{أ جـ}|^٢$

$= \text{س}^٢ + \text{س}^٢ = ٢\ \text{س}^٢$

$|\text{ب جـ}| = \sqrt{٢\ \text{س}^٢} = \sqrt{٢} \times \sqrt{\text{س}^٢} = \sqrt{٢}\ \text{س}$

[٧] $\because$ $|\text{أ ب}| = |\text{أ جـ}|$ .




$\therefore$ الارتفاع أ ء هو أيضاً متوسط .

أي أن $|\text{ب ء}| = |\text{ء جـ}| = \frac{\text{ل}}{٢}$ .

في $\Delta$ أ ء جـ القائم الزاوية في ء .

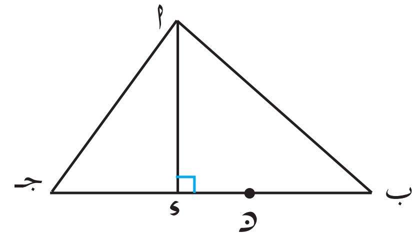
$$|\text{أ ب}|^٢ = |\text{أ ء}|^٢ + |\text{ب ء}|^٢$$

$$\text{ل}^٢ = |\text{أ ء}|^٢ + \frac{\text{ل}^٢}{٤}$$

$$|\text{أ ء}|^٢ = \text{ل}^٢ - \frac{\text{ل}^٢}{٤} = \frac{٣}{٤}\ \text{ل}^٢$$

∴ $|\text{أ ء}| = \sqrt{\frac{٣}{٤}\text{ل}^{٢}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ل}$

[٨]




أ) في المثلثين القائم الزاوية أ ء ب ، أ ء جـ

∵ $|\text{أ ب}|^{٢} = |\text{أ ء}|^{٢} + |\text{ب ء}|^{٢}$

، $|\text{أ جـ}|^{٢} = |\text{أ ء}|^{٢} + |\text{ء جـ}|^{٢}$

∴ $|\text{أ ب}|^{٢} - |\text{أ جـ}|^{٢} = |\text{ب ء}|^{٢} - |\text{ء جـ}|^{٢}$

وهو المطلوب .

ب) $|\text{ب ء}| = |\text{ء د}| + |\text{د ب}|$

$= |\text{ء د}| + \frac{|\text{ب جـ}|}{٢}$ (لأن د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$)

، $|\text{ء جـ}| = |\text{د جـ}| - |\text{ء د}|$

$= \frac{|\text{ب جـ}|}{٢} - |\text{ء د}|$

∴ $|\text{ب ء}| - |\text{ء جـ}| = ٢\,|\text{ء د}|$ وهو المطلوب

جـ) $|\text{أ ب}|^{٢} - |\text{أ جـ}|^{٢} = (|\text{ب ء}| + |\text{ء جـ}|)$

$(|\text{ب ء}| - |\text{ء جـ}|)$ من (أ)

$= |\text{ب جـ}| \times ٢\,|\text{ء د}|$ من (ب)

وهو المطلوب .

## التقـويم

يتم التقويم بنائياً من خلال المناقشة وحل التدريبات الصفية والواجب المنزلي ، ويتم تقديم التمرين التالي أو تمريناً مكافئاً له كخطوة تقويم نهائية .

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، فيه

$|\text{أ ب}| = |\text{أ جـ}| = ٥$ سم . أوجد $|\text{ب جـ}|$ .

## ٤ : ٢ النسب المثلثية الأساسية لزاوية حادة

**عدد الحصص :** ست حصص .

## الأهـــداف

١) يـذكر تعريـف كل من النسـب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة .

٢) يوجد قيمة كل من النسب المثلثية الأساسية بمعلومية أضلاع مثلث قائم .

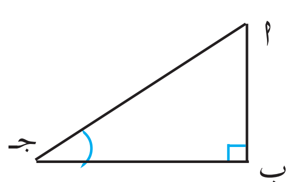
٣) يوجد النسب المثلثية لزاوية حادة إذا علمت إحدى هذه النسب .

٤) يستنتج العلاقات بين النسب المثلثية .

## المحتوى

– جيـب الزاويـة الحـادة في مثلـث قائـم الزاويـة هـو : نسبـة طول الضلع المقابل للزاوية إلى طول وتر المثلث :

$\text{جاجـ} = \frac{|\text{أ ب}|}{|\text{أ جـ}|}$




– جيب تمام الزاوية الحادة في مثلث قائم الزاوية هو : نسبة طول الضلـع المجاور للزاوية إلى طول وتر المثلث :

$\text{جتا جـ} = \frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{أ جـ}|}$ .

– ظـل الزاوية الحادة في المثلـث قائم الزاوية هو نسبة طول الضلع المقابل للزاوية إلى طول الضلـع المجـاور لها : $\text{ظا جـ} = \frac{|\text{أ ب}|}{|\text{ب جـ}|}$ .

– $\text{جا}^{٢}\text{جـ} + \text{جتا}^{٢}\text{جـ} = ١$ .

– $\text{ظا جـ} = \frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}}$ .

## تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في ست حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : جيب الزاوية .

الحصة الثانية : جيب تمام الزاوية .

الحصة الثالثة : ظل الزاوية .

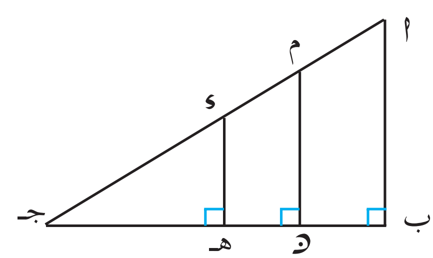
الحصة الرابعة : إيجاد النسب المثلثية إذا علمت إحداها .

الحصة الخامسة : العلاقات بين النسب المثلثية .

الحصة السادسة : تمارين .

وعند التنفيذ على المدرس مراعاة ما يلي :

– يرسم المدرس مثلثاً مشابهاً للمثلث ا ب جـ الوارد في كتاب الطالب ، ويفرض النقطتين ء ، م واقعتين على الوتر ، ثم يرسم $\overline{ءهـ}$ ، $\overline{مد}$ عمودين على الضلع ب جـ .




▪ يناقش مع الطلبة تشابه المثلث ا ب جـ ، وكلٍّ من المثلثين ء هـ جـ ، م د جـ ، ويؤكد على ان المثلثات جميعها مشتركة في الزاوية الحادة جـ . وهذا سبب كاف لتشابهما ، ثم يطلب من الطلبة ذكر التناسب بين الأضلاع المتناظرة في المثلث ا ب جـ، وكلٍّ من المثلثين ء هـ جـ ، م د جـ ، واستنتاج النسب المتساوية.

▪ يعطى تفسيراً لتساوي النسب في كل حالة ، فمثلاً النسب المتساوية .

$$\frac{|ا ب|}{|ا جـ|} = \frac{|ء هـ|}{|ء جـ|} = \frac{|م د|}{|م جـ|}$$ تعني أنه مهما تغير وضع النقطة المفروضة على الوتر ا جـ ، فنسبة طول العمود على الضلع $\overline{ب جـ}$ من هذه النقطة إلى طول وتر المثلث الناتج تكون مساوية طولي الضلعين $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا جـ}$ في المثلث ا ب جـ . أي أن قيم هذه النسب ثابته لاتتغير .

– يقدم تعريفاً لكل نسبة مثلثية مستفيداً من النسب المتساوية الناتجة عن تشابه المثلثات .

– يرسم مثلثات أخرى كل منها قائم الزاوية ، ويطلب من الطلبة في كل مرة كتابة النسبة الدالة على النسبة المثلثية للزاوية الحادة .

– يفضل تدريس كل نسبة مثلثية على حده ، ومناقشة الأمثلة الخاصة بكل نسبة مثلثية وتمكين الطلبة من استيعاب المفهوم بصورة تدريجية مع مراعاة قدرة الطلبة على استخدام نظرية فيثاغورث في إيجاد أطوال أضلاع المثلث المجهوله .

– يحدد المدرس بعض التمارين كواجب منزلي للطلبة بعد الانتهاء من تدريس كل نسبة مثلثية .

– يناقش المدرس مع الطلبة كيفية إيجاد النسب المثلثية لزاوية حادة إذا عُلمت إحدى هذه النسب من خلال المثال الوارد في الكتاب ،ويؤكد على أن قيمة النسبة المثلثية تعبر عن نسبة بين طولي ضلعين في مثلث قائم الزاوية ، وأن قيمة كل حد من حدي النسبة ليس بالضرورة قياس لطول الضلع ، وعند إيجاد بقية النسب المثلثية من الضروري أن يرسم المدرس مثلثاً قائم الزاوية على أن تكون الزاوية المعطاة إحدى زواياه ، ويمثل قيمة النسبة المثلثية على أضلاع المثلث ( حسب النسبة المثلثية المعطاه )، ثم يطلب من الطلبة إيجاد الأطوال المجهولة في المثلث بناء على الأضلاع المفروض أطوالها من قيمة النسبة المثلثية المعطاة ، ليتمكن بعد ذلك الطلبة من إيجاد النسب المثلثية المطلوبة .

– يعمل المدرس على تمكين الطلبة من استنتاج العلاقات بين النسب المثلثية الواردة في الكتاب من خلال مناقشة كل خطوة من خطوات البرهان ليصل الطلبة للصيغة النهائية للعلاقة .

## ارشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[٦] جا أ = $\frac{|\text{ب جـ}|}{١٢}$ ، جا أ = $\frac{٣}{٤}$ ،

∴ $\frac{|\text{ب جـ}|}{١٢} = \frac{٣}{٤}$ ومنه |ب جـ| = ٩سم

لإيجاد |أ ب| استخدم نظرية فيثاغورث .

[٨] ∵ $\overline{\text{أ ء}}$ ينصف ∢ أ في أ ب جـ المتساوي الساقين .

∴ $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ وينصفه ، ومنه |ب ء| = ٣سم

، |أ ء| = ٢ $\sqrt{١٠}$ ، ومنه

جا ( ب أ ء ) = $\frac{٣}{٧}$ ، ظا ( أ جـ ء ) = $\frac{٢\sqrt{١٠}}{٣}$ .

[١٥] ∵ جا س = ٢ جتا س .

∴ $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ = ٢ ومنه ظا س = ٢ ، وبرسم المثلث القائم نصل إلى قيمة كل من : جا س ، جتا س.

### التقويم

يتم التقويم بنائياً من خلال المناقشة ومتابعة حل التدريبات الصفية والواجب المنزلي ، ويمكن ان يعطى المدرس تمريناً كالتالي كخطوة تقويم ، وذلك في نهاية الحصة السادسة .

[ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه |أ ب| = ١سم ، |ب جـ| = ٦سم .
أوجد كلاً من : جا جـ ، جتا جـ ، ظا جـ ] .

## ٤ : ٣ النسب المثلثية للزوايا : ٣٠ْ ، ٦٠ْ ، ٤٥ْ

**عدد الحصص** : حصتان .

### الهدف

يستنتج النسب المثلثية للزوايا ٣٠ْ ، ٦٠ْ ، ٤٥ْ .

### المحتوى

جا ٣٠ْ = $\frac{١}{٢}$ ، جا ٦٠ْ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا ٤٥ْ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جتا ٣٠ْ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا ٦٠ْ = $\frac{١}{٢}$ ، جتا ٤٥ْ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ظا ٣٠ْ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ظا ٦٠ْ = $\sqrt{٣}$ ، ظا ٤٥ْ = ١

### تنفيذ الدرس

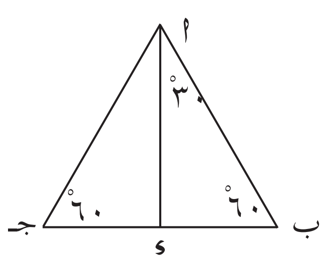
ينفذ هذا الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : النسب المثلثية للزاويتين ٣٠ْ ، ٦٠ْ .

الحصة الثانية : النسب المثلثية للزاوية ٤٥ْ + تمارين .

وعند تنفيذ الدرس يراعي المدرس ما يلي :

– يرسم المدرس مثلث متساوي الأضلاع ، وليكن المثلث أ ب جـ . طول كل من أضلاعه ٢ وحدة طولية . ويسأل الطلبة عن قياس كل من زواياه .




ثم من الرأس أ يرسم العمود أ ء على الضلع ب جـ ، ويطلب منهم إيجاد قياس زاوية أ ء ب ، وقياس زاوية جـ أ ء ، وطول كل من $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ ، ويؤكد على أنه يمكن الوصول للمطلوب مباشرة من خلال الاستفادة من خواص المثلث المتساوي الساقين

« العمود المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة ينصفها وينصف زاوية الرأس » .

ويمكن استنتاج | ب ء | . وذلك من أن $\overline{\text{ب ء}}$ يقابل الزاوية ٣٠° في المثلث القائم أ ب ء ، ومنه فإن | ب ء | يساوي نصف الوتر ، أي أن :

$$|\text{ب ء}| = \frac{|\text{أ ب}|}{٢} = ١ \quad \text{وحدة طول .}$$

- يطلب المدرس من الطلبة إيجاد | أ ء | بالاعتماد على أي من المثلثين المتطابقين : أ ب ء ، أ جـ ء ، ثم باستخدام نظرية فيثاغورث ليجد الطلبة أن : | أ ء | = $\sqrt{٣}$ ، وبالتالي استنتاج النسب المثلثية الأساسية للزاويتين ٣٠° ، ٦٠° .
- يؤكد المدرس على أنه يمكن فرض طول كل من أضلاع المثلث بأي عدد من وحدات الطول وليس بالضرورة أن يكون وحدتين ، وأن أي فرضية أخرى ستؤدي إلى نفس النتيجة .
- لاستنتاج النسب المثلثية للزاوية ٤٥° ، يرسم المدرس مثلثا قائم الزاوية ومتساوي الساقين ، ويفرض طول كل من ضلعية القائمين وحدة الطول . وبتحديد قياس كل من الزاويتين المجهولتين ، وإيجاد طول وتر المثلث يستنتج الطلبة النسب المثلثية للزاوية ٤٥° .
- يناقش المدرس مع الطلبة الأمثلة الواردة في الكتاب ، موضحاً التعويض عن النسب المثلثية للزوايا : ٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥° في المقادير الجبرية لإيجاد قيم هذه المقادير ، وكذلك لإثبات العلاقات الرياضية .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ٥ ] بالتعويض عن ق( ∢ س ) = ٣٠° ، نجد المطلوب ؛

إثبات أن : $\text{جا } ٦٠° = \frac{٢ \text{ ظا } ٣٠°}{١ + \text{ظا}^٢ ٣٠°}$ ومنه

$$\text{جا } ٦٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \quad \frac{٢ \text{ ظا } ٣٠°}{١ + \text{ظا}^٢ ٣٠°} = \frac{٢ \times \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ + \frac{١}{٣}}$$

$$\therefore \quad \frac{٢ \text{ ظا } ٣٠°}{١ + \text{ظا}^٢ ٣٠°} = \frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{٣}{٤} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \text{حا } ٦٠°$$

## التقـويم

يتم بنائياً من خلال المناقشة ومتابعة حل التدريبات الصفية والواجب المنزلي ويمكن تقديم التمرين التالي أو ما يشابهه في نهاية الحصة الثانية كخطوة تقويم :

[ أوجد قيمة : $\frac{١}{\text{جا}٣٠°} + ١٢ \text{ جتا}^٢ ٣٠° - \text{ظا } ٤٥°$ ] .

## ٤ : ٤ تمارين عامة ومسائل

**عدد الحصص** : حصتان .

### الهـــدف

تثبيت المفاهيم وتطوير المهارات الواردة في الوحدة

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين وعلى المدرس مراعاة ما يلي :

- يناقش المدرس مع الطلبة بعض التمارين والمسائل ، وأثناء النقاش يعمل المدرس على مراجعة المفاهيم والعلاقات الرياضية المرتبطة بالتمرين ( المسألة ) ، وتمثل مناقشة التمرين فرصة مناسبة للمدرس والطلبة في مراجعة موضوعات الوحدة .
- ينبغي أن تغطى تمارين المناقشة معظم أهداف الوحدة ، وألا تقتصر على بعض الموضوعات . كما يراعى أن تكون تمارين المناقشة متدرجة في الصعوبة والتسلسل المنهجي .
- يكلف المدرس الطلبة بحل بعض التمارين والمسائل في الفصل ، ويحدد عدداً منها كواجب منزلي .
- يعالج المدرس الصعوبات التي ستظهر لدى الطلبة من خلال النقاش ومتابعة الواجب المنزلي .
- يكلف الطلبة بحل اختبار الوحدة الوارد في كتاب الطالب كواجب منزلي استعداداً لاختبار الوحدة في الحصة القادمة .

### إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ٩ ] طول ضلع القائمة الآخر $= \sqrt{٨١ - ٣٦} = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$ سم

ا ) بفرض أن الزاوية الكبرى الحاده $هـ_١$

$حاهـ_١ = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$ ، $جتاهـ_١ = \frac{٢}{٣}$ ، $ظاهـ_١ = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$

ب ) بفرض أن الزاوية الصغرى $هـ_٢$

$حاهـ_٢ = \frac{٢}{٣}$ ، $جتاهـ_٢ = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$ ، $ظاهـ_٢ = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$

جـ) $جاهـ_١ = جتاهـ_٢$ ، $جتاهـ_١ = جاهـ_٢$ ، $ظاهـ_١ = \frac{١}{ظاهـ_٢}$

[ ١٧ ] ارسم من ا العمود على $\overline{ب جـ}$ وليكن $\overline{اء} \perp \overline{ب جـ}$

، ∵ $جا جـ = \frac{٤\sqrt{٣}}{٧}$

∴ في $\Delta$ ا جـ ء يكون $|ء جـ| = \sqrt{٤٩ - ٤٨} = ١$

، ∵ $|ء جـ| = |ب ء|$ .

∴ $|ب جـ| = ٢$

∴ $\frac{|ب جـ|}{|ا جـ|} = \frac{٢}{٧}$ .

## ٤ : ٥ اختبـــار الوحـــدة

**عدد الحصص** : حصتان .

### الهـــدف

قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : يعطى الاختبار الذي في الدليل والذي يغطى اهداف الوحدة حسب الجدول التالي :

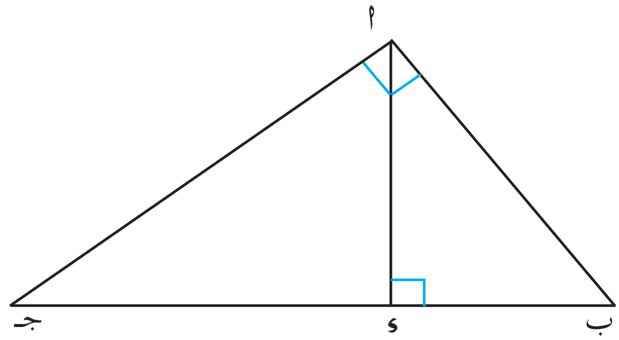
| رقم السؤال | رقم الهـــدف |
|---|---|
| ١ | ١ ، ٢ |
| ٢ | ٣ |
| ٣ | ٤ |
| ٤ | ٥ |
| ٥ | ٦ |

ويمكن أن يعطي المدرس اختباراً آخر مشابهاً يقوم بإعداده بنفسه شريطة أن يغطي أهداف الوحدة .

وبعد تصحيح الاختبار ورصد أخطاء الطلبة يقوم المدرس في الحصة التالية بمناقشة هذه الأخطاء وتعريف الطلبة بها وكيفية تجنبها .

### الاختبـــار :

[ ١ ] في الشكل المرسوم ادناه




أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ،
فإذا كان | ب جـ | = ٨سم ، | ء جـ | = ٥سم ،
فأوجد كلاً من : | أ ء | ، | أ ب | .

[ ٢ ] إذا كانت الاعداد : ٢ ، ٥ ، $\sqrt{\text{٢١}}$ هي طوال أضلاع مثلث ، فبين أن هذا المثلث قائم الزاوية .

[ ٣ ] أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه | أ جـ | = ٦ سم ، | ب جـ | = ١١سم . أوجد كلاً من : جا أ ، جتا أ ، ظا أ .

[ ٤ ] إذا كان جا جـ = $\frac{\text{٧}}{\text{٢٥}}$ ، حيث جـ زاوية حادة ،

فأوجد كلاً من : جتا جـ ، ظا جـ .

[ ٥ ] أثبت أن : $\left(\frac{\text{١}}{\text{جتا ٦٠°}} - \text{ظا ٦٠°}\right)^{\text{٢}} = \frac{\text{١} - \text{جا ٦٠°}}{\text{١} + \text{جا ٦٠°}}$ .

## جدول توزيع الحصص

| البند | الموضوع | عدد الحصص |
|---|---|---|
| ٥ – ١ | الدائرة | ٣ |
| ٥ – ٢ | العمود النازل من مركز الدائرة على الوتر | ٤ |
| ٥ – ٣ | أوتار الدائرة | ٣ |
| ٥ – ٤ | الزاوية المركزية والأقواس | ٣ |
| ٥ – ٥ | القطاع الدائري | ٢ |
| ٥ – ٦ | الزاوية المحيطية | ٥ |
| ٥ – ٧ | الشكل الرباعي الدائري | ٥ |
| ٥ – ٨ | المماس | ٦ |
| ٥ – ٩ | الأوضاع المختلفة لعلاقة دائرتين | ٥ |
| ٥ – ١٠ | تمارين ومسائل عامة | ٣ |
| ٥ – ١١ | اختبار الوحدة | ٣ |
| | المجموع | ٤٢ |

## أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يتعرف على المفاهيم الأساسية للدائرة .

٢ – يبرهن مبرهنة « المستقيم الواصل من مركز الدائرة ... » ويبرهن عكسها .

٣ – يبرهن أن الأوتار المتطابقة في الدائرة على أبعاد متساوية عن مركزها ، ويبرهن العكس .

٤ – يتعرف على الزاوية المركزية والمحيطية والأقواس .

٥ – يبرهن أنه إذا تطابقت زاويتان مركزيتان تساوي قياسا قوسيهما الصغيرين ، ويبرهن العكس .

٦ – يبرهن أنه إذا تطابقت الأوتار في دائرة تساوت قياسات أقواسها المتناظرة ، ويبرهن العكس .

٧ – يتعرف على القطاع الدائري .

٨ – يبرهن أن الزاوية المحيطية تساوى نصف قياس الزاوية المشتركة معها بالقوس .

٩ – يبرهن أن الزوايا المحيطية المشتركة في قوس واحد من الدائرة الواحدة متطابقة .

١٠ – يبرهن أن الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة ، ويبرهن العكس .

١١ – يتعرف على الشكل الرباعي الدائري .

١٢ – يبرهن أن مجموع قياسي الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي ١٨٠°،ويبرهن العكس .

١٣ – يبرهن أن الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري تساوي الزاوية المقابلة للزاوية المجاورة لها .

١٤ – يبرهن أن مماس الدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المار بنقطة التماس .

١٥ – يبرهن أن المماسين المرسومين لدائرة من نقطة خارجها متطابقان .

١٦ – يبرهن أن قياس الزاوية المحصورة بين المماس والوتر بنقطة التماس يساوى قياس الزاوية المحيطية المقابلة لوتر التماس من الجهة الأخرى .

١٧ – يبرهن أن نقطة التماس لدائرتين تقع على خط المركزين .

١٨ – يبرهن أن خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك وينصفه .

## المقدمـــة

**لمحـة تاريخيـــة :**

لقد تحدثنا في الصفوف السابقة على أشكال هندسية متنوعة وسنتحدث في هذا الصف على نوع جديد من الأشكال التي قوامها خط منحنى ( الدائرة ) .

فقد اهتم البابليون قديما بالقياسات العملية لإيجاد مساحة العديد من الأشكال الهندسية كالمثلثات والمربع وشبه المنحرف والمستطيل ، وكذلك مساحة الأجسام كثيرة السطوح والإسطوانة ، كما قسموا محيط الدائرة إلى ستة أقسام ، ثم إلى ٣٦٠ قسما متساويا .

وجدير بالذكر ، في مجال الدائرة ، أن الرياضيين المسلمين قد ساهموا مساهمة فعالة في طرح وحل مسائل متنوعة عن الدائرة ، وأبرز من عمل في هذا الحقل ابن الهيثم والبيروني . فابن الهيثم هو من الذين اشتغلوا في البصريات ، وقد قادته أبحاثه في البصريات إلى طرح مسائل جديدة حول انعكاس الضوء على المرايا المتنوعة وبالتالي إعطائها حلولاً هندسية ، ومن المسائل التي وردت في نظريات ابن الهيثم المسألة التالية :

« كيف نرسم مسستقيمين من نقطتين مفروضتين داخل دائرة معلومة إلى أي نقطة مفروضة على محيطها بحيث يصنعان مع المماس المرسوم من تلك النقطة زاويتين متساويتين » .

أما البيروني محمد بن أحمد أبو الريحان البيروني ، ولد في خوارزم عام ٣٦٢هـ والراجح أنه توفي سنة ٤٤٠هـ) فقد عمل في حقول عملية متنوعة ولاسيما الفلك والجغرافيا والفيزياء ، وقد وضع صيغة لحساب نصف قطر الأرض وبرهن على صحتها بطريقة فذّه ، وقد كتب « رسالة استخراج الأوتار في الدائرة بخواص الخط المنحنى » وأبرز ما فيها برهان جديد لمساحة المثلث بدلالة الأضلاع ، ولايتسع المجال هنا لذكر كل ما اكتشفه المسلمون في موضوع الدائرة والكرة .

ومن مآثر العرب الأخرى اكتشافهم الكسر العشري ، الذي ينسب إلى العالم الرياضي الفلكي « غياث الدين الكاشي » فقد بين ذلك في كتابه « الرسالة المحيطة » عندما أورد النسبة التقريبية ، وهي النسبة بين محيط الدائرة وقطرها ، بالكسر العشري ، وقد أوجد قيمة « ط » لستة عشر رقما عشريا . كما ذكر الأستاذ / ديفيد يوجين اسمث في كتابة ( تاريخ الرياضيات – المجلد الثاني ) ط = ٣٫١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٨٧٣٢ .

ولم يسبقه أحد في تاريخ الرياضيات إلى إيجاد هذه النسبة البالغة الدقة .

**أقسام الوحدة :**

تتضمن هذه الوحدة عدة بنود تتناول الدائرة وعلاقتها بالمستوى وأوضاع مستقيم بالنسبة للدائرة ، والقطعة الواصلة من مركز الدائرة إلى منتصف الوتر والأوتار المستاوية والقطعة الدائرية والقطاع الدائري والزاوية المركزية والزاوية المحيطية وقياس الأقواس والزاوية المحيطية المرسومة بنصف دائرة والشكل الرباعي الدائري، خط المركزين ، والوتر المشترك ، والمماس ، والزاوية المماسية والأضلاع المختلفة لدائرتين ، ثم تُختتم الوحدة بتمارين ومسائل عامة واختبار للوحدة .

**مفاهيم ومصطلحات :**

– القطاع الدائري .
– الزاوية المركزية .
– الزاوية المحيطية .
– القوس .
– قياس الأقواس .
– تطابق وتران .
– خط المركزين .
– الوتر المشترك .
– المماس .
– نقطة التماس.
– الزاوية المماسية .
– وتر التماس.
– الشكل الرباعي الدائري .
– الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري .

**أخطاء شائعة:**

من الأخطاء الشائعة التي يمكن أن يقع فيها الطلبة ما يلي :

– عدم التمييز بين الوتر والقطر .
– عدم التمييز بين الزاوية المحيطية والزاوية المركزية .
– عدم التمييز بين الزاوية المحيطية والزاوية المماسية.
– عدم التمييز بين القطعة الدائرية والقطاع الدائري .
– عدم التمييز بين وتر القائمة ووتر الدائرة .
– عدم التمييز بين قطر الدائرة وقطر الشكل الرباعي .

## ٥ : ١ الدائرة

**عدد الحصص** : ثلاثة حصص .

### الأهـــداف

١ ) يتعرف على كلٍ من : ( الدائرة – نصف قطر الدائرة – وتر الدائرة – القوس – المماس – نقطة التماس ) .

٢ ) يتعرف على علاقة الدائرة بالمستوى ) .

٣ ) يتعرف على علاقة مستقيم بالدائرة .

### المحتوى

– الدائرة : هي مجموعة نقاط في مستوى واحد تبعد عن نقطة ثابته مسافات متساوية ، وتسمى النقطة الثابته مركز الدائرة ، وتسمى الدائرة باسم مركزها .

– نصف قطر الدائرة : هو القطعة المستقيمة الواصلة من مركز الدائرة إلى أية نقطة تقع على الدائرة ، وترمز لطول نصف القطر بالرمز « نق » .

– وتر الدائرة : هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين من الدائرة .

– القوس : هو جزء من الدائرة محصور بين نقطتين عليها .

### الوسائل

مسطرة ، فرجار ، طباشير ملونة ، ورق ملون .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في ثلاثة حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مفاهيم الدائرة .

الحصة الثانية : علاقة الدائرة بالمستوى وعلاقة المستقيم بالدائرة .

الحصة الثالثة : تمارين ومسائل .

ويراعي المدرس عند تنفيذ الدرس ما يلي :

– التمهيد للدرس بمراجعة يتم فيها رسم دائرة معلوم نصف قطرها موضحاً للطلبة بأن رسم الدائرة يعتمد على طول نصف قطرها .

– يركز المدرس على مفهوم الدائرة من خلال رسم دائرة موضحا فيها البعد الثابت ( نق ) والنقطة الثابتة ( مركز الدائرة ) .

والدائرة :هي مجموعة نقاط في مستوى واحد تبعد عن نقطة ثابتة مسافات متساوية ، وتسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ، وتسمى الدائرة باسم مركزها .

– كما يؤكد المدرس على المفاهيم الأخرى المتعلقة بالدائرة مثل : ( نصف القطر – القطر – الوتر – القوس ) .

– يوضح المدرس للطلبة الفرق بين قطر في الدائرة وقطر أي مضلع . كما يوضح الفرق بين وتر في الدائرة والوتر في المثلث القائم .

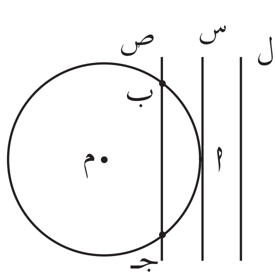
– يطلب من الطلبة حل بعض التمارين كواجب منزلي .

– يناقش المدرس مع الطلبة الواجب المنزلي ويعالج الأخطاء ، ويمهد للحصة الثانية بمراجعة ما سبق دراسته في الحصة الأولى .

– يناقش المدرس مع الطلبة علاقة الدائرة بالمستوى ( داخل الدائرة – على الدائرة – خارج الدائرة ) وذلك من خلال رسم دائرة وتحديد نقاط في المستوى داخل الدائرة وعلى الدائرة وخارجها .

– يناقش المدرس مع الطلبة علاقة المستقيم بالدائرة من خلال رسم دائرة ومستقيمات .

يمكن للمدرس أن يستخدم الشكل المرسوم جانباً لتوضيح علاقة المستقيم بالدائرة .




– يركز المدرس على المماس ونقطة التماس في الدائرة .

– يطلب المدرس من الطلبة حل بعض التمارين كواجب منزلي .

– يناقش المدرس مع الطلبة الواجب المنزلي ويمهد للحصة التالية بمراجعة ما سبق دراسته في الحصة الأولى والثانية .

– يطلب من الطلبة حل بقية التمارين والمسائل كتدريبات صفية ومنزلية .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ٣ ] نق = ٨سم ( ملاحظة طول أكبر وتر في الدائرة هو القطر ) .

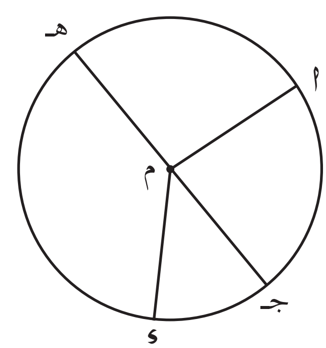
[ ٥ ] ب جـ = ٩سم ، ب ص = ٧,٥سم .

## التقويم

يكون التقويم بنائيا من خلال متابعة المدرس للطلبة أثناء المناقشات وكذلك من خلال متابعة حل الواجب الصفي والمنزلي .

يمكن تقديم سؤال كالتالي :

في الشكل المرسوم أدناه :




حدد من الدائرة ما يلي :

(أ ) قطراً للدائرة .

(ب ) ثلاثة أنصاف أقطار .

(جـ ) ثلاثة أقواس .

# ٥ : ٢ العمود النازل من مركز الدائرة على الوتر

**عدد الحصص** : أربع حصص .

## الأهداف

١ ) يبرهن أن المستقيم الواصل من مركز الدائرة إلى منتصف أي وتر فيها يكون عموديا عليه.

٢ ) يبرهن أن العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه .

## المحتوى

– المستقيم الواصل من مركز الدائرة إلى منتصف أي وتر فيها يكون عمودياً على الوتر .

– العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه .

## الوسائل

فرجار ، مسطرة ، طباشير ملونة ، ورق مقوى.

## تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في أربع حصص كالتالي :

الحصة الأولى : المبرهنة ( المستقيم الواصل من مركز الدائرة . . . ) .

الحصة الثانية : عكس المبرهنة ( العمود النازل . . . ).

الحصة الثالثة والرابعة : تمارين ومسائل .

يقوم المدرس عند تنفيذ هذا الدرس بمراعاة ما يلي :

– يمهد للدرس بمراجعة المستقيمين المتعامدين .

– يكتب المدرس تعميم المبرهنة على السبورة ، ويوضح معناها اعتماداً على الشكل المرسوم ، ثم يحدد مع الطلبة المعطيات والمطلوب .

– يناقش المدرس مع الطلبة فكرة البرهان .

– يناقش المدرس مع الطلبة التدريبات والأمثلة ، ثم

يطلب منهم حل تمرين كواجب منزلي .

– يمهد للحصة الثانية بمراجعة ما سبق دراسته ، ثم مناقشة الواجب المنزلي وتصحيح الأخطاء وكذلك مناقشة بعض الأمثلة .

– يكرر نفس الخطوات السابقة بالنسبة لعكس المبرهنة .

– في الحصة الثالثة والرابعة يستكمل توضيح الأمثلة كما يكلف الطلبة بحل تمارين ومسائل كتدريبات صفية ومنزلية .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ١ ] ١٦ سم .

[ ٢ ] | ا م | = ٥ سم

[ ٤ ] ق ( ∢ س م ص ) = ١٢٠° .

## التقـويم

يكون التقويم بنائيا من خلال متابعة المدرس للطلبة ومناقشة التمارين والمسائل وحل الواجبات الصفية المنزلية . كما يتم التقويم النهائي من خلال تقديم السؤال التالي :

ا ب وتر في دائرة مركزها « م » فإذا علم أن نصف قطرها ١٣سم ، وأن طول العمود النازل من م على ا ب = ١٢ سم .

احسب طول الوتر ا ب .

## ٥ : ٣ أوتـــار الدائــرة

**عدد الحصص** : ثلاثة حصص .

### الأهــــداف

١ ) يبرهن أن الأوتـار المتطابقة في الدائرة على أبعـاد متساوية عن مركزها ( المبرهنة ) .

٢ ) يبرهن أن الأوتار التي على أبعاد متساوية عن مركز الدائرة تكون متطابقة ( عكس المبرهنة ) .

### المحتوى

– الأوتار المتطابقة في الدائرة على أبعاد متساوية عن مركزها .

– الأوتار التي على أبعـاد متساوية عـن مركز الدائـرة تكون متطابقة .

### الوسائل

الفرجار ، المسطرة ، المنقلة ، المثلث القائم ، طباشير ملونة .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : المبرهنة « الأوتار المتطابقة في الدائرة . . . » .

الحصة الثانية : عكس المبرهنة .

الحصة الثالثة : تمارين ومسائل .

عند تنفيذ الدرس يراعي المدرس ما يلي :

– التمهيد للدرس بمراجعة المفاهيـم الأساسيـة للدائرة ( نصف القطر – القطر – مركز الدائرة – الوتر ) .

– يؤكد المدرس على علاقة أوتار الدائرة بمركزها وذلك من خلال رسم دائرة مختلفة الأوتار ومختلفة الأبعاد عن مركز الدائرة حتى يستنتج من الطلبة بأنه : كلما اقترب الوتر من مركز الدائرة زاد طوله .

– يطلب من الطلبة تنفيذ النشاط التالي : وذلك باستخدام المسطرة ، الفرجار بأن يرسم الطلبة في دفاترهم وترين لدائرة لهما نفس الطول . حتى يتوصلوا إلى أن الأوتار المتساوية في الطول تكون على أبعاد متساوية من المركز .

– إشراك الطلبة في التوصل إلى برهان المبرهنة ، وذلك باستخدام أسلوب المناقشة ، ومن خلال تحديد المعطيات والمطلوب واستنتاج العمل ، ثم التوصل إلى البرهان .

– التأكيد على النتيجة من خلال رسم دائرتين على السبورة واستنتاجها من الطلبة .

– يستنتج المدرس من الطلبة برهان عكس المبرهنة وذلك من خلال تحديد المعطيات والمطلوب والعمل ومناقشة البرهان .

– يناقش المدرس مع الطلبة حل الأمثلة التي وردت في الكتاب .

– يكلف الطلبة بحل بعض التمارين كواجب منزلي .

– يناقش المدرس الواجب المنزلي في بداية الحصة الثالثة ويصحح الأخطاء ويعالج الصعوبات .

– يكلفهم بحل بقية التمارين والمسائل كتدريبات صفية .

### التقــويم

يكون التقويم بنائياً من خلال مناقشات الطلبة ومتابعة حلولهم للواجبات الصفية والمنزلية ، وكذلك من خلال تقديم سؤال كالتالي :

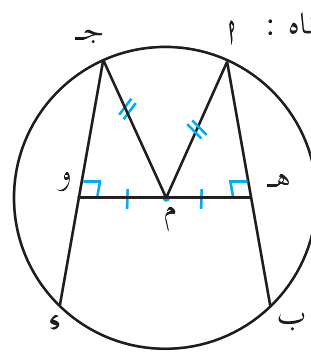
في الشكل المرسوم أدناه :

ا م = جـ م ،

م هـ = م و .

اثبت أن :

الوتر ا ب = الوتر جـ ء .




## ٥ : ٤ الزاوية المركزية والأقواس

**عدد الحصص** : ثلاث حصص .

### الأهــــداف

١ ) يتعـرف على الزاويـة المركزية وعلى درجـة قيـاس القوس .

٢ ) يبرهـن أنه إذا تطابقـت زاويتان مركزيتـان تسـاوى قياسا قوسيهما الصغيرين .

٣ ) يبرهن أنه إذا تساوى قياسا قوسين في دائرة تطابقت زاويتاهما المركزيتان .

٤ ) يبرهـن أنه إذا تطابقـت الأوتـار في دائرة تسـاوت قياسات أقواسها المتناظرة .

٥ ) يبرهـن أنه إذا تسـاوت قياسـات الأقـواس في دائرة تطابقت أوتارها المتناظرة .

### المحتوى

– الزاوية المركزية : هي زاوية رأسها مركز الدائرة .

– درجة قيـاس القـوس الصغيـر تسـاوى قيـاس زاويته المركزية المقابلة له .

– إذا تطابقت زاويتان مركزيتان تساوى قياسا قوسيهما الصغيرين .

– إذا تساوى قياسا قوسين في دائرة تطابقت زاويتاهما المركزيتان .

– إذا تطابقت الأوتار في دائرة تساوت قياسات أقواسها المتناظرة .

– إذا تساوت قياسات الأقواس في دائرة تطابقت أوتارها المتناظرة .

### الوسائل

الفرجار ، المنقلة ، المسطرة ، الألوان .

## تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مبرهنة تطابق الزاويتين المركزيتين وعكسها .

الحصة الثانية : مبرهنة تطابق الأوتار وعكسها .

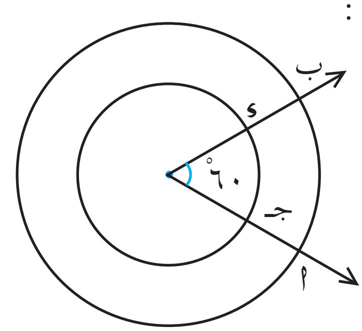
الحصة الثالثة : تمارين ومسائل .

يقوم المدرس عند تنفيذ الدرس بمراعاة ما يلي :

– أن يكون للمتعلم دور نشط في العملية التعليمية .

– أن يفرق بين درجة قياس الزاوية ودرجة قياس القوس، وذلك من خلال :

إذا تساوت قياسات الزوايا المركزية تطابقت الزوايا بينما إذا تساوت درجة قياسات الأقواس ليس بالضرورة أن تتطابق الأقواس ، لأنها ممكن أن تكون في دوائر مختلفة . مثال :




⌒ا ب لايطابق ⌒ء جـ بالرغم من أن قياس ⌒ا ب = ٦٠°، قياس ⌒جـ ء = ٦٠° .

– يوضح العلاقة بين الزوايا المركزية وأقواسها والعلاقة بين الأقواس وأوتارها .

– على المدرس أن يعطي التوجيهات ويناقش فكرة كل برهان ، ويعطي أمثلة عليه ، ويحدد الواجبات الصفية والمنزلية لكل حصة .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[١] (ا) ⌒ء هـ . (ب) ⌒ب جـ ا ، ⌒جـ ا ب .

(جـ) قياس ⌒ب جـ > قياس ⌒ء هـ .

[٢] (ا) قياس ⌒ء ا = ٩٠° .

(ب) قياس ⌒س ا = ١٢٠°

(جـ) قياس ⌒س هـ ا = ١٥٠° + ٩٠° = ٢٤٠° .

(ء) قياس ⌒س هـ ء = ١٥٠° + ١٨٠° = ٣٣٠° .

[٣] |ب ء| = |ا جـ| معطى .

∴ قياس ⌒ب ء = قياس ⌒ا جـ .

∴ قياس ⌒ا ب + قياس ⌒ب ء = قياس ⌒ا ب + قياس ⌒ا جـ

∴ قياس ⌒ا ء = قياس ⌒جـ ب

ومنه |ا ء| = |ب جـ| .

[٤] ق (∡ ب) = ق (∡ م) وحيث أن :

ق (∡ م) = قياس ⌒ء جـ ،

ق (∡ ب) = $\frac{١}{٢}$ قياس ⌒ا ء وينتج المطلوب

[٥] قياس ⌒ب ا ء = قياس ⌒ب ا + قياس ⌒ا ء

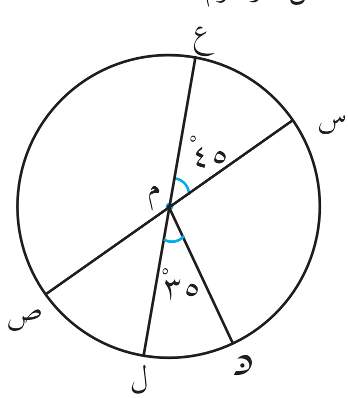
= قياس ⌒جـ ء ا + قياس ⌒ء ا .

∴ قياس ⌒ب ا = قياس ⌒ا ء ، ومنه ‾ا ب ≅ ‾ء جـ .

## التقويم

بنائي من خلال المناقشة الصفية ومتابعة حلول التمارين الصفية والواجبات المنزلية . كما يقوم الطلبة من خلال أسئلة مثل التالية :

في الشكل المرسوم ادناه :




م مركز الدائرة . أوجد ما يلي :

ا) قياس ⌒ل ص .

ب) قياس ⌒س د ل .

## ٥ : ٥ القطاع الدائري

**عدد الحصص :** حصتان .

### الأهداف

١ – يتعرف على القطاع الدائري .

٢ – يحسب طول القوس ومساحة القطاع الدائري .

### المحتوى

$\frac{\text{طول القوس}}{\text{٢ ط نق}} = \frac{\text{س}}{\text{٣٦٠}}$ حيث س قياس الزاوية المركزية .

$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{ط نق}^{٢}} = \frac{\text{س}}{\text{٣٦٠}}$ حيث س قياس الزاوية المركزية .

### الوسائل

الفرجار ، الألوان ، رسوم توضيحية للكسور لمجالات إحصائية .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : القطاع الدائري .

الحصة الثانية : تمارين .

ويراعي المدرس عند تنفيذ هذا الدرس ما يلي :

– يمهد للدرس بمراجعة المفاهيم : مركز الدائرة ، القطر، الوتر ، نصف القطر .

– يوضح أهمية الموضوع واستخداماته في الإحصاء ، وفي تمثيل الكسور العادية وذلك من خلال صور من هذه المجالات .

– يستنبط قاعدة حساب القوس ، وقاعدة حساب المساحة .

– يحل مثال لكل من حساب طول القوس ومساحة القطاع .

– يحدد الواجب المنزلي ومناقشته في الحصة التالية .

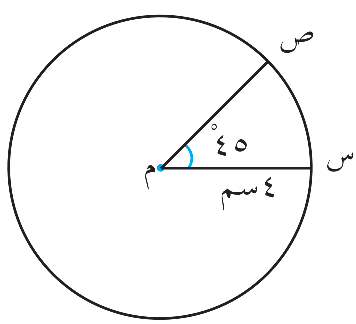
### إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

استخدم المثالثين ١ ، ٢ كدليل لحل التمارين المعطاه .

### التقـويم

بنائي من خلال متابعة الطلبة في المناقشة وحل التدريبات والمسائل . يعطى سؤال كالتالي في نهاية الحصة الثانية كخطوة تقويم :

من الشكل المرسوم ادناه :




أوجد كلاً من :

(أ ) محيط القطاع الدائري الصغير .

( ب ) مساحة القطاع الدائري الصغير

( حيث ط = ٣٫١٤ ) .

# ٥ : ٦ الزاوية المحيطية

**عدد الحصص** : خمس حصص .

## الأهــــداف

١ ) يتعرف الزاوية المحيطية .

٢ ) يستنتج أن قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المشتركة معها بالقوس .

٣ ) يستنتج أن الزوايا المحيطية المشتركة في قوس واحد من الدائرة الواحدة متطابقة .

٤ ) يستنتج أنه إذا كانت الزاوية المحيطية مرسومة في نصف دائرة فإنها زاوية قائمة والعكس .

## المحتوى

– الزاوية المحيطية : هي زاوية يقطع ضلعاها قوساً من الدائرة ، ورأسها نقطة على محيط الدائرة .

– قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها وبصياغة أخرى .

– قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس .

– الزوايا المحيطية المشتركة في قوس واحد من الدائرة الواحدة متطابقة .

– إذا كانت الزاوية المحيطية مرسومة في نصف دائرة فإنها زاوية قائمة ، وعكس المبرهنة صحيح أي أنه : إذا كانت الزاوية المحيطية في الدائرة قائمة فإنها مرسومة في نصف دائرة .

## الوسائل

المسطرة ، المنقلة ، الفرجار ، مقص .

## تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : الزاوية المحيطية .

الحصة الثانية : قياس الزاوية المحيطية = $\frac{١}{٢}$ قياس القوس المقابل لها .

الحصة الثالثة : الزوايا المحيطية المرسومة على قطعة دائرية واحدة متساوية في القياس .

الحصة الرابعة : الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة = ٩٠° .

الحصة الخامسة : تمارين ومسائل .

عند تنفيذ الدرس تتم مراعاة ما يلي :

– يستخدم المدرس طريقة المناقشة – ويوجه الطلبة إلى الإجابة عن التساؤلات المدونة في كتاب الطالب مع بيان السبب حتى يتم التوصل إلى المبرهنة ، وتدريب الطلبة على كتابة المبرهنات أو التعميمات .

– يميز بين المبرهنة والعكس ، وكيفية كتابة المبرهنة وعكسها بشكل مبرهنة واحدة ، مثل : قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة = ٩٠° ، ويمكن استنتاج البرهان مباشرة من المبرهنة .

قياس الزاوية المحيطية = $\frac{١}{٢}$ قياس قوسها المقطوع .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ١ ] (أ) س = ٦٠° ، ص = ٣٠°

(ب) س = ص = ١٠٠° .

(جـ) س = ٦٥° ، ص = ١٣٠° .

(ء) س = ٤٢° ، ص = ٤٢° + ٤٢° = ٨٤°

[ ٢ ] ق ( ∡ ٣ ) = $\frac{١}{٢}$ ق ( ∡ ١ )

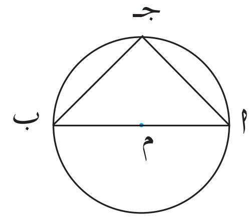
ق ( ∡ ٤ ) = $\frac{١}{٢}$ ق ( ∡ ٢ )

ق ( ∡ ٣ ) + ق ( ∡ ٤ ) = $\frac{١}{٢}$ ق ( ∡ ١ ) + $\frac{١}{٢}$ ق ( ∡ ٢ )

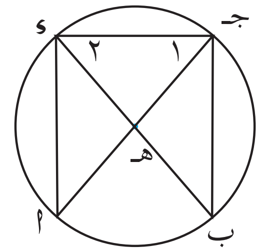
= $\frac{١}{٢}$ × ٣٦٠° = ١٨٠°

[٣] (أ) س = ٩٠°،
ص = س + ٤٥° = ٩٠° + ٤٥° = ١٣٥° .
(ب) س = ٤٥°، ص = ٤٥° + ٣٥° = ٨٠° .

[٤] ٩٠°




[٥]




ق ( ∠ ١ ) = ق ( ∠ ٢ ) لتطابق أقواسهما .
∴ زوايا القاعدة في المثلث هـ جـ ء متطابقة .
∴ $\Delta$ متساوي الساقين .

## التقـويم

بنائى من خلال متابعة المناقشة الصفية وحلول التمارين والمسائل ، بالإضافة إلى الإجابة عن أسئلة مثل التالية :

١ ) ما هو قياس الزاوية المحيطية ؟
٢ ) متى تتطابق الزاويتان المحيطيتان في الدائرة ؟
٣ ) ما هو قياس قوس الزاوية المحيطية القائمة ؟

# ٥ : ٧ الشكل الرباعي الدائري

**عدد الحصص :** خمس حصص .

## الأهـــداف

– يبرهن أن مجموع قياسي زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي ١٨٠° .
– يستنتج أنه إذا كان مجموع الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي ١٨٠° كان هذا الشكل رباعياً دائرياً.
– يبرهن أن الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري تساوي الزاوية المقابلة للمجاورة لها .

## المحتوى

– مجموع قياسي زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي ١٨٠° .
– يكون الشكل رباعياً دائرياً إذا كان مجموع قياسي زاويتين متقابلتين فيه ١٨٠° .
– الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري تطابق الزاوية المقابلة للمجاورة لها .

## الوسائل

منقلة ، مسطرة ، فرجار ، طباشير ملون .

## تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في خمس حصص كالتالي :
الحصة الأولى : مبرهنة الشكل الرباعي الدائري .
الحصة الثانية : عكس المبرهنة .
الحصة الثالثة : الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري .
الحصتان الرابعة والخامسة : تمارين ومسائل .
يراعي المدرس عند تنفيذ الدرس ما يلي :
– يمهد للدرس بمراجعة للمفاهيم الأساسية والتي تعتبر متطلبات أساسية وذات علاقة بالموضوع .

- يقدم المدرس للطلبة تعريف الشكل الرباعي الدائري من خلال الرسم ، وكذا الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي،وكما هو موضح في كتاب الطالب .
- يشرك الطلبة في برهنة أن مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري تساوي ١٨٠ْ، وذلك باستخدام الطريقة الاستنتاجية في ذلك .
- بعد تأكد المدرس من استيعاب الطلبة للبرهان يقدم لهم المثال الذي يأتي بعد المبرهنة ويناقشهم فيه حتى يصل إلى المطلوب .
- يقدم المدرس عكس المبرهنة بواسطة النشاط الذي يسبقها حتى يصل إلى المنطوق ، ويطلب من بعض الطلبة ترجمة هذا المنطوق ، ثم يناقشهم في المثال الذي في كتاب الطالب حتى يصل إلى المطلوب .
- يوضح المدرس للطلبة أن الزاوية خارجة عن الشكل الرباعي الدائري من خلال الرسم والشرح والمناقشة حتى يتأكد من استيعابهم للمفهوم ، ثم يقدم المبرهنة مستخدماً الرسوم التوضيحية ، والطريقة الاستنتاجية للوصول إلى المطلوب وبمشاركة الطلبه له في ذلك .
- يناقش مع الطلبة المثال الذي في كتاب الطالب خطوة خطوة .
- يحدد المدرس في الحصتين الرابعة والخامسة تمارين صفية وواجبات منزلية للطلبة ، وعليه متابعتهم وتصحيح الأخطاء التي يقعون فيها وتعزيز الأداء الجيد لديهم .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ١ ] ∵ $\Delta$ ب جـ ء متساوي الساقين .

∴ ق ∢ جـ ب ء = ٤٠ْ وحيث أن مجموع زوايا المثلث = ١٨٠ْ .

∴ ق ∢ جـ = ١٠٠ْ ومنه نصل إلى المطلوب .

[ ٢ ] ق ∢ ا ب ء = ٣٢ْ .

[ ٥ ] يمكن الوصول إلى المطلوب من خلال إثبات أن مجموع قياس الزاويتين الداخليتين ا جـ هـ ، ا ء و يساوى ١٨٠ْ .

## التقــويم

يكون التقويم بنائيا من خلال المناقشة ومتابعة حلول التمارين الصفية والواجب المنزلي . كما يعطى مثل هذا التمرين كخطوة تقويم نهائية .

ا ب جـ ء شكل رباعي دائري فيه ∢ ا = ٤ س + ٤٠ْ ، ∢ جـ = ٥ س + ٥ْ .

أوجد قيمة س بالدرجات .

## ٥ : ٨ المـمــــاس

**عدد الحصص** : ست حصص .

### الأهـــــداف

١ ) يتعرف على مفهوم مماس الدائرة .

٢ ) يبرهــن أن مماس الدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المار بنقطة التماس .

٣ ) يتعرف على أنه لايمكن رسم أكثر من مماس واحد لدائرة من نقطة عليها .

٤ ) يتعرف على أن العمود المقام على مماس دائرة مــن نقطة التماس يمر بمركزها .

٥ ) يبرهــن أن المماســين المرسومــين لدائرة مــن نقطة خارجها متطابقان .

٦ ) يتعرف على أن المماسين المرسومين من نقطة خارج دائرة يقابلان زاويتين مركزيتين متطابقتين .

٧ ) يتعرف على أن القطعة المستقيمة الواصلة بين مركز دائرة ونقطة خارجها تنصف الزاوية التي ضلعاها مماسان للدائرة من تلك النقطة .

٨ ) يبرهن أن قياس الزاوية المحصورة بين المماس والوتر المار بنقطة التماس يساوى قياس الزاوية المحيطية المقابلة لوتر التماس من الجهة الأخرى .

٩ ) يتعرف على أنه إذا رسم مستقيم من إحدى نهايتي وتر في دائرة يصنع معه زاوية تساوى بالقياس الزاوية المحيطية المقابلة للوتر من الجهة الأخرى كان ذلك المستقيم مماساً للدائرة .

### المحتوى

– المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة من نقطة نهايته على الدائرة يكون مماساً للدائرة عند هذه النقطة .

– مماس الدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المار بنقطة التماس .

– لايمكن رسم أكثر من مماس واحد لدائرة مــن نقطة عليها .

– العمود المقام على مماس دائرة من نقطة التمــاس يمـر بمركزها .

– المماســان المرســومان لدائــرة مــن نقطـة خارجهـا متطابقان .

– المماسان المرسومان مــن نقطـة خــارج دائرة يقـابلان زاويتين مركزيتين متطابقتين .

– القطعة المستقيمـة الواصـلة بين مــركز دائرة ونقطـة خارجها تنصف الزاوية التي ضلعاها مماسا الدائرة من تلك النقطة .

– قياس الزاوية المحصورة بين المماس والوتـر المـار بنقطـة التماس يساوي قياس الزاوية المحيطية المقابلة لوتر التماس من الجهة الأخرى .

– إذا رسم مستقيـم من إحـدى نهايتـي وتر فـي دائرة يصنع معه زاوية تساوي بالقياس الزاوية المحيطية المقابلة للوتر من الجهة الأخرى كان هذا المستقيـم مماساً للدائرة .

### الوسائل

فرجار ، مسطرة ، طباشير ملونة ، منقلة .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في ست حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : المبرهنة ( ٥ – ١٠ )
الحصة الثانية : نتائج المبرهنة
الحصة الثالثة : المبرهنة ( ٥ – ١١ )
الحصة الرابعة : نتائج المبرهنة
الحصة الخامسة : مبرهنة ( ٥ – ١٢ )
الحصة السادسة : نتائج المبرهنة

عند تنفيذ الدرس تتم مراعاة ما يلي :

– ينفذ النشاط بمشاركة الطلبة وإضافة نقط أخرى على المستقيم ل ويوصل تلك النقط بمركز الدائرة وأخذ كل قطعة ناتجة عن التوصيل ومقارنته بطول القطعة ب م ، وإيجاد قياس الزاوية المحصورة بين كل مماس والمستقيم ل .

– يوجه الأسئلة التالية :

سمِّ أقصر قطعة مستقيمة تصل مركز الدائرة بالمستقيم المماس ل .

– هل توجد زاوية قائمة غير الزاوية م ب جـ ؟

– ماذا تستنتج ؟

– يشارك الطلبة في مناقشة الأمثلة وحل التمارين ؟

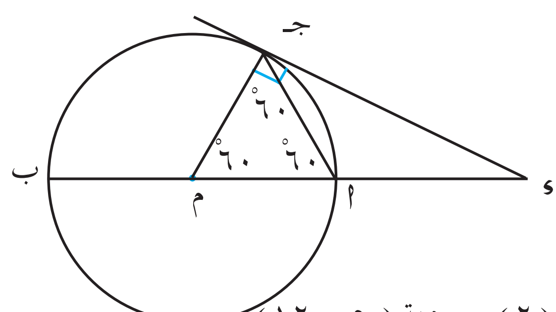
– يكلف الطلبة بحل أحد التمارين كواجب منزلي بعد الحصص ( ١ ، ٣ ، ٥ ) .

– يراجع الواجب المنزلي بداية الحصص ( ٢ ، ٤ ، ٦ ).

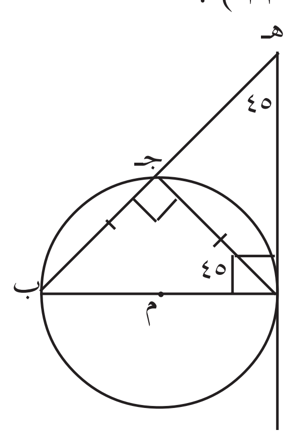
– يكلف الطلبة بحل بقية التمارين والمسائل في الصف ويشرف عليهم ويساعد من يحتاج المساعدة .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

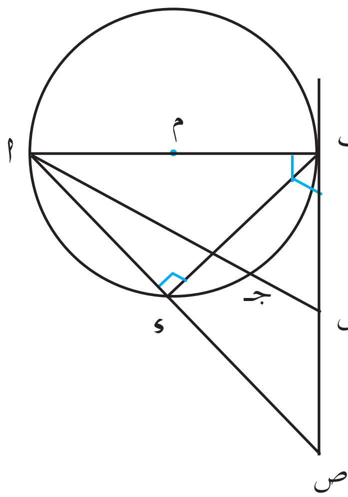
تمرين ( ١ ) مبرهنة ( ٥ – ١٠ ) .




تمرين ( ٢ ) مبرهنة ( ٥ – ١٢ ) .




تمرين ( ٣ ) مبرهنة ( ٥ – ١٠ ) .




تمرين ( ٩ ) : مبرهنة ( ٥ – ١٢ ) .

تمرين ( ١٠ ) : مبرهنة ( ٥ – ١٢ )

ق ( ∡ أ ) = ٤٦° ، ق( ∡ ب ) = ٧٩° ،

ق( ∡ جـ ) = ٥٥° .

## التقـويم

– يتم التقويم بنائيا من خلال المناقشات ومتابعة حلول الواجبات المنزلية واالتمارين الصفية .

– يكلف الطلبة بحل تمريناً كالتالي في نهاية الحصة السادسة من النقطة أ خارج الدائرة م رسم المماسين $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ يمسانها في ب ، جـ . فرضت النقطة ء على القوس الأكبر ب جـ ، فإذا كان :

قياس ( ∡ ب جـ أ ) = ٨٠° ، فأثبت أن :

ق ( ∡ ب ء جـ ) = ق ( ∡ ء جـ ب ) = ٦٥° .

# ٥ : ٩ الأوضاع النسبية لدائرتين

**عدد الحصص :** خمس حصص .

## الأهـــداف

١ ) يتعرف على وضع دائرتين في كل مما يأتي :
أ – الدائرتان منفصلتان .
ب – الدائرتان متماستان .
جـ – الدائرتان متقاطعتان .

٢ ) يبرهن أن نقطة التماس لدائرتين متقاطعتين تقع على خط المركزين .

٣ ) يبرهن أن خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على الوتر المشترك وينصفه .

## المحتوى

– نقطة التماس لدائرتين متقاطعتين تقع على خط المركزين .

– خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك وينصفه .

## الوسائل

فرجار ، منقلة ، طباشير ملونة ، مسطرة .

## تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : الأوضاع المختلفة لدائرتين .
الحصة الثانية : مبرهنة ( ٥ – ١٣ ) .
الحصة الثالثة : تمارين ومسائل .
الحصة الرابعة : مبرهنة ( ٥ – ١٤ ) .
الحصة الخامسة : تمارين ومسائل .

يراعي المدرس الآتي عند تنفيذ الدرس :

– يستخدم الفرجار والمسطرة لرسم الأنشطة المتعلقة بالدرس ( الأوضاع المختلفة لدائرتين – المبرهنات – الأمثلة والتمارين ) .

– يؤكد على أن :

- خط المركزين هو ذلك الخط المستقيم الذي يصل بين مركزي الدائرتين .
- البعد بين االمركزين | م$_١$ م$_٢$ | هو القطعة التي تصل بين مركزي الدائرتين .
- الوتر المشترك هو القطعة المستقيمة التي تصل نقطتي التقاطع للدائرتين المتقاطعتين ؟
- المماس المشترك هو المستقيم المار بنقطة التماس للدائرتين المتماستين ، أو هو المستقيم الذي يمس كلا الدائرتين في نقطة .

– يشرك طلبته في التعبير عن منطوق المبرهنة / التمرين بشكل هندسي .

– يؤكد أن حفظ البرهان للمبرهنة / التمرين لايعتد به إذا لم يقرن بالرسم .

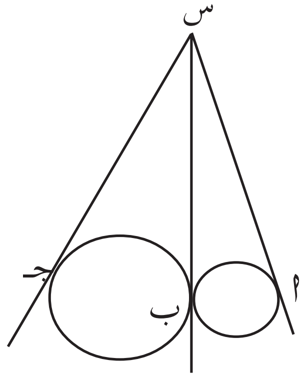
– يكلف طلبته بحل بعض التمارين كواجبات منزلية وذلك في نهاية الحصص ( ٢ ، ٤ ) .

– يناقش مع طلبته حلول الواجبات المنزلية ويصحح أخطائهم ويعالج صعوباتهم .

– يكلف طلبته في حل التمارين والمسائل ، ويشرف عليهم أثناء الحل لتقييم تحصيلهم وتحديد الصعوبات التي يواجهونها ، ثم معالجتها .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

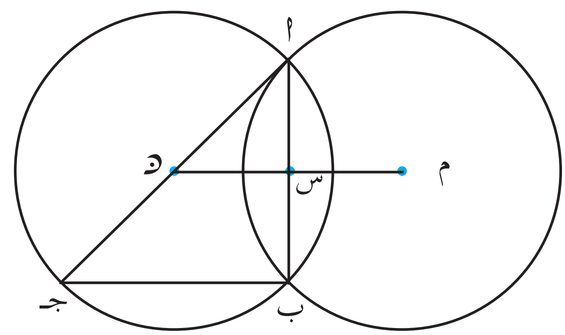
تمرين ( ٢ ) . مبرهنة ( ٥ – ١٤ )



## التقــويم

يكون التقويم بنائياً من خلال مشاركة الطلبة في الصف ومن خلال متابعة وحل التدريبات الصفية والواجبات يعطى تمريناً كالتالي في نهاية الحصة الخامسة كخطوة تقويم .

في الشكل المرسوم ادناه :




إذا كان :

|أس| = ٤ سم ، |س د| = ٤ سم .

أوجد طول كل من : $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ مع ذكر السبب .

## ٥ : ١٠ تمارين ومسائل عامة

**عدد الحصص** : ثلاث حصص .

### الهــدف

يهدف هذا الدرس إلى تثبيت المفاهيم والتعميمات والمهارات التي أعطيت في هذه الوحدة .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في ثلاث حصص على أن يقوم المدرس بمراعاة ما يلي :

- تغطى التمارين والمسائل في هذا الدرس كل أهداف الوحدة وذلك من أجل تعميق المفاهيم وتثبيتها وإتقان المهارات .
- تكليف الطلبة بحل بعض التمارين والمسائل كتدريبات صفية ، والبعض الآخر كواجب منزلي .
- ترصد الأهداف التي لم تتحقق لدى الطلبة والأخطاء والصعوبات التي يقعون بها .
- يتم معالجة الأخطاء والصعوبات التي واجهت الطلبة من خلال حل التمارين والمسائل .
- تكليف الطلبة بحل الاختبار في كتاب الطالب كواجب منزلي استعداداً لاختبار الوحدة في الحصة التالية .

### إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[٢] $\overline{\text{جـ د}}$ = ١٠ سم .

[٤] ق ( ∠ س ع ص ) = ٢٠° .

ق ( ∠ ع ص س ) = ٥٠° .

[٥] الإجابة للزاويتين ٤٥° .

[٦] س = ٤٥° ، ص = ٤٠° .

[٧] إثبات المبرهنة .

[٨] ق ( ∠ أ م ب ) = ٢٤٠° .

## ٥ : ١١ اختبـــار الوحـــدة

**عدد الحصص** : حصتان .

### الهـــدف

يهدف إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : يعطـى الاختبـار الذي فـي الدليل أو اختبار آخر مشابه من إعداد المدرس بعد أن يكون الطلبة قد حلوا الاختبار الوارد في كتاب الطالب .

الحصة الثانية : يتم مناقشة الصعوبات التي واجهت الطلبة بعد تصحيح أوراق الإجابات بغرض التغلب عليها . كما يتم تصحيح ما قد وقع فيه الطلبه من أخطاء .

وفيما يلي جدول يوضح أرقام أسئلة الاختبار والأهداف التي تقيسها تلك الأسئلة .

| رقم السؤال | رقم الفقرة | رقـم الهـدف |
|---|---|---|
| ١ | أ | ١ |
| | ب | ١ |
| ٢ | أ | ٧ |
| | ب | ٤ |
| | جـ | ١٠ |
| | ء | ٥ |
| | هـ | ٨ |
| ٣ | | ٢ |
| ٤ | | ٣ ، ٦ |
| ٥ | | ٨ |
| ٦ | | ١١ ، ١٢ ، ١٣ |
| ٧ | | ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ |

**الاختبـــار :**

[ ١ ] أكمل الفراغات التالية :

(أ) الدائرة هي مجموعة النقاط في المستوى التي تبعد ....... ثابتة ........ ثابتا .

( ب ) القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين من الدائرة تسمى ........... الدائرة .

[ ٢ ] ضع دائرة حول الأجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

(أ) نستخدم العلاقة $\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{ط نق}^2} = \frac{\text{س}^\circ}{٣٦٠^\circ}$

لايجاد :

١ – مساحة القطاع الكبير .

٢ – محيط القطاع الصغير .

٣ – مساحة القطاع الصغير .

( ب ) درجة قياس القوس الصغير يساوى :

١ – درجة قياس زاويته المركزية .

٢ – ١٨٠° .

٣ – قياس زاويته المحيطية .

( جـ ) الزاوية المحيطية القائمة تقابل قوس قياسه :

١ – ٩٠° .    ٢ – ١٨٠° .

٣ – ٣٦٠° – ٩٠° .

( ء ) في الدائرة ، تتطابق الزاويتان المركزيتان إذا :

١ – تطابق قوسيهما .

٢ – كانتـا مرسـومتـين على قطعــة دائريـة واحدة .

٣ – كان مجموعهما = ١٨٠° .

( هـ ) قياس الزاوية المركزية هي :

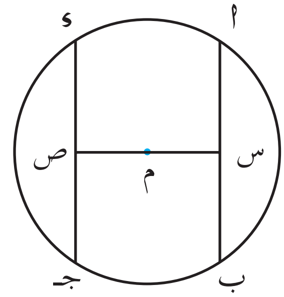
١ – ضعــف قيـاس الزاوية المشتـركـة معهـا بالقوس .

٢ – نصـف قيـاس الزاويـة المحيطيـة المشتركة معها بالقوس .

٣ – قيـاس الزاوية المحيطيـة المشـتركة معها بالقوس .

[٣] $\overline{ا ب}$ وتر في دائرة مركزها «م» ونصف قطرها ٥سم ، $\overline{م س} \perp \overline{ا ب}$ . فإذا علم أن : |م س| = ٣سم احسب طول $\overline{ا ب}$ .

[٤] من الشكل المرسوم ادناه :

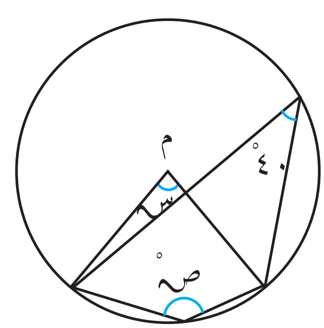



م دائرة $\overline{ا ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متساويان فيها س منتصف $\overline{ا ب}$ ، ص منتصف $\overline{جـ ء}$ .

أثبت أن :

ق ( ∢ ا س ص ) = ق ( ∢ جـ ص س )

[٥] في الشكل المرسوم ادناه :




م مركز الدائرة ، أوجد قيم س ، ص بالدرجات .

[٦] ا ب جـ ء شكل رباعي فيه :

ق ( ∢ ا ب ء) = ٣٥° ، ق ( ∢ ا ء ب ) = ٤٥° ،

ق ( ∢ ب جـ ء)= ٧٥° .

برهن على أن الشكل ا ب جـ ء رباعي دائري .

[٧] $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا جـ}$ وتران متساويان في دائرة ، $\overleftarrow{ا س}$ مماس لها .

أثبت أن : $\overleftarrow{ا س}$ // $\overline{ب جـ}$ .

# الوحدة السادسة

# هندسة الاحداثيات والتحويلات

## جدول توزيع الحصص

| البند | الموضوع | عدد الحصص |
|---|---|---|
| ٦ – ١ | البعد بين نقطتين | ٣ |
| ٦ – ٢ | تنصيف قطعة مستقيمة | ٣ |
| ٦ – ٣ | الانعكاس في محور | ٥ |
| ٦ – ٤ | الانسحاب | ٣ |
| ٦ – ٥ | الدوران | ٥ |
| ٦ – ٦ | التكبير | ٥ |
| ٦ – ٧ | تمارين عامة ومسائل | ٢ |
| ٦ – ٨ | اختبار الوحدة | ٢ |
| | المجموع | ٢٨ |

## أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يذكر قانون البعد بين نقطتين في مستوى الإحداثيات .

٢ – يجد البعد بين نقطتين في مستوى الإحداثيات .

٣ – يجد إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة .

٤ – يرسم صورة شكل هندسي بسيط بانعكاس في محور .

٥ – يتعرف على خواص الانعكاس .

٦ – يتعرف على الأشكال المتناظرة حول محور .

٧ – يرسم صورة شكل هندسي بانسحاب علمت مسافته واتجاهه .

٨ – يتعرف على خواص الانسحاب .

٩ – يعرف الدوران .

١٠ – يرسم صورة شكل هندسي بسيط بدوران معلوم مركزه وزاويته واتجاهه .

١١ – يتعرف على خواص الدوران .

١٢ – يعرف التكبير .

١٣ – يرسم صورة شكل هندسي بسيط تحت تأثير تكبير معلوم مركزه ومعامله .

١٤ – يتعرف على خواص التكبير .

**لمحــة تاريخيــة :**

يوجد اختلاف في تحديد من اكتشف الهندسة التحليلية وزمن هذا الاكتشاف ، فالاغريق لهم مساهمات كبيرة في الجبر الهندسي ، كما أن فكرة الإحداثيات قد استخدمت في العالم القديم من قبل المصريين والرومان في حساب المساحة ومن قبل اليونان لرسم الخرائط ، ومما لاشك فيه أن للعرب والمسلمين دورهم البارز في هذا المجال ، فقد استخدموا الجبر في حل بعض المسائل الهندسية ، والهندسة في حل بعض المسائل الجبرية وكانوا بذلك واضعي أسس الهندسة التحليلية .

ويعد « أبو الحسن ثابت بن قرة ( ٨٣٥ – ٩١١م ) » من أعظم علماء عصره فقد كان حجه في جميع فروع المعرفة ، وإليه يعود الفضل في تأسيس كثير من فروع الرياضيات مثل نظرية الأعداد والهندسة التحليلية؛ إلاّ أن الكثير من أعماله تنسب بالخطأ المتعمد إلى علماء أوربيين في القرن السابع عشر ، وهذا يأتي في سياق ما يطلق عليه بـ( فكرة غربية العلم الكلاسيكي ) والتي تبنى على القول بأن العلم الكلاسيكي في جوهرة أوربى وأنه يمكن استكشاف أصوله مباشرة في العلم والفلسفة اليونانية ، وإن كانت هذه الفكرة قد تعدلت في القرن العشرين إلا أنه لايزال لها تأثير ضمن الايدلوجية التي ينطلق منها المؤلفون الغربيون لتاريخ الرياضيات . إن الفكرة الأساسية للهندسة الإحداثية ( التحليلية ) هي إثبات تناظر ما بين الأزواج المرتبة لأعداد حقيقية ونقاط في المستوى ، ومن ثم إمكانية قيام تناظر بين منحنيات في المستوى ومعادلات في متغيرين ؛ فكل نقطة في المستوى تمثل زوجا من الأعداد الحقيقية والعكس صحيح ، كما أنه لكل منحنى في المستوى توجد معادلة محددة تمثله والعكس صحيح أيضاً . لذلك فدراسة الهندسة الإحداثية تعمق فهم الطالب لكلٍ من الأعداد والأشكال الهندسية لأنها تتيح له طريقة جديدة لدراسة نقط المستوى والأشكال المستوية من خلال تمثيلها عددياً .

أما هندسة التحويلات التي تشكل جزءاً رئيساً من مواد هذه الوحدة فهي مرتبطة بالهندسة الإحداثية من حيث أنها تتيح للطالب دراسة الأشكال الهندسية بطريقة تختلف عن تلك التي درسها في هندسة أقليدس ، وجوهر هذا النوع من الهندسة هو إيجاد تقابل بين نقاط المستوى « تحويل هندسي » .ومما يجدر الإشارة إليه هنا أن نظام الإحداثيات في المستوى يمكن أن يكون متعامداً أو غير متعامد « أن تكون المحاور مائلة مثلاً » وبناء عليه يتم دراسة التحويلات الهندسية « كالانعكاس والانسحاب مثلاً » في المستوى الإحداثي المتعامد ، أو في مستويات مائلة المحاور ( تقاطع مستقيمين مائلين ) بالإضافة إلى ذلك هناك بعض الأنظمة الإحداثية المستوية الأخرى غير الأنظمة العمودية والمائلة ، إذ يمكن بناء أنظمة إحداثيات جديدة بسهولة . فكل ما نحتاجه اطار ملائم لمرجع مع بعض قواعد مصاحبة تقول لنا كيفية تعيين نقطة في مستوى بطريقة مجموعة مرتبة من أعداد مرتبطة بإطار المرجع . إن الأنظمة الديكارتية شائعة في الاستخدامات وقد تطورت كثيراً ، ومن أمثلة أنظمة الاحداثيات الأخرى نظام الاحداثيات القطبية « برنولي ( ١٦٥١ – ١٧٠٥م ) » ، حيث يكون إطارالمرجع فيها شعاع لانهائي بينما تعين النقطة بزوج من إعداد حقيقية يمثل إحدهما مسافة والآخر زاوية .

**تقسيم الوحدة :**

تحتوي هذه الوحدة على ثمانية بنود :

في البند الأول والثاني نستكمل دراسة موضوعي البعد بين نقطتين وتنصيف قطعة مستقيمة ، في مستوى إحداثي . أما البندان الثالث والرابع نقدم فيهما توسيع لموضوعي الانعكاس والانسحاب ، وفي البندين الخامس والسادس نتناول تحويلين هندسيين جديدين هما الدوران والتكبير ، حيث تم تقديمهما بطريقة مبسطة تتناسب مع مستوى طالب الصف التاسع ، وتختتم الوحدة بالتمارين العامة ( البند السابع )، اختبار الوحدة ( البند الثامن ) .

**المفاهيم والمصطلحات :**

- الانعكاس في محور
- محور الانعكاس
- التناظر حول محور
- محور التناظر
- الدوران
- مركز الدوران
- زاوية الدوران
- دوران موجب

  ء ( م ، هـْ )
- دوران سالب

  ء ( م ، ـهـْ )
- تحويل متقايس
- التكبير
- مركز التكبير
- معامل التكبير

# ٦ : ١ البعد بين نقطتين

**عدد الحصص** : ثلاثة حصص .

## الهـــدف

يجد البعد بين نقطتين .

## المحتوى

إذا كانت أ ( $س_١$ ، $ص_١$ ) ، ب ( $س_٢$ ، $ص_٢$ )، فإن :

$$|أ ب| = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

## الوسائل

أوراق رسم بياني ، طباشير ملون .

## تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في ثلاثة حصص على النحو التالي :

الحصتان الأولى والثانية : البعد بين نقطتين .

الحصة الثالثة : تمارين ومسائل .

يراعي المدرس أثناء تنفيذ الدرس ما يلي :

– مراجعة للمفاهيم والتعميمات التي تشكل متطلبات أساسية للدرس الحالي ، مثل البعد بين نقطتين على مستقيم يوازي أحد المحورين الإحداثيين ، ومبرهنة فيثاغورس .

– توظيف مبرهنة فيثاغورس في التوصل إلى قانون البعد بين نقطتين في المستوى الإحداثي وذلك على مرحلتين :

الأولى : أخذ نقطتين معلومتين أ ( ٢ ، ٢ ) ، ب( ٥ ، ٦ ) مثلاً ، وتعيين |أ ب| كما ورد في النشاط الأول في كتاب الطالب ، ويمكن تكرار ذلك باختبار أي نقطتين وحساب البعد بينهما باستخدام ورق المربعات أو الرسم البياني .

الثانية : التوصل إلى التعميم ( القانون ) ، وذلك بأخذ أي نقطتين أ ( $س_١$ ، $ص_١$ ) ، ب ( $س_٢$ ، $ص_٢$ ) واتباع الأسلوب الموضح في النشاط الثاني في كتاب الطالب .

– توظيف قانون البعد بين نقطتين في تثبيت بعض الأفكار التي سبق أن تعرض لها الطالب مثل :

- مجموع طولي أي ضلعين في مثلث يكون أكبر من طول الضلع الثالث .
- تكون النقاط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة إذا كان |أ ب| + |ب جـ| = |أ جـ| .

– الربط بين موضوع الدرس الحالي وبعض المواضيع التي سبق للطالب دراستها مثل الأشكال الرباعية ، بحيث تتاح للطالب تعزيز المكتسبات السابقة ، مثل الحالات التي يكون فيها الشكل الرباعي : متوازي أضلاع ، مستطيل، مربع . . . الخ .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ٢ ] |أ ب| = ٨ ، |أ جـ| = ١٠ ، |ب جـ| = ٦ ومنه $|أ جـ|^٢ = |أ ب|^٢ + |ب جـ|^٢$ فالمثلث قائم الزاوية في ب

[ ٤ ] تصوب الأخطاء الطباعية في كتاب الطالب وكما يلي : م( ١ ، ٥ ) ، ﮞ ( ٦ ، –٢ ) ، ل ( ٤ ، –٥ ) ، ط ( –١ ، ٢ ) ، فنجد أن |م ط| = |ﮞ ل| = $\sqrt{١٣}$ وهما ضلعان متقابلان ، |م ﮞ| = |ط ل| = $\sqrt{٧٤}$ وهما ضلعان متقابلان .

∴ الشكل م ﮞ ل ط متوازي أضلاع .

[ ٥ ] يحسب طول كل ضلع من أضلاع الرباعي سيجد أنها متساوية ويحسب طول كل من قطريه سيجد أنهما متساويان .

[ ٦ ] يصوب الخطأ الطباعي في كتاب الطالب ، حيث إحداثي النقطة و ( ٤ ، –١ ) وليس ( ٤ ، ١ ) ، ثم يحسب أطوال أضلاع الشكل سيجد أن :

|هـ و| = |ط ل| = ٥ ، |هـ ط| = |و ل| = ١٠

∴ الشكل هـ و ل ط متوازي أضلاع .

∵ |هـ ل| = |و ط| = $\sqrt{١٢٥}$ قطرا الشكل .

∴ هـ و ل ط مستطيل .

### التقويم

بنائي من خلال الأنشطة والمناقشات ومتابعة حلول الطلبة للتدريبات الصفية والواجبات المنزلية ، ويمكن تقديم التمرين التالي أو تمرين أخر مشابه في نهاية الحصة الثالثة .

أوجد أ ( ٢,٥ ، ٣ ) ، ب ( ٠ ، −٢ ) .

## ٦ : ٢ تنصيف قطعة مستقيمة

**عدد الحصص** : ثلاثة حصص .

### الهـــدف

يوجد إحداثي نقطة تنصيف قطعة مستقيمة .

### المحتوى

إذا كانت أ ( $س_1$ ، $ص_1$ ) ، ب ( $س_2$ ، $ص_2$ )، فإن إحداثي نقطة تنصيف $\overline{أب}$ ولتكن م هو

$$\left( \frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right) .$$

### الوسائل

أوراق رسم بياني ، طباشير ملون .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في ثلاثة حصص على النحو التالي :

الحصتان الأولى والثانية : تنصيف قطعة مستقيمة .

الحصة الثالثة : تمارين ومسائل .

وعلى المدرس أثناء تنفيذ الدرس مراعاة ما يلي :

– مراجعة « إحداثي نقطة تنصيف قطعة مستقيمة على مستقيم يوازي أحد المحورين الإحداثيين » .

– إشراك الطلبة في حوار ( أثناء تنفيذ أنشطة الكتاب ) يقودهم إلى استخلاص القانون الخاص بإحداثي نقطة تنصيف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي .

– من المهم الربط بين الموضوع الحالي والموضوع السابق أثناء مناقشة الأمثلة وبعض التمارين ، وكذا الربط بين الموضوعين من جهة ودراسة الرباعيات من جهة أخرى ، حيث يشكل هذان الموضوعان مدخلاً جديداً لدراسة خواص الرباعيات .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ٢ ] نوجد إحداثي كلٍ من النقطتين م ، د ، ثم نوجد

| م د | ، | س ع | بالمقارنة بينهما نجد أن

| م د | = $\sqrt{٢٠}$ ، | س ع | = $\sqrt{٨٠}$ ، ومنه

| م د | = $\frac{١}{٢}$ | س ع | .

[ ٤ ] نوجد إحداثيات النقاط هـ ، و ، م ، د ، ثم نحسب كلاً من | هـ و | ، | هـ د | ، | و م | ، | م د | ، نستنتج أن | هـ و | = | م د | ، | هـ د | = | و م | .

∴ الشكل متوازي أضلاع .

### التقويم

يتم التقويم بنائياً من خلال التدريبات الصفية والواجبات المنزلية ، ويمكن تقديم التمرين التالي أو تمرين مكافئ له كخطوة تقويم في نهاية الحصة الثالثة :

إذا كان أ (−١ ، ٢) ، ب (٣ ، −٤) فأوجد إحداثيات منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ .

## ٦ : ٣ الانعكاس

**عدد الحصص :** خمس حصص .

### الأهداف

١ – يتعرف على الانعكاس في محور ( مستقيم ) .

٢ – يرسم صورة شكل هندسي بسيط بانعكاس في محور .

٣ – يتعرف على خواص الانعكاس .

٤ – يتعرف على الشكل المتناظر حول محور .

٥ – يتعرف على محور التناظر .

### المحتوى

– لكل نقطة س في المستوى يمكن تعين صورة $\text{س}_١$ بالانعكاس في مستقيم ل من المستوى نفسه .

– تكون النقطة $\text{س}_١$ صورة للنقطة س بالانعكاس في المحور ل ، إذا كان :

١ – $\overline{\text{س س}_١} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$

٢ – | س د | = | د $\text{س}_١$ | ، حيث د هي نقطة تقاطع $\text{س س}_١$ مع $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، يسمى $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ محور الانعكاس .

– الانعكاس يحفظ الأطوال وقياس الزوايا .

– إذا كانت صورة كل نقطة من شكل بالانعكاس في المحور $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ هي نقطة على الشكل نفسه ، فإن الشكل يكون متناظراً حول $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، ويسمى $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ محور تناظر الشكل .

### الوسائل

ورق شفاف ، ورق مربعات ، طباشير ملون .

### تنفيذ الدرس

ينفذ الدرس في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : الانعكاس في محور .

الحصة الثانية : خواص الانعكاس .

الحصة الثالثة : محاور تناظر الأشكال .

الحصتان الرابعة والخامسة : تمارين ومسائل .

ويقوم المدرس أثناء تنفيذ الدرس بمراعاة ما يلي :

- التمهيد للدرس بمراجعة موضوع الانعكاس في أحد المحورين الاحداثيين .
- قبل تنفيذ النشاط ( ١ ) يشرح المدرس فكرة الطي وأهميتها كوسيلة لتحديد صورة نقطة بالانعكاس حول مستقيم ، أيضاً يذكّر الطلاب ببعض الطرق العملية لإنشاء عمود على مستقيم من نقطة خارجة عنه ( باستخدام المثلث القائم ، أو باستخدام المنقلة والمسطرة ) .
- إن إيجاد صورة نقطة في المستوى بالانعكاس في محور ( يختلف عن المحورين الاحداثيين ) يتطلب العودة إلى الهندسة الإنشائية ، ومن المهم هنا أن يكتسب الطالب المهارات اللازمة لإنشاء صورة شكل هندسي بسيط ( لايتجاوز المثلث ) بالانعكاس في محور مع ضرورة استخدام هندسة الاحداثيات عند تنفيذ الأنشطة المتعلقة بخواص الانعكاس .
- لايمكن بالطبع المبرهنة على خواص الانعكاس ، ويكتفي بالانشطة الواردة في الكتاب لاستنتاج بعضها ، ويمكن التحقق من الخواص الأخرى ببعض الامثلة .
- خواص الانعكاس الواردة في كتاب الطالب تشكل أهم الخواص ، ويمكن للمدرس توجيه الطلاب إلى استنتاج بعض الخواص الأخرى مثل ( الحفاظ على التعامد والتوازي ) .
- التأكيد على أن الانعكاس في محور يربط كل نقطة في المستوى بنقطة أخرى في نفس المستوى مهما كان موقع هذه النقطة من محور الانعكاس ، وأن صورة أي نقطة على محور الانعكاس هي النقطة نفسها .
- ان إدراك وتحديد محور تناظر شكل أمراً يحتاج عناية من الطلبة ، لذلك يمكن استخدام الورق الشفاف وإعادة رسم الشكل واستخدام فكرة الطي للتحقق من مدى تطابق الجزأين الناتجين من طي الشكل على محور التناظر ، ويمكن استخدام الفكرة لتحديد عدد محاور التناظر للشكل المتناظر ، وفيما يلي نعطي بعض التعميمات حول محاور التناظر بهدف إثراء معلومات المدرس فقط :

١ ) لكل قطعة مستقيمة محورا تناظر ، المستقيم الذي يحويها ، منصفها العمودي .

٢ ) للقطاع الزاوي محور تناظر واحد هو المستقيم المنصف له .

٣ )للمستقيمين المتعامدين أربعة محاور متناظرة هي : المستقيمان نفساهما ، ومنصفا الزاوية القائمة المحددة بهما .

٤ ) في المثلث المتساوي الساقين ، الارتفاع المار في رأس الساقين هو محور تناظر للمثلث .

٥ ) في المثلث المتساوي الأضلاع ، الارتفاعات الثلاثة هي محاور تناظر .

٦ ) للمربع أربعة محاور تناظرهما القطران والعمودان المنصفان لكل ضلعين مقابلين .

٧ ) للدائرة عدد لانهائي من محاور التناظر وهي كل أقطارها .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ٢ ] يتم رسم صورة نقاط نهايات القطع المستقيمة المحددة لكل شكل ، ثم التوصيل بين هذه الصور فنحصل على صورة الشكل .

[٣] ١ . ب نفسها . ٣ . $\overline{\text{جـب}}$ .

٥ . أ جـ، جـ .

[٧] أ ) أربعة . ب ) إثنان .

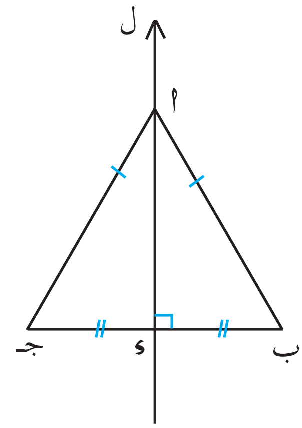
جـ) محور تناظر واحد .

ء ) عدد لانهائي من المحاور . لأن كل قطر في الدائرة يقسمهما إلى جزئين متطابقين .

## التقويم

يتم التقويم بنائياً من خلال المناقشات والأنشطة ومن خلال متابعة حل التدريبات الصفية والواجبات المنزلية ،كما يتم تقديم التمرين التالي أو تمرين مكافئ له كخطوة تقويم في نهاية الحصة الخامسة .

تأمل الشكل المرسوم أدناه :




أكمل ما يلي :

١ ) صورة النقطة ب بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$ هي . . . .

٢ ) صورة $\overline{ا ء}$ هي . . . . . . .

٣ ) ق( ∢ جـ ) = ق( ∢ . . . . ) .

٤ ) | ب ء | = . . . . . .

٥ ) يسمى الشكل ا ب جـ شكلاً . . . حول . . . .

٦ ) المستقيم ل هو محور تناظر للشكل . . . .

## ٦ : ٤ الانسحاب

**عدد الحصص** : ثلاث حصص .

### الأهداف

١ – يرسم صورة نقطة بانسحاب معلوم مسافته واتجاهه .

٢ – يرسم صورة شكل هندسي بسيط بانسحاب معلوم مسافته واتجاهه .

٣ – يتعرف على خواص الانسحاب .

### المحتوى

– يتحدد الانسحاب بعنصرين هما مقداره ( مسافته )، واتجاهه .

– لأي نقطة س في المستوى يمكن تعيين صورة $س_١$ في نفس المستوى بانسحاب محدد .

– تكون النقطة $س_١$ صورة للنقطة س بانسحاب مقداره ا وباتجاه $\overleftrightarrow{ل}$ إذا كان :

١ – $\overleftarrow{س س_١} \parallel \overleftrightarrow{ل}$ .

٢ – $| س س_١ | = ا$ .

### الوسائل

أوراق رسم بياني ، مسطرة ، مثلث قائم ، طباشير ملون .

### تنفيذ الدرس

ينفذ الدرس بثلاث حصص على النحو التالي :

الحصتان الأولى والثانية : الانسحاب .

الحصة الثالثة : تمارين ومسائل .

وعلى المدرس أثناء تنفيذ الدرس مراعاة ما يلي :

– التمهيد للدرس بمراجعة مفهوم الانسحاب باتجاه أحد المحورين الإحداثيين .

– مراجعة طرق إنشاء مستقيم موازٍ لمستقيم معلوم .

– فكرة الانسحاب يمكن أن تقدم بطريقة مبسطة

وبأسلوب عملي من خلال تحريك كتاب ، أو دفتر أو علبة الأوراق الهندسية على أن يتم التحريك مسافة محددة ، وفي اتجاه معين مسبقاً ، ثم التعامل مع مناطق مستوية من الورق المقوى ( مثلثة ، مربعة، . . . ) وفي النهاية تطرح أسئلة مثل :

ما المسافة التي تحركتها كل نقطة ؟ ما الاتجاه الذي حدثت فيه الحركة ؟ هل تغير الشكل ؟ . . . . الخ .

- يلزم تدريب الطلاب على استخدام الأدوات الهندسية في رسم صورة شكل هندسي بسيط ( قطعة مستقيمة ، مثلث ) تحت تأثير انسحاب محدد ، وعدم الاقتصار على الهندسة الإحداثية في دراسة الانسحاب .
- يلزم الربط بين مفهومي الانعكاس والانسحاب ، وتنمية قدرة الطالب على التمييز بين المفهومين . حيث يجب أن يدرك الطالب أنه في الانسحاب لاتوجد نقطة ثابتة ( جميع النقاط تتحرك بنفس القدر وفي نفس الاتجاه ) بينما في الانعكاس تعتبر كل نقطة على محور الانعكاس هي نقطة ثابتة ( صورتها هي نفسها ) .
- يلزم أن يدرك الطالب أن الانسحاب يكون معلوماً إذا علمت مسافته واتجاهه .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ٣ ] المسافة = ٣ وحدات ، الاتجاه محور السينات الموجب ، $\text{أ}_1$( ٥ ، ٣ ) .

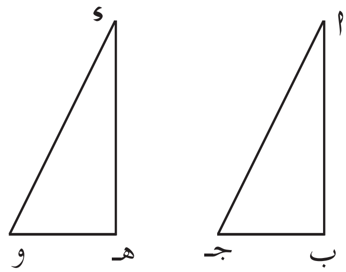
[ ٤ ] ١ ) $\text{أ}_1$( ١ ، ١ ) ، $\text{ب}_1$( – ٣ ، –١ ) ، $\text{جـ}_1$( –١ ، ٤ ) .

٢ ) $\text{أ}_1$( ٢ ، ١ )، $\text{ب}_1$( ٦ ، –١ )، $\text{جـ}_1$( ٤ ، ٤ ).

## التقـويم

بنائي من خلال التدريبات الصفية ومناقشة الواجبات المنزلية ، ويتم تقديم التمرين التالي أو تمرين مكافئ له في نهاية الحصة الثالثة كخطوة تقويم .

إذا كان $\Delta$ ء هـ و هو صورة $\Delta$أ ب جـ بانسحاب محدد . فبين صحة أو خطأ كلٍّ مما يلي :




١ ) صورة النقطة جـ هي النقطة و .

٢ ) اتجاه الانسحاب هو $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ .

٣ ) مقدار الانسحاب هو |جـ و| .

٤ ) ق( ∡ ء ) = ق( ∡ أ ) .

٥ ) |هـ و| = | ب جـ | .

## ٦ : ٥ الـــدوران

**عدد الحصص :** خمس حصص .

### الأهـــداف

١ – يعرِّف الدوران .

٢ – يرسم صورة شكل هندسي بسيط بدوران معلوم .

٣ – يعين صورة شكل هندسي معلوم في المستوى الإحداثي تحت تأثير دوران مركزه نقطة الأصل وزاويته ( $\angle$ ٩٠° ) .

٤ – يتعرف على خواص الدوران .

### المحتوى

– لكل نقطة ( س ) في المستوى يمكن تعيين صورة ( س١ ) بدوران معلوم مركزه وزاويته .

– تكون النقطة ( س١ ) صورة للنقطة ( س ) بدوران ء ( م ، هـْ ) ، إذا كان : | م س | = | م س١ | ، وق( $\measuredangle$ س م س١ ) = هـْ .

– صورة النقطة ( س، ص ) في المستوى الإحداثي بدوران ء ( م ، ٩٠° ) هي النقطة ( – ص ، س ) ، حيث م نقطة الأصل .

– صورة النقطة ( س ، ص ) في المستوى الإحداثي بدوران ء ( م ، –٩٠° ) هي النقطة ( ص ، – س )، حيث م نقطة الأصل .

– الدوران يحفظ الأطوال ويحفظ قياس الزوايا .

### الوسائل

فرجار ، مسطرة ، منقلة ، أوراق رسم بياني ، طباشير ملون .

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في خمس حصص على النحو التالي :

الثلاث الحصص الأولى : الدوران .

الحصة الرابعة : خواص الدوران .

الحصة الخامسة : تمارين ومسائل .

وعند تنفيذ الدرس يراعى ما يلي :

– يُمهد للدرس ببعض الأمثلة من الواقع على الحركات الدورانية مثل حركة عقارب الساعة ، حركة إطار السيارات ، ... الخ ، ثم يستخدم المدخل الوارد في كتاب الطالب لتحديد اتجاه الدوران ( موجب أو سالب ) .

– قبل تنفيذ النشاط ( ١ ) يراجع مع الطلبة بعض الانشاءات الهندسية التي تشكل متطلبات ضرورية للدرس ، مثل إنشاء زاوية معلوم قياسها وطول أحد ضلعيها باستخدام المنقلة والمسطرة ، رسم دائرة بمعلومية مركزها ونصف قطرها باستخدام الفرجار .

– عند تنفيذ النشاط ( ١ ) وبعد أن ينشئ الطلبة القطعة المستقيمة م ﺃ ،يمكن للطالب أن يتبع أسلوبين لتحديد ﺃ١ صورة ﺃ بالدوران المعطاة : الأول هو رسم زاوية قياسها ٤٥° أحد ضلعيها $\overline{\text{م ﺃ}}$ ورأسها النقطة م ، ثم رسم قوس من النقطة ﺃ ( فتحة الفرجار يقدر | م ﺃ| يقطع الضلع الأخرى في نقطة ﺃ١ هي صورة ﺃ ( كما ورد في كتاب الطالب ) ، والأسلوب الأخر يتلخص في أن يرسم قوساً من النقطة ﺃ ( بالاتجاه الموجب وبفتحة الفرجال بقدر | م ﺃ| ) ، ثم يرسم زاوية قياسها ٤٥° أحد ضلعيها م ﺃ ورأسها النقطة م والضلع الأخر يقطع القوس في نقطة ﺃ١ هي صورة ﺃ .

لاحظ أن الأسلوب الأول يكون مناسباً عندما يكون طول نصف قطر المنقلة المستخدمة أكبر من | م ﺃ| ، أما الأسلوب الاخر يصلح للحالتين .

– عند تناول الدوران بالاستعانة بالمستوى الإحداثي من الضروري أن ينفذ الطلبة النشاط الوارد في الكتاب تحت إشراف وتوجيه المدرس بما يضمن أن يجعل الطلبة يستقرؤوا بأنفسهم التعميمين التاليين :

ى (م ، + ٩٠°) : (س ، ص) ⟵ (− ص ، س)

ى (م ، − ٩٠°) : (س ، ص) ⟵ (ص ، −س) .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[٢] ١) أ$_{١}$(٢ ، ٠)، ب$_{١}$(٠ ، ٥)، جـ$_{١}$(−٢ ، −٣)

٢) أ$_{١}$(−٢ ، ٠)، ب$_{١}$(٠ ، −٥)، جـ$_{١}$(٢ ، ٣)

[٤] يتم رسم صورة كل من س ، ص بالدوران المعطاة، ثـم نصـل بـين الصـورتين فنحصـل على صورة $\overline{\text{س ص}}$ .

[٦] الدوران الذي يجعل النقطة أ صورة للنقطة أ$_{١}$ هو (م ، ٤٥°) .

## التقـويم

يتم التقويم بنائياً من خلال المناقشات الصفية ومتابعة حل الواجبات الصفية والمنزلية ، وكما يقدم تمريناً كالتالي كخطوة تقويم نهاية الحصة الخامسة .

أوجـد صـورة كلٍ مـن النقاط الآتية تحت تأثير ى (م ، ٩٠°) ، حيث م نقطة الأصل :

أ(٣ ، ١)، ب(٠ ، ٣)، جـ(٥ ، −١)، ى(−١ ، −١)

# ٦ : ٦ التكبيــــر

**عدد الحصص :** خمس حصص .

## الأهـــداف

١ – يعرِّف التكبير .

٢ – يتعرف على كلٍ من مركز التكبير ومعامله .

٣ – يرسم صورة شكل هندسي بسيط تحت تأثير تكبير معلوم .

٤ – يتعرف على خواص التكبير .

## المحتوى

– لأي نقطة في المستوى يمكن تعين صورة س$_{١}$ بتكبير معلوم مركزه ومعامله .

– تكون النقطة س$_{١}$ صورة للنقطة س بتكبير مركزه النقطة م ومعامله أ إذا كان :

١) $\text{س}_{١} \in \overrightarrow{\text{م س}}$ .

٢) $\frac{\left|\text{م س}_{١}\right|}{\left|\text{م س}\right|} = \text{أ}$ .

– صورة النقطة (س ، ص) بتكبير مركزه نقطة الأصل ومعامله أ هي النقطة (أ س ، أ ص) .

## الوسائل

مسطرة ، طباشير ملون .

## تنفيذ الدرس

ينفذالدرس في خمس حصص على النحو التالي :

الثلاث الحصص الأولى : يتـم فيهـا تنـاول مفهـــوم التكبير، مركز التكبير ، معامله ، رسم صورة شكل هندسي بسيط بالتكبير .

الحصة الرابعة : خواص التكبير .

الحصة الخامسة : تمارين ومسائل .

وعند تنفيذ الدرس يراعى ما يلي :

– قبل تناول مفهوم التكبير يلزم التمييز بين التحويل الهندسي المتقايس والتحويل الهندسي غير المتقايس. كل من الانعكاس والانسحاب والدوران يحافظ على الطول ؛ فكل من الانعكاس والانسحاب والدوران تحويل متقايس . التكبير لايحافظ على الطول ؛ فالتكبير تحويل غير متقايس .

– لاحظ أننا استخدمنا «التكبير» ولم نستخدم مصطلح التصغير باعتبار أن معامل التكبير هو الذي يحدد ذلك :

ت ( م ، ﺍ ) تكبير إذا كان ﺍ > ١ .

وتصغير إذا كان ٠ < ﺍ < ١ .

– استخدام محاور الإحداثيات يسهل على الطالب تعيين صورة شكل بتكبير معلوم (الشكل الهندسي المعلوم في المستوى الإحداثي هو الشكل الذي حددت إحداثيات رؤوسه) ، ومع ذلك لابد من تدريب الطالب على تعيين صورة شكل هندسي بسيط بتكبير معلوم (مركزه ومعامله) دون الاستعانة بالمستوى الإحداثي .

– بالإضافة إلى خواص التكبير الواردة في كتاب الطالب، يمكن من خلال الأنشطة والتدريبات الصفية استقراء ما يلي :

- في التكبير تكون النقطة وصورتها في جهة واحدة من مركز التكبير .
- القطعة المستقيمة وصورتها بالتكبير متوازيتان .
- النسبة بين طول صورة القطعة المستقيمة وطول القطعة نفسها تساوى معامل التكبير .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ٢ ] ١ ) معامل التكبير ﻫ = $\frac{١٢}{٣}$ = ٤

٣ ) معامل التكبير ﻫ = $\frac{١}{٤}$ .

[ ٤ ] يتم أولاً تعيين احداثيات صورة رؤوس المثلث ﺍ ب جـ بالتكبير المعطاه ، نجد أن :

ﺍ ( ٢ ، ١ ) ⟵ ﺍ$_١$ ( ٤ ، ٢ )

ب ( ٠ ، ١ ) ⟵ ب$_١$ ( ٠ ، ٢ )

جـ ( –٢ ، –١ ) ⟵ جـ$_١$ ( –٤ ، –٢ )

ثم يتم رسم المثلث ﺍ$_١$ ب$_١$ جـ$_١$ .

[ ٥ ] باستخدام قانون البعد بين نقطتين يتم ايجاد كلاً من : | ﺍ ب | ، | ب جـ | ، | ﺍ جـ | ، | ﺍ$_١$ ب$_١$ | ، | ب$_١$ جـ$_١$ | ، | ﺍ$_١$ جـ$_١$ | ، ثم يتحقق من أن :

$$\frac{|ﺍ\,ب|}{|ﺍ_١\,ب_١|} = \frac{|ب\,جـ|}{|جـ_١\,ب_١|} = \frac{|ﺍ\,جـ|}{|ﺍ_١\,جـ_١|} = \frac{١}{٢}$$

= معامل التكبير

## التقـويم

يتم التقويم بنائياً من خلال الأنشطة الصفية ومناقشة ومتابعة حلول الواجبات الصفية والمنزلية ، ويعطى التمرين التالي أو تمرين مكافئ له كخطوة تقويم نهاية الحصة الخامسة .

– عين صورة كلٍ من النقاط الآتية تحت تأثير

ت( م ، ٥ ) حيث م نقطة الأصل : ﺍ(–١ ، ٠)،

ب ( $\frac{٢}{٥}$ ، –٢ ) ، جـ ( $\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{١}{٥}$ ) .

# ٦ : ٧ تمارين عامة ومسائل

**عدد الحصص** : حصتان .

## الهـــدف

تثبيت وتعميق المفاهيم وتطوير المهارات الواردة في هذه الوحدة .

## تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين ، وعلى المدرس خلال تنفيذ الدرس مراعاة ما يلي :

– الربط بين المفاهيم التي ،وردت في الوحدة بحيث يدرك الطالب الخصائص المشتركة بين التحويلات الهندسية ، ويميز بينها ، فمن الضروري مثلاً أن يدرك الطالب أن كلاً من الانعكاس والانسحاب والدوران والتكبير هو تحويل هندسي يحدد لكل نقطة في المستوى صورة في المستوى نفسه ، وأنه من الخواص المشتركة بين تلك التحويلات جميعها هي الحفاظ على قياس الزاوية بينما ينفرد التكبير بخاصية تغيير أبعاد الأشكال الهندسية( يكبر الأبعاد أو يصغرها بنسبة معينة هي معامل التكبير) .

– تفعيل دور الطالب هنا ضروري ، والوسيلة المثلى لذلك هي الواجبات المنزلية والتدريبات الصفية ، ويقتصر دور المدرس على التوجيه والاشراف ومعالجة الأخطاء والتغلب على الصعوبات التي تواجه الطلبة .

– في نهاية الحصة الثانية يكلف الطلبة بواجب منزلي وهو حل اختبار الوحدة الوارد في كتاب الطالب ، للتهيئة لاختبار الوحدة الوارد في الدليل .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ٣ ] ب ) انعكاس في محور السينات .

جـ ) ى( م ، + ٩٠° ) .

ى ) انسحاب في الاتجاه السالب لمحور السينات مقداره الوحدة .

هـ ) تكبير مركزه نقطة الأصل ومعامله $\frac{١}{٢}$ .

و ) انسحاب في الاتجاه الموجب لمحور الصادات مقداره ثلاث وحدات .

[ ٥ ] أ ) Δ ى م هـ . ب ) Δ ى س م .

جـ ) Δ م ص أ . ى ) Δ أ ب جـ .

هـ ) $\overleftrightarrow{ك}$ .

و ) $\overleftrightarrow{ل}$ لاحظ أن كلاً من الشكلين صورة للأخر بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$ .

[ ٧ ] أ ) $|ب جـ|^٢ = ٥٠$ ، $|أ جـ|^٢ = ٢٥$ ، $|أ ب|^٢ = ٢٥$ .

أي أن $|ب جـ|^٢ = |أ جـ|^٢ + |أ ب|^٢$

∴ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ .

ب ) ى( ٣ ، ٤٫٥ ) ، هـ( ٢٫٥ ، ١ )

جـ ) تكبير مركزه أ ومعامله ٢ .

لاحظ أن $\frac{|أ ب|}{|أ ى|} = \frac{|أ جـ|}{|أ هـ|} = \frac{|ب جـ|}{|ب هـ|} = ٢$

[ ٩ ] فكرة الحل تعتمد على التعويض في المعادلة المعطاة عن كل من س ، ص بقيمتها بعد التحويل ( صورتها ) . فمثلاً :

أ ) ∵ ( س ، ص ) ⟵ ( س ، – ص )

∴ صورة المستقيم الذي معادلته س –٢ ص +١١ = ٠

هي المستقيم الذي معادلته س – ٢ (–ص) + ١ = ٠

أي أن س + ٢ ص + ١ = ٠ .

جـ ) ∵ (س ، ص ) ⟵ ( س + ٢ ، ص )

∴ صورة المستقيم الذي معادلته س – ٢ ص +١ = ٠

هي المستقيم الذي معادلته س + ٢ –٢ص + ١ = ٠

أي أن س – ٢ ص + ٣ = ٠ .

## ٦ : ٨ اختبــــار الوحـــدة

**عدد الحصص** : حصتان .

### الهـــدف

قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

### تنفيذ الدرس

ينفذ الاختبار في حصتين على النحو التالي:

الحصة الأولى : يكلف الطلاب بحل الاختبار والذي يغطي الأهداف المتوقع انجازها من تدريس الوحدة ، حسب الجدول التالي:

| رقم السؤال | رقم الهـــدف |
|---|---|
| ١ | ١ ، ٢ ، ٣ |
| ٢ | ٤ ، ٥ |
| ٣ | ٧ ، ٨ |
| ٤ | ١٠ ، ١٣ |
| ٥ | ٩ ، ١٢ |
| ٦ | ١١ ، ١٤ |
| ٧ | ٦ |

يصحح الاختبار ويتم رصد الأخطاء للتعرف على الأهداف التي لم تتحقق .

الحصة االثانية : يتم فيها معالجة الأخطاء والتي برزت أثناء تصحيح الاختبار .

### الاختبـــار :

[ ١ ] ضع دائرة حول رقم الإجابة الصحيحة في كلٍ مما يلي:

أ) إذا كانت س ( $\text{أ}_1$ ، $\text{ب}_1$ ) ، ص( $\text{أ}_2$ ، $\text{ب}_2$ ) ،
فإن |س ص| =

١) $\sqrt{(\text{أ}_2 - \text{أ}_1)^2 - (\text{ب}_2 - \text{ب}_1)^2}$ .

٢) $\sqrt{(\text{أ}_2 - \text{أ}_1)^2 + (\text{ب}_2 - \text{ب}_1)^2}$ .

٣) $(\text{أ}_2 - \text{أ}_1) + (\text{ب}_2 - \text{ب}_1)$ .

ب) إذا كانت س ( ٥ ، −٣ ) ، ص( −١ ، ٥ )
فإن |س ص| =

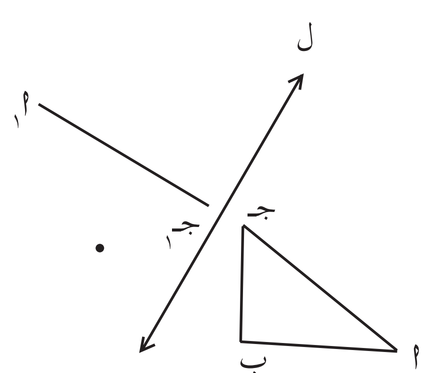
١) $\sqrt{٢٠}$ ٢) ١٠ ٣) ٢$\sqrt{١٠}$

جـ) إذا كانت س(−١٫٥ ، ٢) ، ص(٣٫٥ ، −٤)
فإن إحداثي نقطة المنتصف لـ $\overline{\text{س ص}}$ هو :

١) (−٢٫٥ ، ٣) ٢) ( ٢ ، −٢ )

٣) ( ١ ، −١ )

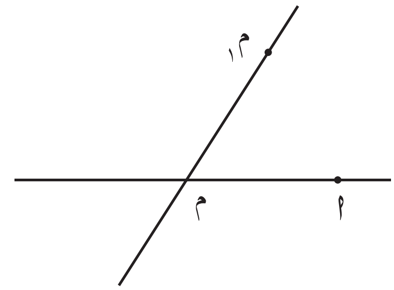
[ ٢ ] استعن بالشكل المرسوم ادناه ، ثم أجب عما يلي:




١) اكمـل الرسم لتحصل على صورة Δ أ ب جـ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ .

٢) إذا كان |أ ب| = |أ جـ| ، ق( ∡ ب ) = ٧٠° ، فأوجد ق( ∡ $\text{أ}_1$ ) .

[ ٣ ] في الشكل المرسوم أدناه :




$م_1$ صورة م بانسحاب ح .

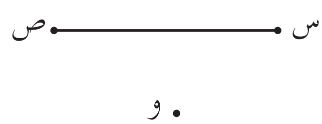
١ ) حدد عناصر ح ( مقداره واتجاهه ) .

٢ ) حدد ( على الرسم ) $أ_1$ صورة أ بالانسحاب السابق .

٣ ) إذا علمت أن |م أ| = ٢سم .

فأوجد |$م_1$ $أ_1$| .

[ ٤ ] انقل الشكل المرسوم أدناه ، ثم صوره $\overline{س ص}$ تحت تأثير :




أ ) ت ( و ، ٣ ) .

ب ) ء ( و ، ٥٠° ) .

[ ٥ ] صنِّف التحويلات الهندسية التالية ( انعكاس ، انسحاب ، دوران ، تكبير ) :

أ) ( س ، ص ) ⟵ ( − س ، ص )

ب ) ( س ، ص ) ⟵ ( − ص ، س )

جـ) ( س ، ص ) ⟵ ( ٣ س ، ٣ص )

ء ) ( س ، ص ) ⟵ ( س ، ص − ١ )

هـ) ( س ، ص ) ⟵ ( ص ، − س )

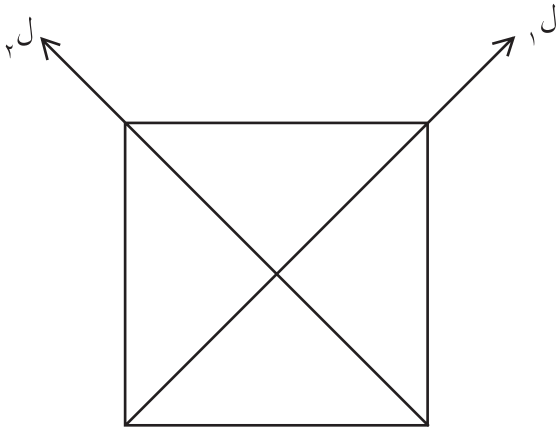
[ ٦ ] عين العبارات الصحيحة وصوّب العبارات الخاطئة فيما يلي :

أ ) صورة الشكل بالتكبير تظهر معاكسة للشكل نفسه .

ب ) التكبير يحافظ على قياس الزوايا لكنه يغير أبعاد الشكل .

جـ) الدوران يحافظ على أبعاد الشكل ويغير قياس الزوايا .

[ ٧ ] في الشكل المرسوم أدناه :




$\overleftrightarrow{ل_1}$ ، $\overleftrightarrow{ل_2}$ محورا تناظر للمربع ، ارسم محوري تناظر آخرين للمربع نفسه .

# الوحدة السابعة

# الإحصاء

## جدول توزيع الحصص

| البند | الموضوع | عدد الحصص |
|---|---|---|
| ٧ – ١ | المتوسط الحسابي | ٣ |
| ٧ – ٢ | المنوال | ٢ |
| ٧ – ٣ | التكرار المتجمع الصاعد والنازل | ٢ |
| ٧ – ٤ | الوسيط | ٢ |
| ٧ – ٥ | تمارين عامة ومسائل | ٢ |
| ٧ – ٦ | اختبار الوحدة | ٢ |
| | المجموع | ١٣ |

## أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يحسب المتوسط الحسابي والمنوال والوسيط لبيانات إحصائية .

٢ – يحسب المتوسط الحسابي والمنوال والوسيط لتوزيع تكراري بدون فئات .

٣ – يحسب المتوسط الحسابي والمنوال والوسيط لتوزيع تكراري بفئات .

٤ – يكون جدول التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل ويمثلهما بيانياً وجبرياً .

## المقدمـــة

**خلفية علمية حول أهم المفاهيم في هذه الوحدة :**

استعرضنا في الصف الثامن كيفية تمثيل بيانات إحصائية باستخدام المدرج والمضلع والمنحنى التكراري وفي هذه الوحدة سنتناول المنحنى المتجمع الصاعد والمنحنى المتجمع النازل .

**التكرار المتجمع الصاعد :**

إذا كان لدينا توزيع تكراري وأردنا معرفة عدد المفردات التي تكون قيمتها « أقل من قيمة معينة » نوجد ما يسمى « بالتكرار المتجمع الصاعد » .

ولعمل جدول التوزيع التكراري للمتجمع الصاعد نتبع الخطوات التالية :

⁕ نضيف خانة ثالثة أفقية أو عمودية إلى جدول التوزيع التكراري خاصة بالتكرار المتجمع الصاعد .

⁕ نحسب التكرار المتجمع الصاعد لكل فئة كالتالي : بالنسبة للفئة الأولى يكون التكرار المتجمع الصاعد هو نفسه تكرار هذه الفئة ، ثم نضيف إليه تكرار الفئة التالية : فيكون التكرار المتجمع الصاعد للفئة الثانية . . . وهكذا نضيف في كل مرة إلى التكرار المتجمع الصاعد تكرار الفئة التالية حتى نصل إلى الفئة الأخيرة وهنا يجب أن يكون التكرار المتجمع الصاعد يساوي مجموع التكرارات كلها .

**التكرار المتجمع النازل :**

إذا أردنا معرفة عدد المفردات التي تكون قيمتها مساوية أو أكبر من قيمة معينة نوجد التكرار المتجمع النازل .

ولإيجاد التكرار المتجمع النازل نتبع الخطوات السابقة في التكرار المتجمع الصاعد ولكن التكرار المتجمع النازل للفئة الأولى هو مجموع التكرارات كلها ، ثم نجد التكرار المتجمع النازل للفئة الثانية عن طريق طرح تكرار هذه الفئة من التكرار المتجمع النازل للفئة الأولى وهكذا بالطرح المتتالي نحصل على التكرار المتجمع النازل ، ويمكن الحصول على نفس هذا التكرار عن طريق الجمع المتتالي للتكرارات من أسفل الجدول .

وسوف نستعرض في هذه الوحدة بعض أنواع المقاييس الإحصائية وهي ما يطلق عليها اسم « مقاييس النزعة المركزية » .

ويعرف مقياس النزعة المركزية لمجموعة من الملاحظات ( البيانات ) بأنه :

« قيمة مركزية قريبة من النقطة التي عندها يتجمع أكبر عدد من الملاحظات ( أو البيانات ) .

ولمقاييس النزعة المركزية أنواع متعددة منها : المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال والوسط الهندسي والوسط الحسابي المرجح والتوافقي . . . الخ .

وستقتصر دراستنا في هذه الوحدة على المقاييس الثلاثة الأولى .

**الوسط الحسابي :**

هو أكثر المتوسطات استخداماً فإذا كان لدينا مجموعة من القيم فإننا نحصل على متوسطها عن طريق قسمة مجموع هذه القيم على عددها ، ويمكن التعبير عن ذلك في صورة رياضية كالتالي :

$$\overline{س} = \frac{س_١ + س_٢ + \ldots + س_ن}{ن} \quad .$$

وإذا استخدمنا الرمز مجـ للدلالة على « مجموع » فإن $\overline{س} = \frac{مجـ\ س}{ن}$ .

وفي حالة التوزيعات التكرارية فإن : $\overline{س} = \frac{س_١ ك_١ + س_٢ ك_٢ + \ldots + س_د ك_د}{ك_١ + ك_٢ + \ldots + ك_د}$ .

أي أن $\overline{س} = \frac{مجـ (س ك)}{مجـ\ ك}$ .

**الوسيط :**

هو القيمة التي تقسم القيم إلى جزأين بحيث يكون عدد القيم التي أقل منها يساوي عدد القيم التي أكبر منها .

وفي حالة القيم غير المبوبة نبدأ بترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً وهنا يجب التفريق بين حالتين :

الحالة الأول : عندما يكون عدد القيم فرديا ويكون الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{ن + ١}{٢}$ حيث ن عدد القيم ، والحالة الأخرى عندما يكون عدد القيم زوجيا ويكون لدينا قيمتين وسيطيتين ، ويكون الوسيط في هـذه لحالة هو الوسط الحسابي لهاتين القيمتين اللتين يكون ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢} + ١$ وفي حالة التوزيعات التكرارية نتبع الآتي :

* نكوّن جدول التكرار المتجمع الصاعد .
* نحدد ترتيب الوسيط بقسمة مجموع التكرارات على ( ٢ ) ثم نحدد الفئة الوسيطية أي الفئة التي يقع فيها الوسيط .
* نوجد الوسيط بواسطة القانون التالي :

$$الوسيط = الحد\ الأدني\ للفئة\ الوسيطية + \frac{التكرار\ المتجمع\ الصاعد\ السابق\ للفئة\ الوسيطية \times طول\ الفئة\ الوسيطية}{تكرار\ الفئة\ الوسيطية}$$

**المنوال :**

هو القيمة الأكثر شيوعاً أو بمعنى آخر القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها .

وقد يكون لمجموعة من القيم أكثر من منوال أو قد لايكون لها منوال على الاطلاق .

وفي التوزيعات التكرارية يكون المنوال في الفئة ذات التكرار الأكبر وتسمى هذه الفئة بالفئة المنوالية ويكون المنوال هو مركز الفئة المنوالية .

**أقسام الوحدة :**

تشمل هذه الوحدة مقاييس النزعة المركزية ، المتوسط الحسابي والمنوال والوسيط ، كما تقدم هذه الوحدة التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل .

واختتمت الوحدة بتمارين عامة ومسائل واختبار .

**المفاهيم والرموز الجديدة :**

المجموع ورمزه ( مجـ ) . حجم العينة . المنوال . التكرار المتجمع الصاعد .
التكرار المتجمع النازل . منحنى التكرار المتجمع الصاعد . منحنى التكرار المتجمع النازل . الوسيط .

## ٧ : ١ المتوسط الحسابي

**عدد الحصص** : ثلاثة حصص .

### الأهداف

– يعبّر بالرموز عن علاقة المتوسط اللفظية .
– يحسب المتوسط الحسابي لتوزيع تكراري لبيانات بدون فئات .
– يحسب المتوسط الحسابي لتوزيع تكراري ذي فئات .

### المحتوى

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع( حاصل ضرب الملاحظة × تكرارها )}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـــ ( س ك )}}{\text{مجـــ ك}}$$

### تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في ثلاثة حصص كالتالي :

الحصة الأولى : المتوسط الحسابي لتوزيع تكراري بدون فئات .

الحصة الثانية : المتوسط الحسابي لتوزيع تكراري ذي فئات .

الحصة الثالثة : تدريبات وتمارين .

وعند تنفيذ هذه الحصص يراعي المدرس ما يلي :

– يمهد بمقدمة بسيطة عن أنواع مقاييس النزعة المركزية موضحاً لماذا سموها بهذه التسمية ، وأن المتوسط الحسابي من أكثرها شيوعاً واستخداماً لسهولة حسابه .
– تتم مراجعة العلاقة اللفظية للمتوسط الحسابي التي سبق دراستها لبيانات عددية في الصفوف السابقة .
– ينبه طلابه أثناء مناقشة الأمثلة ( ١ ) ، ( ٢ ) ، ( ٣ ) وحل التدريبات الصفية والواجب المنزلي بأن المتوسط الحسابي لمجموعة من البيانات موزعة في جدول تكراري هو نفسه عند حسابه لبيانات عددية غير مكررة وأن الفرق هو ضرب قيمة كل ملاحظة في عدد مرات تكرارها وأن مجموع التكرارات يقابل عدد الأعداد أو ما يرمز له بالرمز ( ﻥ ) .
– ينبه طلابه إلى أن القسمة على عدد من الأعداد في حالة البيانات غير المكررة هو ما يُعرف بحجم العينة ( ﻥ ) وأن مجموع التكرارات في حالة توزيع تكراري هو أيضاً حجم العينة ( ﻥ ) .
– للسهولة يوضح لطلابه أن يعبّر عن المتوسط الحسابي بالرموز وذلك بتقديم أمثلة عددية بسيطة وإعطائها رموز مثل : $\text{س}_1$ ، $\text{س}_2$ ، . . . ، $\text{س}_{\text{ﻥ}}$ ،ثم يتم جمعها وقسمتها على عدد ما ( ﻥ ) للحصول على المتوسط الحسابي .
– يُكلف الطلبة بحل تدريبات صفية مثل التمرين ( ١ ) والتمرين ( ٢ ) كواجب منزلي في نهاية الحصة الأولى .
– في الحصة الثانية يناقش المثالين ٤ ، ٥ ، ويعطي في نهاية الحصة التمرينين ٣ ، ٤ كتدريبات صفية والتمرين ( ٥ ) كواجب منزلي .
– في الحصة الثالثة يراجع المعلم الواجب المنزلي السابق ويطلب منهم حل بقية التمارين ، وفي نهاية الحصة يُعطي التقويم .

### إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ١ ] ﺃ ) الملاحظة ٤ لها أكبر تكرار .

[ ٢ ] ب ) الدرجة ١٧ لها أكبر تكرار .

[ ٣ ] ﺃ ) عدد الفئات ٤ .

ب ) حجم العينة = ٢٨ .

[ ٦ ] ﺃ ) يكوّن جدولاً تكرارياً بثلاث خانات : خانة ( للدرجة ) والأخرى ( للتكرارات ) والثالثة ( قيمة الملاحظة × تكرارها ) .

ب ) أصغر درجة ٢٢ وطول الفئة ( ٥ ) .

∴ الفئة الأولى ( ٢٢ – ٢٧ ) مركزها ٢٤,٥ .

الفئة الثانية ( ٢٨ – ٣٣ ) مركزها ٣٠,٥ .

نكوّن جدولاً تكرارياً من ٤ خانات .

## التقـويم

يتم التقويم البنائي من خلال المناقشة ومتابعة حل التدريبات الصفية والواجب المنزلي ، ويمكن أن يُعطى التمرين التالي أو تمرين شبيه كخطوة تقويم في نهاية الحصة الثالثة :

البيانات التالية تبيّن علاقات أحد الصفوف في مادة الرياضيات ( الدرجة العظمى ٢٠ درجة ) .

١٦ ، ٨ ، ١٢ ، ١٧ ، ١٦ ، ١٥ ، ١٢ ، ١٠ ، ٩ ، ٧

١٥ ، ١٠، ٧ ، ١٥ ، ١٣ ، ١٢ ، ٩ ، ٨ ، ١٧ ، ١٥

كوّن جدولاً تكرارياً بدون فئات ، ثم أوجد المتوسط الحسابي .

# ٧ : ٢ المنـــوال

**عدد الحصص** : حصتان .

## الأهـــداف

– يوجد المنوال لبيانات بدون فئات .

– يوجد المنوال لتوزيعات تكرارية كفئات .

## المحتوى

* المنوال هو القيمة ( الملاحظة ) الأكثر تكراراً في البيانات الإحصائية ( أي الأكثر تكراراً في توزيعات تكرارية بدون فئات ) .

* المنوال هو مركز الفئة ذات التكرار الأكبر في توزيعات تكرارية كفئات .

## تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : المنوال في التوزيعات التكرارية دون فئات .

الحصة الثانية : المنوال في التوزيعات التكرارية كفئات .

وعند تنفيذ الدرس يراعي ما يلي :

– ينبه الطلبة إلى أن المنوال هو أحد مقاييس النزعة المركزية المستخدمة لوصف ومقارنة مجموعات من البيانات ، وأنه شائع الاستخدام أيضاً مثل المتوسط الحسابي وذلك لسهولة حسابه .

ولفائدته في معرفة شكل التوزيعات التكرارية للبيانات الإحصائية .

– ينبه الطلبة أيضاً إلى أنه ليس دائماً يكون المنوال موجوداً ، فعندما تكون قيم البيانات لها تكرارات متساوية فإن التوزيع المناظر لهذه البيانات يسمى عديم المنوال أو ليس لها منوال ، كما ينبه الطلبة إلى أن هناك توزيعات لها أكثر من منوال ولكننا سنهتم في هذه المرحلة بالتوزيعات التي لها منوال واحد أو منوالين فقط أو ليس لها منوال ( على الإطلاق ) .

– يناقش المعلم الأمثلة ( ١ ) ، ( ٢ ) ، ( ٣ ) في الحصة الأولى .

– يكلف الطلبة في نهاية الحصة الأولى بحل تدريبات صفية كالتمرين ( ١ ) وتمارين كواجبات منزلية كالتمرين ( ٥ ) .

– في الحصة الثانية يناقش المعلم الواجب المنزلي السابق ويناقش المثالين ٤ ، ٥ .

– يُكلف الطلاب بحل تدريبات صفية من التمارين ٢ ، ٣ ، ٤ والبعض الأخر كواجب منزلي .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ٢ ] أ ) المنوال = ٨ ، ب ) عديم المنوال .

جـ) لها منوالان ، هما : ٩ ، ٤ .

[ ٢ ] أ ) المنوال = ٢٢ ،
ب ) لها منوالان ، وهما : ١٧ ، ٢٧ .
جـ) عديمة المنوال .
[ ٣ ] المنوال = ٣٤,٥ .

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع( مركز الفئة} \times \text{تكرارها )}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

[ ٤ ] نضيف خانة ثالثة لمركز الفئة ، وخانة رابعة لحاصل ضرب ( مركز الفئة × تكرارها ) ؛ ثم نكمل الحل كما في التمرين ٣ .

## التقــويم

يتم التقويم البنائي من خلال المناقشات في الصف وحل التدريبات الصفية والواجب المنزلي ، ويمكن أن يعطى التمرين التالي أو تمرين شبيهاً كتقويم في نهاية الحصة الثانية :

أكمل الجدول التالي ، ثم أوجد المنوال والمتوسط الحسابي

| الفئات | ٤ – ١٢ | ١٣ – ٢١ | ٢٢ – ٣٠ |
|---|---|---|---|
| مركز الفئة | | | |
| التكرار | ٧ | ٤ | ٥ |
| مركز الفئة × التكرار | | | |

# ٧ : ٣ التكرار المتجمع

**عدد الحصص** : حصتان .

## الأهـــداف

– يكوّن جدول التكرار المتجمع الصاعد .
– يكوّن جدول التكرار المتجمع النازل .
– يمثّل التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل بيانياً .

## تنفيذ الدرس

ينفذ هذا الدرس في حصتين على النحو التالي :
الحصة الأولى : التكرار المتجمع الصاعد والنازل .
الحصة الثانية : تمثيل التكرار المتجمع الصاعد والنازل بيانياً .

وعند تنفيذ الدرس يراعى ما يلي :

– يوضح المعلم لطلابه أن التكرار المتجمع الصاعد والنازل هو من الأساليب الإحصائية المفيدة جداً في وصف البيانات ، كما يفيد في حساب بعض مقاييس النزعة المركزية مثل الوسيط والذي سيأتي استعراضه في الدرس التالي ، ومن خلال جدول التكرار المتجمع الصاعد أو النازل أو من خلال تمثيلهما البياني ، ويشير أن التكرار المتجمع يسمى أيضاً التكرار التراكمي لأننا نقوم فيه بتجميع التكرارات السابقة كلها تراكميات .

– يناقش المعلم المثال في الكتاب المدرسي ومن خلال مشاركة الطلاب يكوّ ن جدول التكرار المتجمع الصاعد وجدول التكرار المتجمع النازل .

وفي نهاية الحصة الأولى يُعطى تدريبات صفية وأخرى واجبات منزلية من التمارين ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، والخاصة بتكوين جدول التكرارين المتجمعين الصاعد والنازل .

– وفي الحصة الثانية يتم توضيح كيفية التمثيل البياني لجدول التكرارين المتجمعين الصاعد والنازل . كما هو موضح في الكتاب المدرسي .

– يكلف الطلاب بحل تدريبات صفية وأخرى كواجب منزلي والخاصة برسم منحنى التكرارين المتجمعين الصاعد والنازل .

– على المدرس الرجوع إلى مقدمة الوحدة ليستوضح منها أكثر كيفية تكوين جدول التكرارين المتجمعين الصاعد والنازل .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[ ٢ ] ب ) نمثّل الملاحظة على المحور الأفقي والتكرار المتجمع على المحور الرأسي .

[ ٢ ] ب ) نرسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد والنازل في رسم بياني واحد وذلك بتمثيل مركز الفئة على المحور الأفقي والتكرار المتجمع على المحور الرأسي .

ء ) $\bar{\text{س}} = \dfrac{\text{مجـ } \text{س} \times \text{ك}}{\text{مجـ } \text{ك}}$

[ ٣ ] ء ) المنوال = ٢٧

## التقـويم

تعتبر المناقشة وحل التدريبات الصفية والواجب المنزلي تقويماً للدرس .

ويمكن أن يأخذ المدرس حصة ثالثة إذا دعت الضرورة لذلك .

# ٧ : ٤ الـوسيــــط

**عدد الحصص** : حصتان .

## الأهــــداف

– يحدد الوسيط لبيانات إحصائية .

– يحسب الوسيط لتوزيع تكراري ( بسيط ) بفئات وبدون فئات .

## المحتوى

– الوسيـط لمجموعة مـن القيـم هو القيمة التي تتوسـط هذه القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً .

– في حالة أن عدد القيم زوجيٌّ فالوسيط هو المتوسط للقيمتين الوسطيتين لهذه القيم .

– في حالة توزيع تكراري للبيانات فإن الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد يحسب من العلاقة :

$$\text{الوسيط} = \text{أ} + \frac{\frac{\text{ن}}{2} - \text{ك}_1}{\text{ك}_2} \times \text{ل}$$

وفي حالة التكرار المتجمع النازل يحسب من العلاقة :

$$\text{الوسيط} = \text{ب} - \frac{\frac{\text{ن}}{2} - \text{ك}_3}{\text{ك}_2} \times \text{ل}$$

حيث أ هو الحد الأدنى للفئة الوسيطية .

ب هو الحد الأعلى للفئة الوسيطية .

ن هو مجموع التكرارات .

$\text{ك}_1$ التكرار المتجمع الصاعد للفئة التي تسبق الفئة الوسيطية .

$\text{ك}_2$ تكرار الفئة الوسيطية .

$\text{ك}_3$ التكرار المتجمع الصاعد للفئة التي تلحق الفئة الوسيطية ل طول الفئة .

## تنفيذ الدرس

يتم تنفيذ الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : الوسيط .

الحصة الثانية : تمارين ومسائل .

ويُراعى عند تنفيذ الدرس ما يلي :

- يكتب المدرس على السبورة مجموعة من القيم بحيث يكون عددها فردية .
- يطلب من أحد الطلبة ترتيب القيم تصاعديا ومن طالب آخر أن يرتبها تنازلياً .
- يحدد الوسيط لهذه القيم بالمشاركة مع الطلبة في حالة ترتيبها تصاعدياً وكذلك في حالة ترتيبها تنازلياً .

نلاحظ أن الوسيط في الحالتين هو نفسه .

- يكتب المدرس عدداً آخر من القيم بحيث يكون عددها زوجيا ، ثم يطلب من أحد الطلبة ترتيبها تصاعدياً ، ومن آخر ترتيبها تنازلياً .
- يحدد الوسيط بالمشاركة مع الطلبة في حالة ترتيب القيم تصاعدياً ، وكذلك في حالة ترتيبها تنازلياً ، وعلى المدرس التركيز على أن الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين الوسيطتين للقيم إذا كان عددها زوجياً .
- يناقش المدرس مع الطلبة الأمثلة الواردة في الكتاب، ثم يعطى المدرس نهاية الحصة الأولى بعض التمارين كواجب منزلي .
- يناقش المدرس الواجب المنزلي في بداية الحصة الثانية، ثم يطلب من الطلبة حل بعض التمارين داخل الصف وعلى المدرس متابعة الطلبة ومساعدة من يحتاج مساعدة .

## إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[٣] أ) ٧ ، ب) ٣٩ ،

جـ) ١٣ ، ء) ٨١,٥ .

[٣] $\text{الوسيط} = \text{أ} + \dfrac{\frac{\text{ن}}{٢} - \text{ك}_{١}}{\text{ك}_{٢}} \times \text{ل}$

$= ٤١,٥ + \dfrac{١٥ - ٩}{١٠} \times ١ = ٤١,٥ + ٠,٦ = ٤٢,١$

$\text{الوسيط} = \text{ب} - \dfrac{\frac{\text{ن}}{٢} - \text{ك}_{٣}}{\text{ك}_{٢}} \times \text{ل}$

$٤٢,٥ - \dfrac{١٥ - ١١}{١٠} \times ١ = ٤٢,٥ - ٠,٤ = ٤٢,١$ .

الوسيط هو نفسه في الحالتين .

## التقـويم

يتم التقويم البنائي من خلال متابعة أداء الطلبة أثناء قيامهم بحل التدريبات ومن خلال الواجب المنزلي . كما يتم إعطاء الطلبة السؤال التالي كخطوة تقويم نهاية الحصة الثانية .

أوجد الوسيط للقيم : ٢٥ ، ٣٢ ، ٢٦ ، ٣٣ ، ٣٠ ، ٣٤ .

## ٧ : ٥ تمارين ومسائل عامة

**عدد الحصص** : حصتان .

### الهدف

يهدف هذا الدرس إلى تثبيت المفاهيم وتطوير المهارات الواردة في هذه الوحدة .

### تنفيذ الدرس

يتم تنفيذ هذا الدرس في حصتين، ويراعى عند التنفيذ ما يلي :

– يطلب المدرس من الطلبة حل بعض التمارين داخل الصف ويتابع حلولهم ويناقش بعضها على السبورة، ثم يكلف الطلبة ببعض التمارين كواجب منزلي نهاية الحصة الأولى .

– يناقش المدرس الواجب المنزلي في بداية الحصة الثانية، ثم يطلب منهم حل بقية التمارين وبحسب الوقت المتاح ويتابع حلول الطلبة ويرشد ويساعد من يحتاج المساعدة ، ثم يكلفهم بحل الاختبار الذي في الكتاب كتمهيد للاختبار الذي في الدليل والذي ينفذ في الحصة التالية .

### إرشادات وحلول لبعض التمارين والمسائل

[٢] أ ) الوسيط = ١٢ .

ب ) الوسيط = ١٥

[٣] أ ) المنوال = ٥

ب ) لها منوالين هما : ١٣ ، ١٤ .

جـ) لايوجد لها منوال .

[٥] أ )

| العدد | ١٣٢ | ١٣٥ | ١٣٦ | ١٤٠ | ١٤٢ | ١٤٦ | ١٤٨ | ١٥٠ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٢ | ٢ | ١ | ١ | ١ | ١ | ١ | ١ | ١٠ |

## ٧ : ٦ اختبار الوحدة

**عدد الحصص** : حصتان .

### الهدف

يهدف هذا الاختبار إلى التعرف على مدى تحقق أهداف الوحدة عند الطلب ، والجدول التالي يوضح رقم الهدف ورقم السؤال الذي يقيس الهدف .

| رقم السؤال | رقم الهدف |
|---|---|
| ١ | ١ |
| ٢ | ٢ |
| ٣ | ٣ |
| ٤ | ٤ |

### تنفيذ الدرس

يتم تنفيذ الدرس في حصتين :

الحصة الأولى : يقدم الاختبار الذي في الدليل .

الحصة الثانية : تعالج الأخطاء التي وقع فيها الطلبة .

وعند تنفيذ الدرس يراعي المدرس ما يلي :

– يقدم الاختبار المعد في الدليل أو اختباراً مشابهاً من إعداده شريطه تغطية أهداف الوحدة ويعتبر هذا تقويماً ختامياً للوحدة لمعرفة مدى تحقق أهداف الوحدة عند الطلبة .

– يصحح أوراق إجابة الطلبة ويرصد الدرجات لكل هدف لمعرفة الأهداف التي لم تتحقق عند الطلبة .

– يناقش الأخطاء التي وقع فيها الطلبة ويركز على الأهداف التي لم تتحقق بشكل جيد .

## الاختبـــار :

[ ١ ] أوجد كلاً من المتوسط الحسابي والمنوال والوسيط للقيم التالية :

أ ) ٧ ، ٣ ، ٩ ، ٥ ، ٦ .

ب ) ٨ ، ٢ ، ٦ ، ٤ ، ٨ .

[ ٢ ] لديك جدول التوزيع التكراري الآتي :

| الملاحظة | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٧ | ٤ | ٥ | ٢ | ٢ | ٢٠ |
| الملاحظة× التكرار | ٧ | ٨ | ١٥ | ٨ | ١٠ | ٤٨ |

أوجد أ ) المتوسط الحسابي .

ب ) المنوال . جـ) الوسيط .

[ ٣ ] لديك جدول التوزيع التكراري الآتي :

| الفئات | ١٢–١٤ | ١٥–١٧ | ١٨–٢٠ | ٢١–٢٢ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| مركز الفئة | | | | | |
| التكرار | ٤ | ٤ | ١ | ٢ | |
| مركز الفئة × التكرار | | | | | |

أ ) أكمل الجدول ، ب ) أوجد المنوال ،

جـ) أوجد المتوسط الحسابي .

[ ٤ ] الجدول التالي يوضح درجات ٣٠ طالباً في مادة الرياضيات :

| الدرجة | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٢ | ٢ | ٧ | ٤ | ٨ | ٤ | ٣ | ٣٠ |
| التكرارالمتجمع الصاعد | | | | | | | | |
| التكرارالمتجمع النازل | | | | | | | | |

أ ) أكمل الجدول .

ب ) أوجد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع الصاعد .

جـ) أوجد الوسيط بيانياً .