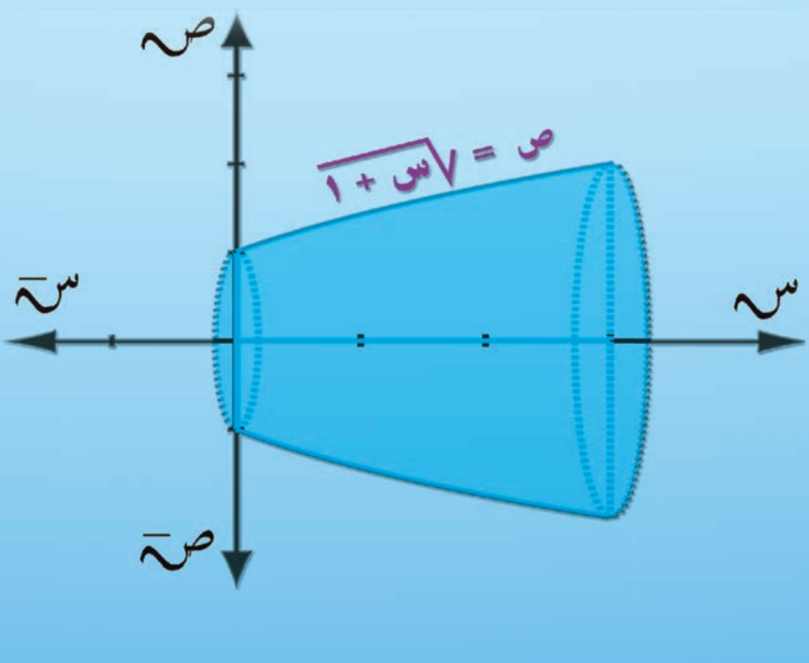
الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي

(القسم العلمي)



١٤٣٥هـ / ٢٠١٤م

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي

(القسم العلمي)

فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً.

د. أمة الإله علي حمد الحوري.
أ. سالمين محمد باسلوم / منسقاً.
د. عوض حسين البكري.
د. محمد علي مرشد.
د. محمد رشاد الكوري.
أ. يحيى بكار مصفر.
د. محمد حسن عبده المسوري.
أ. عبدالباري طه حيدر.
د. عبدالله سالم بن شحنة.
أ. نصر محمد بدر.
د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري.
أ. جميلة إبراهيم الرازحي.
أ. مريم عبدالجبار سلمان.
أ. عادل علي مقبل البنا.
أ. يحيى محمد الكنز.
أ. عبدالرحمن عبدالله عثمان.

الإخراج الفني

صف طباعي وتصميم وإخراج: جلال سلطان علي.

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني.

١٤٣٥هـ / ٢٠١٤م

النشيد الوطني

رددي أيتها الدنيا نشيدي   ردديه وأعيدي وأعيدي

واذكري في فرحتي كل شهيدِ   وامنحيه حُللاً مِنْ ضوءِ عيدي

رددي أيتها الدنيا نشيدي

رددي أيتها الدنيا نشيدي

وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي   أنت عهدٌ عالقٌ في كل ذمّة

رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُهُ من كل شمس   اُخْلُدي خَافِقَةً في كل قِمَّة

أمتي .. أمتي .. امنحيني البأس يا مصدر بأسي   واذخُريني لَكِ يا أكرمَ أمة

عشتُ إيماني وحبّي أمميًّا

ومسيري فوق دربي عربيا

وسيبقى نبضُ قلبي يمنيا

لن ترى الدنيا على أرضي وصيا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

د. عبدالله عبده الحامدي.	أ/ علي حسين الحيمي.
د/ صالح ناصر الصوفي.	د/ أحمد علي المعمري.
أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.	أ.د/ صالح عوض عرم.
أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.	د/ إبراهيم محمد الحوثي.
د/ عبدالله علي أبو حورية.	د/ شكيب محمد باجرش.
د/ عبدالله لملس.	أ.د/ داوود عبدالملك الحدابي.
أ/ منصور علي مقبل.	أ/ محمد هادي طواف.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.	أ.د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
أ.د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.	أ/ محمد عبدالله زبارة.
أ.د/ محمد حاتم المخلافي.	أ/ عبدالله علي إسماعيل.

د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

قررت اللجنة العليا للمناهج طباعة هذا الكتاب .

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم

في إطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية.

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات.

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها: الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبمايتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي.

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها.

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدروسة لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية.

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول
وزير التربية والتعليم
رئيس اللجنة العليا للمناهج

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمـــــة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم المرسلين وآله وصحبه وسلم .

إن إعادة النظر في مناهج الرياضيات وكتبها المدرسية أمر ضروري تحتمه مواكبة التطور العلمي ، وتحديث تربويات الرياضيات إضافة إلى مسايرة التغيرات الاجتماعية .

واستجابة لذلك يأتي هذا الكتاب « كتاب الرياضيات للصف الثالث الثانوي – القسم العلمي » كحلقة ضمن سلسلة متكاملة على مرحلتين : الأساسية (١ – ٩) ، والثانوية من (الأول الثانوي إلى الثالث الثانوي) .

لقد عُرضت مواضيع الكتاب في تماسك وتكامل وفق تسلسل علمي ونفسي تربوي ، ومراعاة للفروق الفردية،وتم تقديم المادة الدراسية بأسلوب سلس واضح لاغموض فيه ولاتعقيد ؛ حيث أوردنا قدراً كافياً من الأمثلة بعد العرض النظري وأتبعنا ذلك بعدد من التمارين والمسائل آملين إتاحة فرص كثيرة للتعامل مع المادة ؛ ليكون الطالب محور التعلم معتمداً على النشاط بدافع ذاتي محققاً بذلك الأهداف الوجدانية .

واتساقاً مع كتابي الصف الأول الثانوي والثاني الثانوي والمواد المرافقة لهما ؛ فإن هذا الكتاب وما يرافقه من كتاب التمارين ، ودليل المعلم يهتم اهتماماً كبيراً بالمفاهيم الأساسية إلى جانب تقديمه معارف سليمة ومراعاته انسجام الموضوعات مع عمليات التعلم الطبيعي للطلبة كما يحفز المدرسين على ابتكار أساليب تدريس جديدة بما يضمن لطلبتهم تعلماً فاعلاً .

ومن أهم أهداف وزارة التربية والتعليم أن يظل التطوير في نمو وتطور مستمر ، بمتابعة كل جديد في تد ريس الرياضيات وهذا لايتأتى إلا بالاستفادة من واقع التطبيق في الميدان التدريسي . فإذا راعينا كل المبادئ المذكورة أعلاه بقدر ما وفقنا المولى عز وجل بإعداد هذه المواد التربوية في ضوء استراتيجيات تهدف إلى تقديم الأجود (مادة وطريقة) ؛ فإننا ننظر بشوق بالغ أن يوافينا كافة ذوي العلاقة بملاحظاتهم بغية الاستفادة منها .

نسأل المولى العلي القدير أن نكون قد وفّقنا في كل ما نصبو إليه فهو ولي التوفيق والهادي إلى سواء السبيل .

المؤلفون

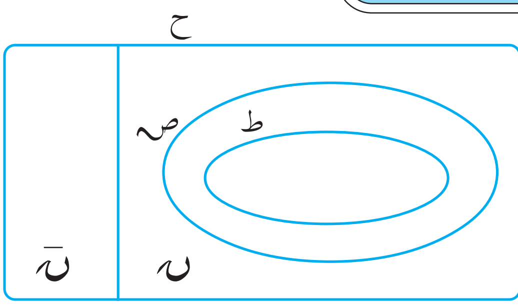
المحتويات

المحتويات

الوحدة الأولى — الأعداد المركبة

١ – ١ العدد المركب

تعرف إن هناك مجموعات عددية مختلفة ، منها :
مجموعة الأعداد الطبيعية (ط) ، ومجموعة الأعداد الصحيحة (ص) ، والنسبية (ن)، والحقيقية (ح) .
ولاشك أنك تتذكر العلاقة بينها . تأمل الشكل (١ – ١)؛
تلاحظ أن : ط $\subset$ ص $\subset$ ن $\subset$ ح .
ح = ن $\cup$ $\bar{ن}$ ($\bar{ن}$ مجموعة الأعداد غير النسبية)



شكل (١ – ١)

تدريب (١ – ١)

أوجد حلول المعادلات التالية ، واذكر إلى أي مجموعة تنتمي هذه الحلول :
س + ٨ = ٢ ، ٣ س = ١ ، $س^{٢}$ = ٢ ، $س^{٢}$ + ١ = ٠ .

من حل التدريب تلاحظ : س + ٨ = ٢ $\Leftarrow$ س = –٦ ، –٦ $\in$ ص ،
لكن –٦ $\notin$ ط ؛ أي أن هذه المعادلة ليس لها حل في ط ، ولها حل في ص .

والمعادلة ٣ س = ١ $\Leftarrow$ س = $\frac{١}{٣}$ ، ليس لها حل في ص ، ولكن لها حل في ن .

امّا المعادلة $س^{٢}$ = ٢ $\Leftarrow$ س = $\pm \sqrt{٢}$ ليس لها حل في ن ؛ وإنما لها حل في ح .

وعند حل المعادلة : $س^{٢}$ + ١ = ٠ نجد أن :
$س^{٢}$ + ١ = ٠ $\Leftarrow$ $س^{٢}$ = –١ $\Leftarrow$ س = $\pm \sqrt{-١}$. فما قيمة $\sqrt{-١}$ ؟
تعلم أنه لايوجد عدد حقيقي مربعه = –١ .

إذن ليس للمعادلة الأخيرة حل في ح ؛ وللوصول إلى حل لمثل هذه المعادلات جاءت الحاجة إلى توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية ، بحيث تكون كل معادلة من الدرجة الثانية قابلة للحل في هذه المجموعة ؛ ونطلق على هذه المجموعة مجموعة الأعداد المركبة .

بما أن الجذور التربيعية للأعداد السالبة لايمكن أن تكون أعداداً حقيقية ، لذا تسمى أعداداً تخيلية ، يُرمز لها بالرمز ت (الحرف الأول من كلمة تخيلي) ليدل على الجذر التربيعي للعدد –١ ، أي :

ت = $\sqrt{-١}$

ت × ت = $\sqrt{-١}$ × $\sqrt{-١}$ = –١ أي أن : $ت^{٢}$ = –١

$ت^{٣}$ = $ت^{٢}$ × ت = –١ × ت = – ت .

تدريب (١ – ٢)

أكمل ما يلي :

$ت^{٤}$ = ... ، $ت^{٥}$ = ... ، $ت^{٦}$ = ... ، $ت^{٧}$ = ... ، $ت^{٨}$ = ...

ستلاحظ مما سبق أن القوى الصحيحة للعدد (ت) تعطي إحدى القيم (ت) أو (– ت) ، أو (١) ، أو (–١) وهذه القيم تتكرر بصفة دورية لتزايد الأس بمقدار ٤ ، أي :

إذا كان ن ∈ $ص^{+}$ فإن : $ت^{ن}$ = $ت^{م}$ ، حيث م هو باقي قسمة ن على ٤ .

مثال (١ – ١)

بسّط ما يلي :

أ) $ت^{١٢}$. ب) $ت^{١٠٢}$. جـ) $ت^{-١}$. د) $ت^{-٧١}$.

الحـــل :

أ) $ت^{١٢}$ = $(ت^{٤})^{٣}$ = $(١)^{٣}$ = ١ .

ب) $ت^{١٠٢}$ = $(ت^{٤})^{٢٥}$ × $ت^{٢}$ [١٠٢ ÷ ٤ = ٢٥ والباقي ٢]

= ١ × $ت^{٢}$ = –١ .

جـ) $\frac{١}{ت} = \frac{١}{ت} \times \frac{ت}{ت} = \frac{ت}{ت^{٢}}$ = – ت .

د) $ت^{-٧١} = \frac{١}{ت^{٧١}} \times \frac{ت}{ت} = \frac{ت}{ت^{٧٢}} = \frac{ت}{(ت^{٤})^{١٨}}$ = ت .

تدريب (١ – ٣)

حل المعادلة : $أ^{٢}$ – ٢أ + ٥ = ٠

باستخدام القانون العام نحصل على : أ = ١ + ٢ ت أو أ = ١ – ٢ ت .

وهاتان القيمتان مكونتان من جزأين : أحدهما حقيقي وهو(١) والآخر تخيلي وهو(± ٢) فالأعداد مثل ١ + ٢ ت ، ١ – ٢ ت ، والتي يمكن أن تكتب بالصورة س ± ت ص ؛ حيث س ، ص ∈ ح تسمى أعداداً مركبة حيث س تمثل الجزء الحقيقي ، ص تمثل الجزء التخيلي ، والصور (س + ت ص) تسمى الصورة الجبرية للعدد المركب .

تعريف (١ –١)

تسمى الأعداد التي على صورة : س + ت ص ؛ حيث س ، ص ∈ ح ، ت = $\sqrt{-١}$ بالأعداد المركبة ، ويسمى س الجزء الحقيقي ، ص الجزء التخيلي .

لنرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز م ؛ أي أن : م = { (س + ت ص) : س ، ص ∈ ح ، ت = $\sqrt{-١}$ } .

مثال (١ – ٢)

ما الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للأعداد المركبة التالية :

أ) ١٤ – ٥ ت .　　ب) –٥ ت .　　جـ) $\sqrt{-٥٠}$.　　د) $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٨}$.

الحـــل :

أ) ∵ ١٤ – ٥ ت = ١٤ + (–٥) ت .

∴ الجزء الحقيقي = ١٤ ، والجزء التخيلي = –٥ .

ب) – ٥ ت = ٠ – ٥ ت .

∴ الجزء الحقيقي = ٠ ، الجزء التخيلي = –٥ (مثل هذا العدد يسمى عدداً تخيلياً صرفاً) .

جـ) $\sqrt{-٥٠} = \sqrt{٥٠}\,ت = ٥\sqrt{٢}\,ت = ٠ + ٥\sqrt{٢}\,ت$.

∴ الجزء الحقيقي = ٠ ، الجزء التخيلي = $٥\sqrt{٢}$ (هل $\sqrt{-٥٠}$ تخيلي صرفاً ؟)

د) $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٨} = \sqrt{٢}\,ت \times \sqrt{٨}\,ت = \sqrt{١٦}\,ت^{٢} = -٤ = -٤ + (٠)\,ت$.

∴ الجزء الحقيقي = –٤ ، الجزء التخيلي = ٠ (مثل هذا العدد يسمى عدداً حقيقياً صرفاً) .

مثال (١ – ٣)

أثبت أن : $(١ + ت)^{٤} \left(١ + \frac{١}{ت}\right)^{٤} = ١٦$.

الحـــل :

∵ $\frac{١}{ت} = -ت$ [انظر مثال (١ – ١ جـ)] .

الطرف الأيمن = $(١ + ت)^{٤}(١ - ت)^{٤} = [(١ + ت)(١ - ت)]^{٤} = (١ - ت^{٢})^{٤} = [١ - (-١)]^{٤}$

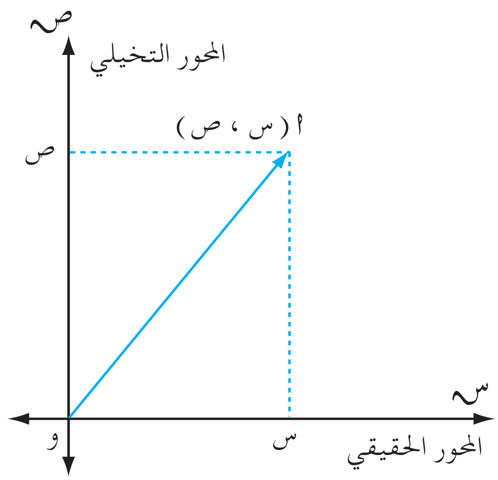
= $٢^{٤}$ = ١٦ = الطرف الأيسر .

تمثيل الأعداد المركبة في المستوى :

مـن التعريف (١ – ١) نرى أن العدد المركب س + ت ص يتكون من جزأين همـا الحقيقي (س) ، والتخيلي (ص) لذا يمكن كتابة العدد المركب بصورة زوج مرتب من الأعداد الحقيقية (س ، ص) المسقط الأول هو الجزء الحقيقي والمسقط الثاني هو الجزء التخيلي ، وعليه يمكن كتابة مجموعة الأعداد المركبة كالتالي :

م = { (س ، ص) : س ، ص ∈ ح } .

وعند تمثيل الأعداد المركبة كأزواج مرتبة بنقاط في المستوى الديكارتي يعتبر المحور السيني هو المحور الحقيقي والمحور الصادي هو المحور التخيلي،وعلى هذا الأساس يمثل العدد (س + ت ص) بالنقطة (س ، ص) كما في الشكل (١ – ٢).



شكل (١ – ٢)

يدل هذا على أن هناك تقابلاً بين مجموعة الأعداد المركبة ومجموعة نقاط المستوى .بناءً على ذلك يسمى المستوى بالمستوى المركب أو مستوى آرجاند نسبة للعالم الذي اقترح هذا التمثيل.

نعرف أن كل زوج (س ، ص) يمثل متجهاً قياسياً، وعليه فإن العدد المركب (س + ت ص) يمثل متجهاً قياسياً، هو $\overleftarrow{\text{و أ}}$ = (س ، ص) .

مثال (١ – ٤)

مثّل الأعداد التالية في مستوى آرجاند ، ثم مثّل كلاً منها بمتجه قياسي :

أ) ٢ + ٥ ت ، ب) ٢ ت ، جـ) ٤ ، د) –٤ – ٢ ت .

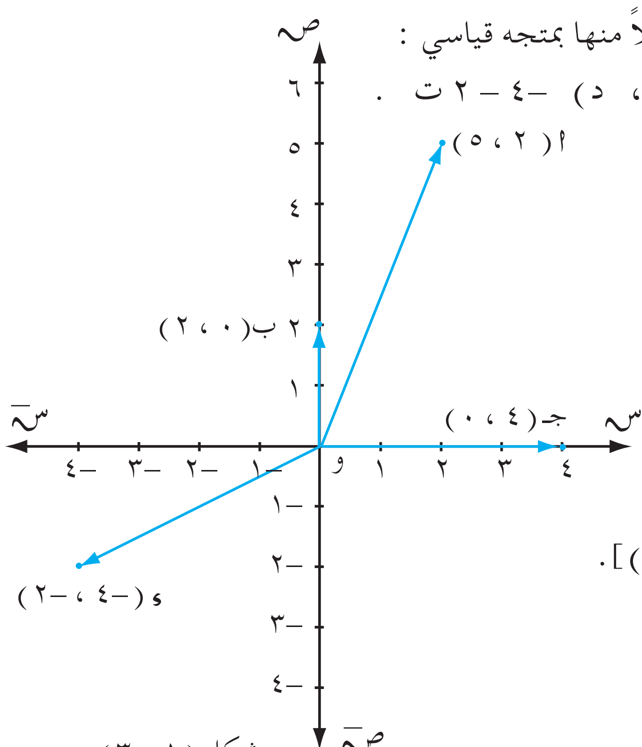
الحـــل :

أ) العدد ٢ + ٥ ت يمثّل بالنقطة (٢ ، ٥) ويمثّل بالمتجه $\overleftarrow{\text{و أ}}$.

ب) العدد ٢ ت يمثّل بالنقطة (٠ ، ٢) وبالمتجه $\overleftarrow{\text{و ب}}$.

جـ) العدد ٤ يمثّل بالنقطة (٤ ، ٠) وبالمتجه $\overleftarrow{\text{و جـ}}$.

د) العدد –٤ – ٢ ت يمثّل بالنقطة (–٤ ، –٢) ويمثل بالمتجه $\overleftarrow{\text{و ء}}$ [كما في الشكل (١ – ٣)].



شكل (١ – ٣)

تساوي الأعداد المركبة :

ليكن $ع_1$ = $س_1$ + ت $ص_1$ = ($س_1$ ، $ص_1$)

$ع_2$ = $س_2$ + ت $ص_2$ = ($س_2$ ، $ص_2$)

فإذا كان $ع_1$ = $ع_2$ فأن ($س_1$ ، $ص_1$) = ($س_2$ ، $ص_2$) ، وهذا يؤدي إلى أن : $س_1$ = $س_2$ ∧ $ص_1$ = $ص_2$

لذا نعرّف تساوي عددين مركبين كالتالي :

تعريف (١ - ٢)

يقال للعددين المركبين $(س_١ + ت ص_١)$ ، $(س_٢ + ت ص_٢)$ بأنهما متساويان إذا وفقط
إذا كان $س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$
أي أن : $(س_١ + ت ص_١) = (س_٢ + ت ص_٢) \Leftrightarrow س_١ = س_٢ \wedge ص_١ = ص_٢$.

مثال (١ - ٥)

أوجد قيم س ، ص إذا كان : ٥ س + ٤ ت ص = ١٥ + ت (س - ١) .

الحـــل :

٥ س + ٤ ت ص = ١٥ + ت (س - ١)

ومن التعريف (١ - ٢) نحصل على :

٥ س = ١٥ $\Leftarrow$ س = ٣ ،

٤ ص = س - ١ ، وبالتعويض عن قيمة س نحصل على :

٤ ص = ٣ - ١ = ٢ $\Leftarrow$ ص = $\frac{١}{٢}$.

تمارين ومسائل (١ - ١)

[١] بسّط كلاً مما يأتي :

أ) $ت^{٩}$. ب) $ت^{٣٤٢}$. جـ) $ت^{-٦٣}$. د) $ت^{٣} + \frac{١}{ت^{٣}}$.

هـ) $ت^{٣٧} + \frac{١}{ت^{٦٧}}$. و) $ت^{٥} - ت^{٦}$. ز) $\frac{٥}{ت^{٧}}$. ح) $ت + ٢ت^{٢} + ٣ت^{٣} + ٤$.

ط) $(\sqrt{-١})^{٤٥}$. ي) $ت^{١٠٤} + ت^{١٠٩} + ت^{١١٤} + ت^{١١٩}$.

[٢] اكتب الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للأعداد المركبة التالية :

أ) $-٤ + ٣ ت$. ب) $٣ + \sqrt{-٥}$. جـ) $\sqrt{-٤٩} + ٧$. د) $\sqrt{٣}$ ت .

هـ) $-٢ ت + \sqrt{-٢}$ ت . و) $\frac{١}{٢}\sqrt{\frac{-٣}{٤}}$. ز) $\sqrt{-١٦٩}$. ح) ١١ .

[٣] اكتب ناتج ما يلي باستخدام الصورة الجبرية للأعداد المركبة :

أ) $\frac{\sqrt{-٧}}{٤} - \frac{\sqrt{-١}}{\sqrt{٧}}$. ب) $٥\sqrt{-٢} \times ٣\sqrt{-١٨}$.

جـ) $٣\sqrt{-٥} \times ٤\sqrt{-٢}$.
د) $(\sqrt{-٧})^{٣} + (\sqrt{-٥})^{٣}$.

هـ) $(-٣\sqrt{-٢})^{٤}$.
و) $(٣\sqrt{-٢})^{٥} - (٢\sqrt{-٣})^{٥}$.

ز) $\sqrt{-٥س^{٨}} - \sqrt{-٢٠س^{٨}} + \sqrt{٤٥س^{٨}}$ ، $\forall$ س $\in$ ح$^{+}$.

[٤] أثبت صحة ما يلي :

أ) $\dfrac{١ + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤}}{٢ - ٢ت^{٢} - ٤ت} = \dfrac{١}{٤}$.
ب) $١ + ت^{١٠} + ت^{١٠٠} - ت^{١٠٠٠} = ٠$.

جـ) $(١ + ت + ت^{٣})^{٤د} = ١$ حيث د $\in$ ص$^{+}$.

د) $١ + ت^{١٠} + ت^{١٤} + ت^{١٨}$ عدد حقيقي صرف .

[٥] أوجد قيمتي س ، ص التي تحقق ما يلي :

أ) ٢ + س + ت ص = ٣ − ت .
ب) س + ٤ ت ص = ت س + ص + ٣ .

جـ) ٢ س + ت ص = ٣ + ٣ ت .

[٦] مثّل الأعداد التالية بمتجه قياسي في مستوى آرجاند :

أ) ٣ − ٥ ت .
ب) −٢ − ٣ ت .
جـ) ٥ − ت .

د) ٦ .
هـ) −٣ + ت .
و) ٥ ت .

١ − ٢ جمـع وطـرح الأعداد المـركـبــة

كما في الأعداد الحقيقية ، فإنه يمكن أن نجري عمليات حسابية على الأعداد المركبة ، وبالتالي يمكن أن نكوّن أنظمة عددية بواسطتها .

تعريف (١ −٣)

إذا كان ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ $\in$ م حيث ع$_{١}$ = س$_{١}$ + ت ص$_{١}$ ، ع$_{٢}$ = س$_{٢}$ + ت ص$_{٢}$ ، فإن :

١) ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ = (س$_{١}$ + س$_{٢}$) + ت (ص$_{١}$ + ص$_{٢}$) .

٢) ع$_{١}$ − ع$_{٢}$ = ع$_{١}$ + (−ع$_{٢}$) = (س$_{١}$ − س$_{٢}$) + ت (ص$_{١}$ − ص$_{٢}$) .

أي أنه عند جمع عددين مركبين نجمع الجزأين الحقيقيين معاً والتخيليين معاً وبطريقة مشابهة نجري عملية الطرح.

مثال (١ − ٦)

أوجد ناتج ما يلي :

أ) $(٢ + ٦\text{ت}) + (٦ - ٨\text{ت})$.   ب) $\left(\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٤}\text{ت}\right) + \left(-\frac{٢}{٥} + \frac{١}{٥}\text{ت}\right)$.

جـ) $(\sqrt{٨} + \sqrt{١٢}\,\text{ت}) - (\sqrt{٣٢} + \sqrt{٢٧}\,\text{ت})$.

الحـــل :

أ) $(٢ + ٦\text{ت}) + (٦ - ٨\text{ت})$

$= (٢ + ٦) + (٦ - ٨)\text{ت}$ [تعريف (١ − ٣)]

$= ٨ + (-٢)\text{ت} = ٨ - ٢\text{ت}$

ب) $\left(\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٤}\text{ت}\right) + \left(-\frac{٢}{٥} + \frac{١}{٥}\text{ت}\right) = \left(\frac{١}{٢} - \frac{٢}{٥}\right) + \left(-\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٥}\right)\text{ت}$ [تعريف (١ − ٣)]

$= \left(\frac{٥ - ٤}{١٠}\right) + \left(\frac{-١٥ + ٤}{٢٠}\right)\text{ت} = \frac{١}{١٠} + \left(-\frac{١١}{٢٠}\right)\text{ت} = \frac{١}{١٠} - \frac{١١}{٢٠}\text{ت}$.

جـ) $(\sqrt{٨} + \sqrt{١٢}\,\text{ت}) - (\sqrt{٣٢} + \sqrt{٢٧}\,\text{ت}) = (\sqrt{٨} - \sqrt{٣٢}) + (\sqrt{١٢} - \sqrt{٢٧})\text{ت}$

[تعريف (١ − ٣)]

$= (٢\sqrt{٢} - ٤\sqrt{٢}) + (٢\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٣})\text{ت} = (-٢\sqrt{٢}) + (-\sqrt{٣})\text{ت} = -٢\sqrt{٢} - \sqrt{٣}\,\text{ت}$.

مثال (١ − ٧)

لتكن $ع_١ = ٣ + \text{ت}$ ، $ع_٢ = ٢ + ٣\text{ت}$ ؛ أوجد ناتج ما يلي ومثله هندسياً:

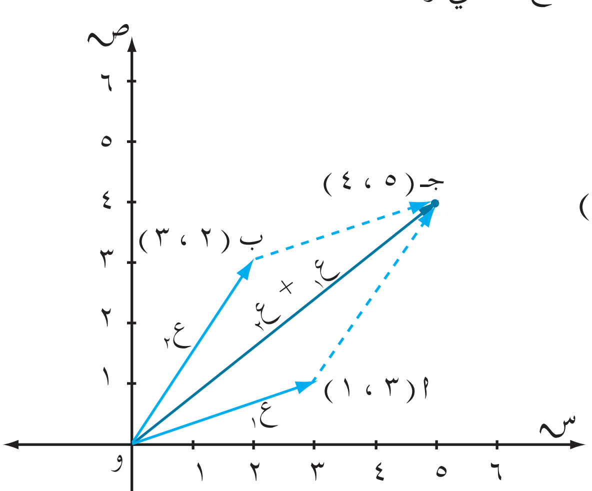
أ) $ع_١ + ع_٢$.   ب) $ع_١ - ع_٢$.

الحـــل :

أ) $ع_١ + ع_٢ = (س_١ + س_٢) + (ص_١ + ص_٢)\text{ت}$

$= (٣ + ٢) + (١ + ٣)\text{ت}$

$= ٥ + ٤\text{ت}$.

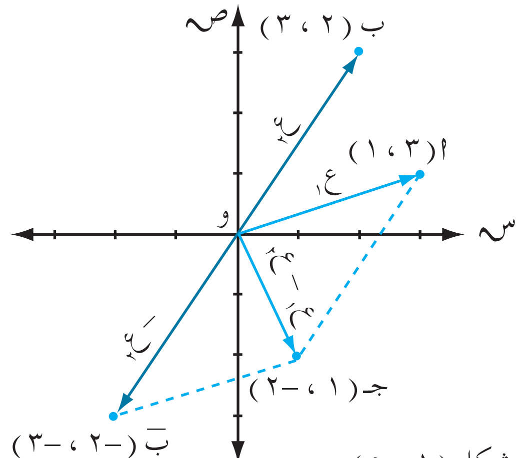


شكل (١ − ٤)

ب) ع$_{١}$ +(– ع$_{٢}$) = (٣ + ت) – (٢ + ٣ ت)

= (٣ – ٢) + (١ – ٣) ت

= ١ – ٢ ت .



شكل (١ – ٥)

خواص جمع الأعداد المركبة:

١) عملية الجمع تبديلية على م ؛ أي أن : ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ = ع$_{٢}$ + ع$_{١}$ ، ∀ ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ∈ م .

لإثبات ذلك :

ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ = (س$_{١}$ + ت ص$_{١}$) + (س$_{٢}$ + ت ص$_{٢}$) = (س$_{١}$ + س$_{٢}$) + ت (ص$_{١}$ + ص$_{٢}$) [تعريف (١ – ٣)]

= (س$_{٢}$ + س$_{١}$) + ت (ص$_{٢}$ + ص$_{١}$) [الجمع تبديلي على ح]

= (س$_{٢}$ + ت ص$_{٢}$) + (س$_{١}$ + ت ص$_{١}$) = ع$_{٢}$ + ع$_{١}$.

٢) عملية الجمع تجميعية على م ؛ أي أن :

(ع$_{١}$ + ع$_{٢}$) + ع$_{٣}$ = ع$_{١}$ + (ع$_{٢}$ + ع$_{٣}$) ، ∀ ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ، ع$_{٣}$ ∈ م .

وعلى الطالب إثبات ذلك بطريقة مشابهة لإثبات خاصية التبديل .

٣) الصفر هو المحايد الجمعي للمجموعة م أي أن :

ع + ٠ = ٠ + ع = ع ، ∀ ع ∈ م .

ولإثبات ذلك نفرض أن العنصر المحايد الجمعي هو (أ + ت ب) ∈ م .

وليكن ع ∈ م حيث ع = (س + ت ص).

∴ (س + ت ص) + (أ + ت ب) = (س + ت ص) [تعريف العنصر المحايد]

(س + أ) + ت (ص + ب) = س + ت ص [تعريف الجمع] .

∴ س + أ = س ⟸ أ = س – س = ٠ [تساوي عددين مركبين] .

وبالمثل ص + ب = ص ⟸ ب = ص – ص = ٠ .

∴ أ + ت ب = (أ ، ب) = (٠ ، ٠) العنصر المحايد لعملية الجمع .

٤) **النظير الجمعي للعدد** ع = س + ت ص هو − ع = − س − ت ص .

أي أن : ع + (−ع) = ٠ ، ∀ ع ∈ م

لإثبات ذلك :

نفرض أن النظير الجمعي للعدد (س ، ص) هو ($\bar{س}$ ، $\bar{ص}$) ،

($\bar{س}$ ، $\bar{ص}$) + (س ، ص) = (٠ ، ٠) [تعريف النظير]

($\bar{س}$ + س ، $\bar{ص}$ + ص) = (٠ ، ٠) [تساوي عددين مركبين] .

$\bar{س}$ + س = ٠ ⟸ $\bar{س}$ = − س

$\bar{ص}$ + ص = ٠ ⟸ $\bar{ص}$ = − ص

∴ ($\bar{س}$ ، $\bar{ص}$) = (− س ، − ص)

∴ النظير الجمعي للعدد المركب ع هو −ع = − س − ت ص = − (س + ت ص) = − ع

مثال (١ − ٨)

لتكن ع$_١$ = ٣ + ت ، ع$_٢$ = $\frac{١}{٢}$ − ٥ ت ، ع$_٣$ = ٦ − ت ؛ أوجد ما يلي :

أ) ع$_١$ + ع$_٢$. ب) ع$_٣$ − ع$_١$. جـ) ع$_١$ + ع$_٣$ − ع$_٢$.

الحـــل :

أ) ع$_١$ + ع$_٢$ = (٣ + ت) + ($\frac{١}{٢}$ − ٥ ت)

= (٣ + $\frac{١}{٢}$) + (١ − ٥) ت [تعريف الجمع]

= ٣ $\frac{١}{٢}$ + (−٤) ت = $\frac{٧}{٢}$ − ٤ ت

ب) ع$_٣$ − ع$_١$ = (٦ − ت) − (٣ + ت)

= (٦ − ٣) + (−١ − ١) ت = ٣ + (−٢) ت = ٣ − ٢ ت [تعريف الطرح]

جـ) ع$_١$ + ع$_٣$ − ع$_٢$ = (٣ + ت) + (٦ − ت) − ($\frac{١}{٢}$ − ٥ ت)

= (٣ + ٦) + (١ − ١) ت − ($\frac{١}{٢}$ − ٥ ت) [تعريف الجمع]

= (٩ + (٠) ت) − ($\frac{١}{٢}$ − ٥ ت)

= (٩ − $\frac{١}{٢}$) + (٠ + ٥) ت = ٨$\frac{١}{٢}$ + ٥ ت [تعريف الطرح]

تمارين ومسائل (١ - ٢)

[١] أوجد ناتج ما يلي :

أ) (١ - ٢ ت) + (٥ + ٣ ت) . ب) ($-\frac{٥}{٢}$ + $\frac{٢}{٣}$ ت) + ($\frac{١}{٤}$ - $\frac{٥}{٦}$ ت) .

جـ) (٣ + $\sqrt{-١٦}$) - (-٤ + $\sqrt{-٩}$) .

د) (٣ - ٢ ت) + (٢ + $\sqrt{٢}$ ت) - (- ٤ + $\sqrt{٢}$ ت) .

[٢] بسط ما يلي :

أ) $\sqrt{-٤}$ + ٥ $\sqrt{-٩}$ - ٣ $\sqrt{-٨١}$. ب) ٢ $\sqrt{-٣٦}$ - $\sqrt{٤٩}$ ت + ٧ .

جـ) (١ - ٢ ت) - (- ٤ - ٥ ت) + (- ٨ + ٣ ت) .

د) (٤ + ٣ ت) + (١ - $\sqrt{-٦٤}$) .

[٣] أوجد قيمتي س ، ص التي تحقق ما يلي :

أ) ٢ + س + ت ص = ٥ - ت . ب) ٢ س + ٤ ت ص = ص - ٣ + ٢ ت س .

جـ) (س + ت ص) + (٣ - ٢ ت) = ١ + ٤ ت .

د) (س ، ص) - (٧ ، ٤) = (٣ ، -٥) .

هـ) ٣ س + (٢ س - ص) ت = ٦ - ٣ ت .

[٤] لتكن $ع_{١}$ = ٣ + ت ، $ع_{٢}$ = -٧ - ٣ ت ، $ع_{٣}$ = ٥ + ٩ ت ؛

أوجد : أ) $ع_{١}$ + $ع_{٢}$. ب) $ع_{٣}$ - $ع_{١}$. جـ) $ع_{١}$ + $ع_{٣}$ - $ع_{٢}$.

١ - ٣ ضرب وقسمة الأعداد المركبة

أولا : ضرب الأعداد المركبة :

تدريب (١ - ٤)

أوجد (س + ص) (أ + ب)

لاشك أنّك قد حصلت على حاصل الضرب التالي : أ س + ب س + أ ص + ب ص بطريقة ضرب مقدارين جبريين

وبنفس الأسلوب إذا كان $ع_{١}$ = $س_{١}$ + ت $ص_{١}$ ، $ع_{٢}$ = $س_{٢}$ + ت $ص_{٢}$ ؛ فإن :

$ع_{١}$ • $ع_{٢}$ = ($س_{١}$ + ت $ص_{١}$) ($س_{٢}$ + ت $ص_{٢}$) = $س_{١}س_{٢}$ + ت $ص_{٢}س_{١}$ + ت $ص_{١}س_{٢}$ + $ت^{٢}$ $ص_{١}ص_{٢}$

$= س_١ س_٢ + ت(ص_٢ س_١ + ص_١ س_٢) - ص_١ ص_٢$ ، $(ت^٢ = -١)$

$= (س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢) + ت (ص_٢ س_١ + س_٢ ص_١)$.

تعريف (١ - ٤)

$$(س_١ + ت ص_١)(س_٢ + ت ص_٢) = (س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢) + ت (س_١ ص_٢ + س_٢ ص_١)$$

مثال (١ - ٩)

أوجد ما يلي :

أ) $(٣ + ٢ت)(٥ + ٤ت)$.

ب) $(١ + \sqrt{٢}\, ت)(\sqrt{٢} - ت)$.

الحـــل :

أ) نفرض أن $٣ + ٢ت = س_١ + ت ص_١$ $\Leftarrow$ $س_١ = ٣$ ، $ص_١ = ٢$

وبالمثل $٥ + ٤ت = س_٢ + ت ص_٢$ $\Leftarrow$ $س_٢ = ٥$ ، $ص_٢ = ٤$

$(س_١ + ت ص_١)(س_٢ + ت ص_٢) = (س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢) + ت (ص_١ س_٢ + س_١ ص_٢)$

$(٣ + ٢ت)(٥ + ٤ت) = (٣ \times ٥ - ٢ \times ٤) + (٣ \times ٤ + ٥ \times ٢)\, ت$

$= (١٥ - ٨) + (١٢ + ١٠)\, ت = ٧ + ٢٢ت$.

ب) $(١ + \sqrt{٢}\, ت)(\sqrt{٢} - ت) = [١ \times \sqrt{٢} - \sqrt{٢} \times (-١)] + [\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} + ١ \times (-١)]\, ت$

$= (\sqrt{٢} + \sqrt{٢}) + (٢ - ١)\, ت = ٢\sqrt{٢} + ت$

مثال (١ - ١٠)

حل المعادلة التالية :

$٧ت = (س + ٣ت)(ص - ت) - ٩$.

الحـــل :

$٧ت = (س + ٣ت)(ص - ت) - ٩$

$= (س ص - ٣ت^٢) + ت (٣ص - س) - ٩$ [تعريف الضرب]

$= س ص + ٣ - ٩ + ت (٣ص - س)$

$= س ص - ٦ + ت (٣ص - س)$ ، ومن تساوي عددين مركبين ينتج أن :

$س ص - ٦ = ٠$ $\Leftarrow$ $س ص = ٦$ .... (١)

$٣ص - س = ٧$ $\Leftarrow$ $س = ٣ص - ٧$ .... (٢)

بالتعويض عن قيمة س من (٢) في (١) ينتج أن :

$ص(٣ص - ٧) = ٦ \Leftarrow ٣ص^٢ - ٧ص - ٦ = ٠ \Leftarrow (٣ص + ٢)(ص - ٣) = ٠$

أما $٣ص + ٢ = ٠ \Leftarrow ص = -\frac{٢}{٣}$.

أو $ص - ٣ = ٠ \Leftarrow ص = ٣$

من (٢) عندما $ص = -\frac{٢}{٣} \Leftarrow س = -٩$

عندما $ص = ٣ \Leftarrow س = ٢$

خواص ضرب الأعداد المركبة :

١) عملية الضرب تبديلية على م أي أن :

$ع_١ \bullet ع_٢ = ع_٢ \bullet ع_١ \quad ، \quad \forall ع_١ ، ع_٢ \in م$

٢) عملية الضرب تجميعية على م ؛ أي أن :

$(ع_١ \bullet ع_٢) \bullet ع_٣ = ع_١ \bullet (ع_٢ \bullet ع_٣) ، \forall ع_١ ، ع_٢ ، ع_٣ \in م$

٣) الواحد هو المحايد الضربي للاعداد المركبة ؛ أي أن :

$ع \times ١ = ١ \times ع = ع \quad ، \quad \forall ع \in م^*$

٤) النظير الضربي للعدد $ع = س + ت ص = (س ، ص) \in م^*$ ، هو :

$\left(\frac{س}{س^٢ + ص^٢} - \frac{ص}{س^٢ + ص^٢} ت\right)$ ويرمز له بالرمز $\frac{١}{ع}$ أو $ع^{-١}$

٥) عملية الضرب تتوزع على الجمع ؛ أي أن :

$ع_١ \bullet (ع_٢ + ع_٣) = (ع_١ \bullet ع_٢) + (ع_١ \bullet ع_٣) ، \forall ع_١ ، ع_٢ ، ع_٣ \in م$.

مثال (١ – ١١)

أوجد النظير الضربي للعددين التاليين :

أ) $-٣ - ٤\,ت$ ، ب) $\sqrt{٢} + ت$.

الحـــل :

أ) بما أن النظير الضربي للعدد (س + ت ص) = $\left(\frac{س}{س^{٢} + ص^{٢}} ، \frac{-ص}{س^{٢} + ص^{٢}} \right)$.

$\therefore$ النظير الضربي للعدد $(-٣ - ٤ت) = \left(\frac{-٣}{(-٣)^{٢} + (-٤)^{٢}} ، \frac{-(-٤)}{(-٣)^{٢} + (-٤)^{٢}} \right)$

$= \left(\frac{-٣}{٩ + ١٦} ، \frac{٤}{٩ + ١٦} \right) = \left(\frac{-٣}{٢٥} ، \frac{٤}{٢٥} \right)$

$= \frac{-٣}{٢٥} + \frac{٤}{٢٥}\, ت$.

ب) النظير الضربي للعدد $(\sqrt{٢} + ت) = \left(\frac{\sqrt{٢}}{٢ + ١} ، \frac{-١}{٢ + ١} \right) = \frac{\sqrt{٢}}{٣} - \frac{١}{٣}\, ت$.

مرافق العدد المركب :

تعريف (١ – ٥)

يسمى العدد المركب $\bar{ع} = س - ت\,ص$ مرافقاً للعدد $ع = س + ت\,ص$.

يلاحظ أن الاختلاف بين العدد المركب ومرافقه هو فقط إشارة الجزء التخيلي كما هو موضح في الشكل (١–٦) ، أي أن العددان المترافقان متماثلان حول محور السينات .

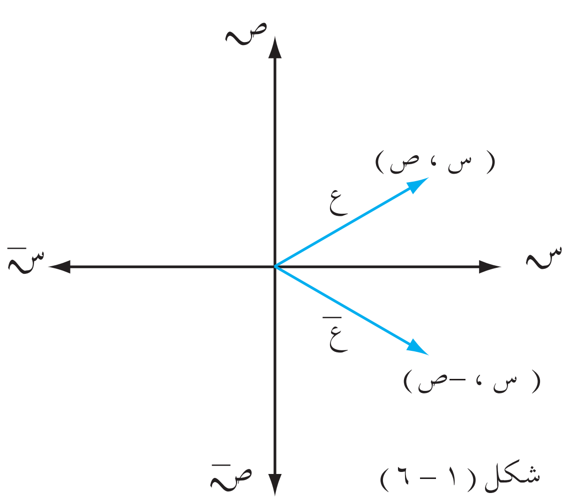
فمثلاً : مرافق العدد (٣+ ٤ت) هو(٣ – ٤ت)،

مرافق العدد ٧ هو نفسه ٧ ،

مرافق العدد – ٢ ت هو ٢ت ،

مرافق العدد (٢ت – ٥) هو (–٢ ت –٥)

وليس (٢ت + ٥) لماذا ؟ ....



شكل (١ – ٦)

خواص مرافق العدد المركب :

ليكن $\bar{ع}$ مرافق العدد ع ، إذن :

١) ع + $\bar{ع}$ = عدد حقيقي

٢) ع - $\bar{ع}$ = عدد تخيلي

٣) $\overline{ع_١ \pm ع_٢} = \bar{ع}_١ \pm \bar{ع}_٢$

٤) ع • $\bar{ع}$ = عدد حقيقي

٥) $\overline{ع_١ \bullet ع_٢} = \bar{ع}_١ \bullet \bar{ع}_٢$

٦) $\bar{\bar{ع}}$ = ع

نكتفي بإثبات صواب العلاقتين (١) ، (٣) كما يلي :

١) لتكن ع = س + ت ص فتكون $\bar{ع}$ = س – ت ص

∴ ع + $\bar{ع}$ = (س + ت ص) + (س – ت ص) = (س + س) + ت (ص – ص) = ٢س ∋ ح

٣) نفرض أن $ع_١ = س_١ + ت ص_١$ ، $ع_٢ = س_٢ + ت ص_٢$

$ع_١ \pm ع_٢ = (س_١ \pm س_٢) + ت (ص_١ \pm ص_٢)$ [تعريف (١ – ٣)]

$\overline{ع_١ \pm ع_٢} = (س_١ \pm س_٢) - ت (ص_١ \pm ص_٢)$ [تعريف (١ – ٥)]

$= (س_١ - ت ص_١) \pm (س_٢ - ت ص_٢) = \bar{ع}_١ \pm \bar{ع}_٢$.

تدريب (١ – ٥)

تحقق من صواب العلاقات (٢) ، (٤) ، (٥) ، (٦) السابقة .

ملاحظة : ليس كل عددين مركبين مجموعهما عدد حقيقي يكونان مترافقين .

فمثلاً : (٤ – ٣ت) ، (٥ + ٣ت) عددان غير مترافقين ومجموعهما يساوي ٩ (عدد حقيقي) .

مثال (١ - ١٢)

إذا كان $ع_1$ ، $ع_2$ عددين مركبين مترافقين ، اثبت أن : $ع_1^2$ ، $ع_2^2$ مترافقان .

الحـــل : ليكن $ع_1 = س + ت\,ص$

$\because$ $ع_1$ ، $ع_2$ مترافقان .

$\therefore$ $ع_2 = س - ت\,ص$

ومنه $ع_1^2 = (س + ت\,ص)^2 = (س^2 - ص^2) + 2\,ت\,س\,ص$

، $ع_2^2 = (س - ت\,ص)^2 = (س^2 - ص^2) - 2\,ت\,س\,ص$

$\therefore$ $ع_1^2$ ، $ع_2^2$ مترافقان .

ثانيا : قسمة الأعداد المركبة :

إذا كان $ع_1 = س_1 + ت\,ص_1$ ، $ع_2 = س_2 + ت\,ص_2$ ، فإن :

$$\frac{ع_1}{ع_2} = ع_1 \times \frac{1}{ع_2} \qquad (ع_2 \neq 0)$$

$= ع_1 \times$ النظير الضربي للعدد $ع_2$

$$= (س_1 + ت\,ص_1)\left(\frac{س_2}{س_2^2 + ص_2^2} + ت\,\frac{-ص_2}{س_2^2 + ص_2^2}\right) = \frac{(س_1 + ت\,ص_1)(س_2 - ت\,ص_2)}{س_2^2 + ص_2^2}$$

وهذه النتيجة يمكن الوصول إليها مباشرة بضرب كلٍ من البسط والمقام في $\bar{ع}_2$ (مرافق العدد $ع_2$)

أي أن $$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ع_1}{ع_2} \times \frac{\bar{ع}_2}{\bar{ع}_2} = \frac{(س_1 + ت\,ص_1)(س_2 - ت\,ص_2)}{(س_2 + ت\,ص_2)(س_2 - ت\,ص_2)}$$

$$= \frac{(س_1 + ت\,ص_1)(س_2 - ت\,ص_2)}{س_2^2 + ص_2^2}$$

وبذلك نتوصّل إلى القاعدة التالية :

عند قسمة عدد مركب على آخر نضرب كلا من البسط والمقام في العدد المرافق للمقام .

مثال (١ - ١٣)

بسّط ما يلي :

أ) $\frac{5}{2 + ت}$. ب) $\frac{3 + 2ت}{2 - 5ت}$. جـ) $\frac{(2 + ت)(1 - ت)}{(1 + ت)(3 - 2ت)}$.

الحـــل :

أ) $\frac{5}{2 + ت} = \frac{5(2 - ت)}{(2 + ت)(2 - ت)}$ [ضرب البسط والمقام في مرافق المقام]

$$= \frac{٥(٢ - ت)}{٤ + ١} = \frac{\cancel{٥}(٢ - ت)}{\cancel{٥}} = ٢ - ت \ .$$

ب) $$\frac{٣ + ٢ت}{٢ - ٥ت} = \frac{(٣ + ٢ت)(٢ + ٥ت)}{(٢ - ٥ت)(٢ + ٥ت)}$$ [ضرب البسط والمقام في (٢ + ٥ت)]

$$= \frac{(٦ - ١٠) + (١٥ + ٤)ت}{٤ + ٢٥}$$ [تعريف الضرب]

$$= \frac{-٤ + ١٩ت}{٢٩} = \frac{-٤}{٢٩} + \frac{١٩}{٢٩}ت \ .$$

جـ) $$\frac{(٢ + ت)(١ - ت)}{(١ + ت)(٣ - ٢ت)} = \frac{(٢ \times ١ + ١ \times ١) + (٢ \times -١ + ١ \times ١)ت}{(١ \times ٣ + ١ \times ٢) + (١ \times -٢ + ١ \times ٣)ت}$$

$$= \frac{٣ - ت}{٥ + ت}$$ [ضرب البسط والمقام في (٥ - ت)]

$$= \frac{(٣ - ت)(٥ - ت)}{(٥ + ت)(٥ - ت)} = \frac{١٤ - ٨ت}{٢٦} = \frac{٧}{١٣} - \frac{٤}{١٣}ت \ .$$

تمارين ومسائل (١ - ٣)

[١] أوجد ناتج ما يلي :

أ) $(٧ - ٥ت)(٣ + ت)$. ب) $(٢ ، -٤)(-٥ ، ٦)$.

جـ) $(٤ + ت)^{٢}(ت - ١)$. د) $(٢ + ٣ت)(٢ - ٣ت)(٧ + ٤ت)$.

هـ) $\frac{١}{٤ - ٣ت}$. و) $\frac{٣ + ٤ت}{٤ - ٥ت}$. ز) $\frac{٤ - ٥ت}{٧ت}$.

ح) $(-٣ - ٥ت)^{٢} - (٢ + ت)^{٢}$.

[٢] بسّط ما يلي :

أ) $(٥ + \sqrt{-٧})(٥ - \sqrt{-٧})$. ب) $(١ + ت)^{-٣}$.

جـ) $(١ - ت)^{٢}(١ + ت) - (٣ - ٤ت)^{٢}$. د) $\frac{٥ + ٢ت}{-١ + \sqrt{٣}\,ت}$.

هـ) $\left[\frac{٤ت^{٣} - ت}{٢ + ت}\right]^{٢}$.

[٣] أوجد مرافق كلّ من الأعداد المركبة التالية :

أ) $ت^{٣}$. ب) $\sqrt{-١} - ٣$. جـ) $٢ + \sqrt{-٩}$.

د) -٣ . هـ) $١١ت$. و) $\sqrt{-٢} + \sqrt{٣}$. ز) $\frac{١}{ت}$.

[٤] أوجد النظير الضربي لكلٍ مما يلي :

أ) $٢ + ٢ت$. ب) $(-٥ ، ٢)$. جـ) $(٦ + ٥ت)^٢$.

د) $\frac{٥}{\sqrt{٣}\,ت}$. هـ) $\frac{٤ت}{٢ - ت}$. و) $\frac{١ + ٤ت}{٢ - ٣ت}$.

[٥] أوجد قيمتي س ، ص التي تحقق مايلي :

أ) $س + ت ص = (١ + ت)(٤ - ٣ت)$. ب) $(٢ - ٥ت) = (١ + ت)(س + ت ص)$.

جـ) $(٣س + ٢ ت ص)(٢ + ت)^٢ = ١٠(١ + ت)$.

[٦] لتكن $ع_١ = ٢ + ت$ ، $ع_٢ = ٢ - ٥ت$ ، أوجد :

أ) $ع_١ \, ع_٢$. ب) $\overline{ع_١ \, ع_٢}$. جـ) $\bar{ع}_١ + \bar{ع}_٢$.

د) $\frac{ع_١}{ع_٢}$. هـ) $\frac{\bar{ع}_١ \, ع_٢}{ع_١}$. و) $\overline{ع_١ - ع_٢}$.

[٧] إذا كان $\bar{ع}$ مرافق العدد ع ؛ فأثبت أن :

أ) $(\bar{\bar{ع}}) = ع$. ب) $ع^٢ + \bar{ع}^٢$ = عدد حقيقي

جـ) $\frac{ع}{\bar{ع}}$ ، $\frac{\bar{ع}}{ع}$ مترافقان . د) $\left(\overline{\frac{١}{ع}}\right) = \frac{١}{\bar{ع}}$.

[٨] لتكن $ا = \frac{١ - ٢ت}{١ - ٣ت}$ ، $ب = \frac{٢ - ت}{٣ - ت}$ ، أثبت أن : ا ، ب عددان مترافقان .

ثم أوجد قيمة : $٢٥ (ا^٢ + ب^٢ - ٤٨ ا ب)$.

[٩] لتكن $(١ - ٥ت) ع_١ - ٢ع_٢ = -٣ - ٧ت$ ، أوجد : $ع_١$ ، $ع_٢$ حيث أنهما مترافقان .

[١٠] إذا كان $ع = \frac{١ - ت}{٢ + ت}$ ، فأوجد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد $\frac{ع + ١}{ع}$.

[١١] أثبت أن : $\left(\frac{\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} + ت}\right) + \left(\frac{\sqrt{٣} + ت}{\sqrt{٣} - ت}\right) = ١$.

[١٢] حلّل العدد $س^٢ + ١$ إلى عددين مترافقين .

١ - ٤ الصورة القطبية للعدد المركب

تعرفت على كيفية كتابة العدد المركب بالصورة س + ت ص ، والتي تسمى الصورة الجبرية ، ويمكن أن يكتب العدد المركب كزوج مرتب (س، ص) . كما تعرف أن كل زوج مرتب يمثل بنقطة في المستوى ، وفي الوقت نفسه فإن أي نقطة في المستوى تمثل زوجاً مرتباً ، وبالتالي تمثّل عدداً مركباً .

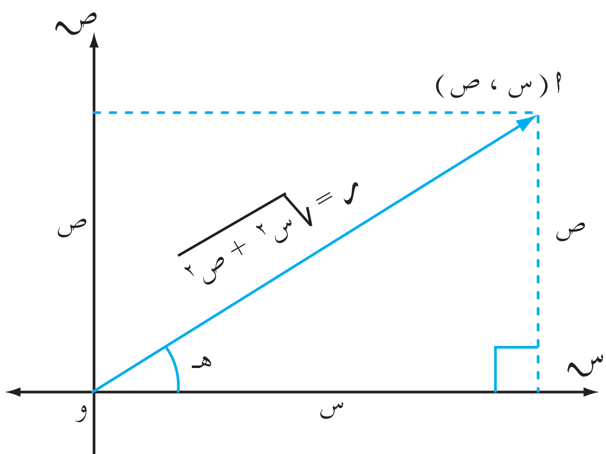
وكل زوج مرتب يمكن أن يمثل متجهاً قياسياً واحداً $(\overleftarrow{و ا})$ [انظر الشكل (١-٧)] .

فإذا فرضنا أن طول المتجه $\overleftarrow{و ا} = ر$ وقياس الزاوية التي يصنعها $\overleftarrow{و ا}$ مع محور السينات الموجب تساوي هـ .

فإنه يمكن التعبير عن النقطة (س ، ص) أو العدد المركب (س + ت ص) بدلالة ر ، هـ :

$ر = |\overrightarrow{و أ}| = |س + ت ص| = \sqrt{س^2 + ص^2}$

[مبرهنة فيثاغورث]



شكل (١ – ٧)

من الشكل (١–٧) نلاحظ أن :

$جتا هـ = \frac{س}{ر}$ ⟸ س = ر جتا هـ	
$جا هـ = \frac{ص}{ر}$ ⟸ ص = ر جا هـ	

∴ س + ت ص = ر جتاهـ + ر ت جاهـ = ر (جتاهـ + ت جاهـ) .

وهذه تسمّى بالصورة القطبية (أو المثلثية) ، ويسمّى ر بمقياس العدد المركب (أو طوله)، وتسمّى هـ بسعة العدد المركب (أو زاويته).

تعريف (١ – ٦)

الصـــورة القـطبيـــة للعـــدد ع = س + ت ص هي ع = ر (جتاهـ + ت جاهـ) حيث ر = |ع| (مقياس العدد ع)، هـ سعته ،وتُكتب اختصاراً بالصورة ع = [ر ، هـ] .

مثال (١ – ١٤)

أوجد مقياس وسعة العدد المركب (–١ + $\sqrt{٣}$ ت) .

الحـــل :

لإيجاد مقياس العدد المركب (–١ + $\sqrt{٣}$ ت) نحسب ر = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ حيث س = –١ ، ص = $\sqrt{٣}$.

∴ ر = | –١ + $\sqrt{٣}$ ت | = $\sqrt{١ + ٣}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

ولإيجاد سعة العدد المركب (هـ) :

$جتاهـ = \frac{س}{ر} = \frac{-١}{٢}$ ، $جاهـ = \frac{ص}{ر} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$.

وبما أن جتاهـ < ٠ ، جا هـ > ٠ ، إذن هـ تقع في الربع الثاني

السعة (هـ) = $\pi - \frac{\pi}{٣} = \frac{٢\pi}{٣} = ١٢٠^\circ$.

مثال (١ – ١٥)

اكتب كلا من الأعداد المركبة التالية بالصورة القطبية :

أ) ١ + ت . ب) −١ . جـ) ت .

الحـــل :

أ) ∵ الصورة القطبية للعدد ع = ر (جتا هـ + ت جا هـ) .

ر = | ١ + ت | = $\sqrt{(١)^٢ + (١)^٢}$ = $\sqrt{٢}$.

∴ جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$.

∵ جتا هـ > ٠ ، جا هـ > ٠ ، هـ تقع في الربع الأول .

∴ هـ = $\frac{\pi}{٤}$.

الصورة القطبية للعدد (١ + ت) = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$) أو ١ + ت = [$\sqrt{٢}$ ، $\frac{\pi}{٤}$] .

ب) ∵ ع = −١ ⟸ س = −١ ، ص = ٠

∴ ر = $\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}$ = $\sqrt{١ + ٠}$ = $\sqrt{١}$ = ١

جتاهـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}} = \frac{-١}{١}$ = −١ ،

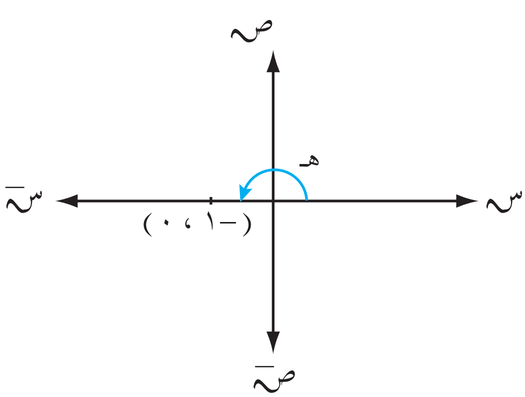
جاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{٠}{١}$ = ٠

هـ تنطبق على محور السينات السالب ، ∴ هـ = π

−١ = (جتا π + ت جا π) = [١ ، π]

وباعتبار (س ، ص) = (−١ ، ٠) ، ∴ هـ = π

من تمثيلها البياني [انظر شكل (١ – ٨)] .



شكل (١ – ٨)

جـ) ع = ت ⟸ س = ٠ ، ص = ١ .

∴ ر = $\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}$ = $\sqrt{٠ + ١}$ = $\sqrt{١}$ = ١

جتاهـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}} = \frac{٠}{١}$ = ٠ ،

جاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{١}{١}$ = ١

∴ هـ تنطبق على محور الصادات الموجب .

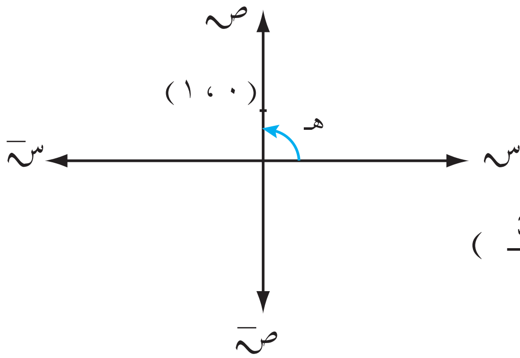
هـ = $\frac{\pi}{٢}$.

∴ الصورة القطبية للعدد ت = ١ (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$)

أو ت = [١ ، $\frac{\pi}{٢}$] .

وباعتبار (س ، ص) = (٠ ، ١) ، ∴ هـ = $\frac{\pi}{٢}$

من تمثيلها البياني [انظر شكل (١ – ٩)] .



شكل (١ – ٩)

مثال (١ – ١٦)

اكتب العددين المركبين التاليين بالصورة الجبرية :

أ) ع$_{١}$ = ٤ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°) . ب) ع$_{٢}$ = ٢ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°) .

الحـــل :

أ) ع$_{١}$ = ٤ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°) = ٤ ($\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) = ٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت .

ب) ع$_{٢}$ = ٢ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°) = ٢ (– جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°) = ٢ (– $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت)

= – $\sqrt{٣}$ + ت .

مقياس وسعة حاصل ضرب أو خارج قسمة عددين مركبين :

أولاً : مقياس وسعة حاصل ضرب عددين مركبين :

بفرض ع$_{١}$ = ر$_{١}$ (جتا هـ$_{١}$ + ت جا هـ$_{١}$) ، ع$_{٢}$ = ر$_{٢}$ (جتا هـ$_{٢}$ + ت جا هـ$_{٢}$) .

∴ ع$_{١}$ ع$_{٢}$ = [ر$_{١}$ (جتا هـ$_{١}$ + ت جا هـ$_{١}$)] [ر$_{٢}$ (جتا هـ$_{٢}$ + ت جا هـ$_{٢}$)]

= ر$_{١}$ ر$_{٢}$ (جتا هـ$_{١}$ + ت جا هـ$_{١}$) (جتا هـ$_{٢}$ + ت جا هـ$_{٢}$)

= ر$_{١}$ ر$_{٢}$ (جتا هـ$_{١}$ جتا هـ$_{٢}$ + ت جتا هـ$_{١}$ جا هـ$_{٢}$ + ت جا هـ$_{١}$ جتا هـ$_{٢}$ + ت^{٢} جا هـ$_{١}$ جا هـ$_{٢}$)

= ر$_{١}$ ر$_{٢}$ [(جتا هـ$_{١}$ جتا هـ$_{٢}$ – جا هـ$_{١}$ جا هـ$_{٢}$) + ت (جتا هـ$_{١}$ جا هـ$_{٢}$ + جا هـ$_{١}$ جتا هـ$_{٢}$)]

= ر$_{١}$ ر$_{٢}$ [جتا (هـ$_{١}$ + هـ$_{٢}$) + ت جا (هـ$_{١}$ + هـ$_{٢}$)]

لأن جتا (هـ$_{١}$ + هـ$_{٢}$) = جتا هـ$_{١}$ جتا هـ$_{٢}$ – جا هـ$_{١}$ جا هـ$_{٢}$ ، جا (هـ$_{١}$ + هـ$_{٢}$) = جتا هـ$_{١}$ جا هـ$_{٢}$ + جا هـ$_{١}$ جتا هـ$_{٢}$.

∴ مقياس (ع$_{١}$ ع$_{٢}$) = | ع$_{١}$ ع$_{٢}$ | = ر$_{١}$ ر$_{٢}$ = | ع$_{١}$ | | ع$_{٢}$ | .

∴ سعة (ع$_{١}$ ع$_{٢}$) = هـ$_{١}$ + هـ$_{٢}$.

مقياس حاصل ضرب عددين مركبين يساوي حاصل ضرب مقياسيهما .
وسعة حاصل ضرب عددين مركبين يساوي مجموع سعتيهما .

ثانياً : مقياس وسعة خارج قسمة عددين مركبين :

$$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١ (\text{جتا } هـ_١ + ت \text{ جا } هـ_١)}{ل_٢ (\text{جتا } هـ_٢ + ت \text{ جا } هـ_٢)}$$ [بضرب البسط والمقام في المرافق المقام]

$$= \frac{ل_١ (\text{جتا } هـ_١ + ت \text{ جا } هـ_١)(\text{جتا } هـ_٢ - ت \text{ جا } هـ_٢)}{ل_٢ (\text{جتا } هـ_٢ + ت \text{ جا } هـ_٢)(\text{جتا } هـ_٢ - ت \text{ جا } هـ_٢)}$$

$$= \frac{ل_١}{ل_٢} \cdot \frac{(\text{جتا } هـ_١ \text{ جتا } هـ_٢ - ت \text{ جتا } هـ_١ \text{ جا } هـ_٢ + ت \text{ جا } هـ_١ \text{ جتا } هـ_٢ - ت^٢ \text{ جا } هـ_١ \text{ جا } هـ_٢)}{\text{جتا}^٢ هـ_٢ + \text{جا}^٢ هـ_٢}$$

$$= \frac{ل_١}{ل_٢} \cdot \frac{(\text{جتا } هـ_١ \text{ جتا } هـ_٢ + \text{جا } هـ_١ \text{ جا } هـ_٢) + ت (\text{جا } هـ_١ \text{ جتا } هـ_٢ - \text{جتا } هـ_١ \text{ جا } هـ_٢)}{\text{جتا}^٢ هـ_٢ + \text{جا}^٢ هـ_٢}$$

بما أن : $\text{جتا}^٢ هـ_٢ + \text{جا}^٢ هـ_٢ = ١$.

$\text{جتا} (هـ_١ - هـ_٢) = \text{جتا } هـ_١ \text{ جتا } هـ_٢ + \text{جا } هـ_١ \text{ جا } هـ_٢$

$\text{جا} (هـ_١ - هـ_٢) = \text{جا } هـ_١ \text{ جتا } هـ_٢ - \text{جا } هـ_٢ \text{ جتا } هـ_١$

$$\therefore \frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} [\text{جتا} (هـ_١ - هـ_٢) + ت \text{ جا} (هـ_١ - هـ_٢)] = [\frac{ل_١}{ل_٢} ، هـ_١ - هـ_٢]$$

$$\text{مقياس} \left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right) = \left|\frac{ع_١}{ع_٢}\right| = \frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{|ع_١|}{|ع_٢|}$$

$$\text{سعة} \left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right) = هـ_١ - هـ_٢ \ .$$

مقياس خارج قسمة عددين مركبين يساوي خارج قسمة مقياسيهما وسعة خارج القسمة تساوي الفرق بين سعتيهما .

ثالثاً : حاصل ضرب عدد مركب ع في مرافقه يساوي مربع مقياس هذا العدد .

أي أن : $ع \ \bar{ع} = س^٢ + ص^٢ = |ع|^٢$.

رابعاً : مقلوب العدد المركب ع :

$$\frac{١}{ع} = \frac{\bar{ع}}{ع \ \bar{ع}} = \frac{١}{|ع|^٢} \ \bar{ع} \ .$$

تدريب (١ – ٦)

قارن بين سعة العددين (٤ + ٥ ت) ، ٧ (٤ + ٥ ت) .

مثال (١ – ١٧)

إذا كان ع = [ل ، هـ] . فاكتب بالصورة نفسها كلاً من الأعداد التالية ومثّلها بيانياً :

أ) $-ع$.   ب) $\bar{ع}$.   جـ) $\frac{١}{ع}$.

الحـــل :

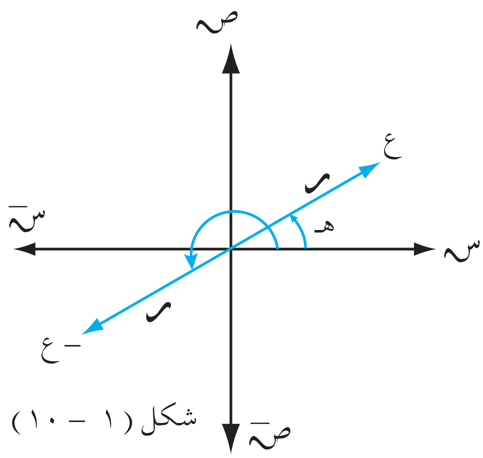
أ) ع = [ر ، هـ] = ر (جتا هـ + ت جا هـ)

– ع = – ر (جتا هـ + ت جا هـ)

= ر (– جتا هـ – ت جا هـ)

= ر [جتا (هـ + π) + ت جا (هـ + π)]

= [ر ، هـ + π] [انظر الشكل (١ – ١٠)]



شكل (١ – ١٠)

مما سبق نلاحظ أن : | –ع | = | ع | = ر

سعة العدد (–ع) = هـ + π .

أي أن للعدد المركب (ع) ونظيره الجمعي (–ع) المقياس نفسه ، بينما تزيد سعة النظير الجمعي بمقدار π .

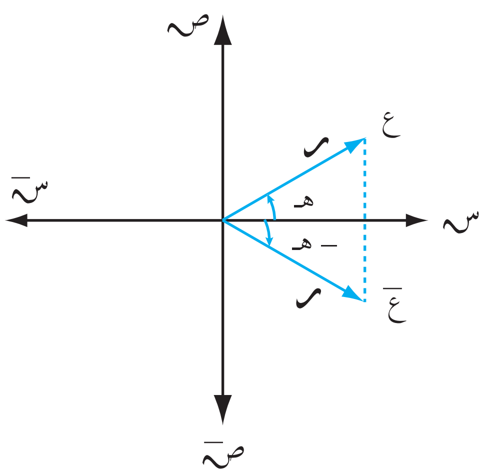
ب) ∵ ع = ر (جتا هـ + ت جا هـ)

∴ ع̄ = ر (جتا هـ – ت جا هـ)

ع̄ = ر [جتا (٢π – هـ) + ت جا (٢π – هـ)]

أو ع̄ = ر [جتا (– هـ) + ت جا (– هـ)]

[انظر الشكل (١ – ١١)]



شكل (١ – ١١)

ونلاحظ أن :

| ع | = | ع̄ | = ر .

سعة (ع̄) = ٢π – هـ = – هـ

أي أن العددين المترافقين ، لهما المقياس نفسه ويختلفان في إشارة سعتيهما .

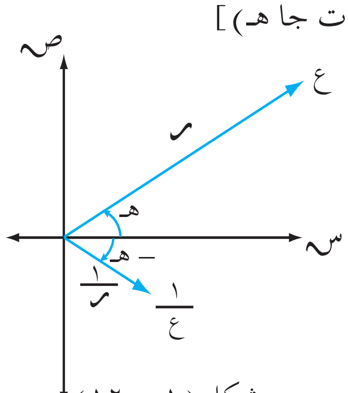
جـ) ∵ ع = ر (جتا هـ + ت جا هـ)

∴ $\frac{\text{١}}{\text{ع}} = \frac{\text{١}}{\text{ر (جتا هـ + ت جا هـ)}}$ [الضرب في (جتا هـ – ت جا هـ)]

$= \frac{\text{جتا هـ – ت جا هـ}}{\text{ر (جتا هـ + ت جا هـ) (جتا هـ – ت جا هـ)}}$

$= \frac{\text{١}}{\text{ر}} \times \frac{\text{جتا هـ – ت جا هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ + جا}^{٢}\text{ هـ}} = \frac{\text{١}}{\text{ر}}$ (جتا هـ – ت جا هـ)

$= \frac{\text{١}}{\text{ر}}$ (جتا (٢π – هـ) + ت جا (٢π – هـ)) [انظر الشكل (١ – ١٢)]



شكل (١ – ١٢)

نلاحظ أن : $\left|\frac{\text{١}}{\text{ع}}\right| = \frac{\text{١}}{\text{ر}}$ ، سعة ($\frac{\text{١}}{\text{ع}}$) = سعة (ع̄) = ٢π – هـ أو – هـ .

أي أن مقياس النظير الضربي للعدد المركب (ع) هو $\frac{\text{١}}{\text{ر}}$ بينما سعته تساوي سعة مرافق العدد المركب (ع̄).

مثال (١ - ١٨)

أوجد السعة لكل من الأعداد التالية :

أ) $ع_١$ = (جتا هـ - ت جا هـ) .   ب) $ع_٢$ = جا هـ + ت جتا هـ .

جـ) $ع_٣$ = - جا هـ - ت جتا هـ .

الحـــل :

أ) ∵ $ع_١$ = جتا هـ - ت جا هـ = جتا (- هـ) + ت جا (- هـ) = جتا (٢ π - هـ) + ت جا (٢ π - هـ) .

∴ سعة ($ع_١$) = ٢ π - هـ = - هـ .

ب) ∵ $ع_٢$ = جا هـ + ت جتا هـ   نحولها إلى الصورة القطبية العامة للعدد المركب

$= جتا (\frac{\pi}{٢} - هـ) + ت جا (\frac{\pi}{٢} - هـ)$ ، [جاهـ = جتا ($\frac{\pi}{٢}$ - هـ) ؛ جتاهـ = جا ($\frac{\pi}{٢}$ - هـ)]

∴ سعة ($ع_٢$) = $\frac{\pi}{٢}$ - هـ .

جـ) ∵ $ع_٣$ = - جا هـ - ت جتا هـ = جتا ($\frac{٣\pi}{٢}$ - هـ) + ت جا ($\frac{٣\pi}{٢}$ - هـ)

∴ سعة ($ع_٣$) = $\frac{٣\pi}{٢}$ - هـ .

تدريب (١ - ٧)

أوجد السعة لكل من :

$ع_١$ = جا هـ - ت جتا هـ ، $ع_٢$ = - جا هـ + ت جتا هـ .

مثال (١ - ١٩)

أوجد الصورة القطبية للعدد ع = $\frac{٥ + \sqrt{٣}\,ت}{\sqrt{٣} + ٢ت}$.

الحـــل :

$$ع = \frac{٥ + \sqrt{٣}\,ت}{\sqrt{٣} + ٢ت}$$

$$= \frac{(٥ + \sqrt{٣}\,ت)(\sqrt{٣} - ٢ت)}{(\sqrt{٣} + ٢ت)(\sqrt{٣} - ٢ت)}$$ [بضرب البسط والمقام في مرافق المقام] .

$$= \frac{(٥\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣}) + (٣ - ١٠)ت}{٣ + ٤} = \frac{٧\sqrt{٣} - ٧ت}{٧} = \sqrt{٣} - ت .$$ [تعريف (١ - ٤)]

ولتحويل العدد $\sqrt{٣} - ت$ إلى الصورة القطبية نتبع الآتي :

$س = \sqrt{٣}$ ، $ص = -١$ $\Leftarrow$ $ر = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = ٢$

$جتا\ هـ = \frac{س}{ر} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $جا\ هـ = \frac{ص}{ر} = -\frac{١}{٢}$

هـ تقع في الربع الرابع

$هـ = ٢\pi - \frac{\pi}{٦} = \frac{١١\pi}{٦} = -\frac{\pi}{٦}$

$\therefore$ $ع = ٢\left(جتا\ \frac{١١\pi}{٦} + ت\ جا\ \frac{١١\pi}{٦} \right)$ أو $ع = ٢\left(جتا\ \frac{\pi}{٦} - ت\ جا\ \frac{\pi}{٦} \right)$

مثال (١ − ٢٠)

ليكن $ع_{١} = [\,٨ ، ٦٠^{\circ}\,]$ ، $ع_{٢} = [\,٤ ، ١٢٠^{\circ}\,]$. أوجد بالصورة القطبية كلاً مما يأتي :

أ) $ع_{١}\, ع_{٢}$. ب) $\frac{٤ ت}{ع_{٢}}$.

الحـــل :

أ) $ع_{١} = [\,٨ ، ٦٠^{\circ}\,]$ $\Leftarrow$ $ر_{١} = ٨$ ، $هـ_{١} = ٦٠^{\circ}$.

$ع_{٢} = [\,٤ ، ١٢٠^{\circ}\,]$ $\Leftarrow$ $ر_{٢} = ٤$ ، $هـ_{٢} = ١٢٠^{\circ}$.

$\therefore$ $ع_{١}\, ع_{٢} = ر_{١}\, ر_{٢}\, [\, جتا\,(هـ_{١} + هـ_{٢}) + ت\ جا\,(هـ_{١} + هـ_{٢})\,] = ٨ \times ٤\ (جتا\ ١٨٠^{\circ} + ت\ جا\ ١٨٠^{\circ})$

$= [\,٣٢ ، ١٨٠^{\circ}\,]$.

ب) $\because$ $٤ ت = ٤\ (جتا\ ٩٠^{\circ} + ت\ جا\ ٩٠^{\circ}) = [\,٤ ، ٩٠^{\circ}\,]$

$\therefore$ $\frac{٤ ت}{ع_{٢}} = \frac{[\,٤ ، ٩٠^{\circ}\,]}{[\,٤ ، ١٢٠^{\circ}\,]} = [\,\frac{٤}{٤} ، ٩٠^{\circ} - ١٢٠^{\circ}\,] = [\,١ ، -٣٠^{\circ}\,]$.

مثال (١ − ٢١)

ليكن $ع = [\,٢ ، هـ\,]$ ، حيث $هـ \in\,]\,\pi ، \frac{٣\pi}{٢}\,[$ ، $ظا\ هـ = \frac{٣}{٤}$.

أوجد الصورة القطبية والجبرية لكل من : أ) $(\bar{ع})^{٢}$ ، ب) $\frac{١}{ع}$.

الحـــل :

أ) $\because$ $ع = [\,٢ ، هـ\,] = ٢\ (جتا\ هـ + ت\ جا\ هـ)$.

∴ $\bar{ع}$ = ٢ (جتا هـ – ت جا هـ)

$(\bar{ع})^{٢}$ = ٤ (جتا ٢ هـ – ت جا ٢ هـ) وهي الصورة القطبية .

∵ جتا ٢ هـ = ٢ $\text{جتا}^{٢}$ هـ – ١ ، جا ٢ هـ = ٢ جا هـ جتا هـ .

∴ $(\bar{ع})^{٢}$ = ٤ (٢ $\text{جتا}^{٢}$ هـ – ١ – ت × ٢ جا هـ جتا هـ)

∵ ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$ ، ∴ جتا هـ = $\frac{-٤}{٥}$ ، جا هـ = $\frac{-٣}{٥}$ لأن هـ ∈] π ، $\frac{٣\pi}{٢}$ [

$(\bar{ع})^{٢}$ = ٤($\frac{٣٢}{٢٥}$ – ١ – ت × ٢ × $-\frac{٣}{٥}$ × $-\frac{٤}{٥}$) ،

= ٤ ($\frac{٧}{٢٥}$ – $\frac{٢٤}{٢٥}$ ت) وهي الصورة الجبرية

ب) ∵ $\bar{ع}$ = [٢ ، – هـ] = ٢ (جتاهـ – ت جاهـ)

∴ $\frac{١}{\bar{ع}}$ = $\frac{١}{٢}$ (جتا هـ + ت جا هـ) وهي الصورة القطبية

= $\frac{١}{٢}$ ($-\frac{٤}{٥}$ – $\frac{٣}{٥}$ ت) = $-\frac{٢}{٥}$ – $\frac{٣}{١٠}$ ت وهي الصورة الجبرية .

تمارين ومسائل (١ – ٤)

[١] أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد المركبة الآتية :

أ) $\sqrt{٣}$ + ت . ب) –٣ . جـ) ٤ ت .

د) – $\sqrt{٣}$ + ت . هـ) –٣ + ٣ $\sqrt{٣}$ ت . و) $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت .

[٢] اكتب كلاً من الأعداد التالية بالصورة القطبية :

أ) –٢ + ٢ ت . ب) ت (١ + ت). جـ) جا ٦٠° + ت جتا ٦٠° .

د) $\frac{١ – ت}{١ + ت}$. هـ) $\frac{٨}{١ – \sqrt{٣}\,ت}$. و) (١ + ت) (١ – ت) .

ز) $\sqrt{٢}$ (١ + ت) . ح) ٤ – ٤ $\sqrt{٣}$ ت . ط) $\frac{٢ + \sqrt{٥}\,ت}{\sqrt{٥} – ٢\,ت}$.

[٣] اكتب الأعداد المركبة الآتية بالصورة الجبرية :

أ) ٢ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°) . ب) ٣ (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$) .

جـ) جتا π + ت جا π .   د) جا ٢٤٠° + ت جتا ٢٤٠° .

هـ) ٢ $\sqrt{٣}$ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°) .   و) [$\sqrt{٢}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$] .

[٤] أوجد كلاً من: $-$ع ، $\overline{ع}$ ، $\frac{١}{ع}$ ، $\frac{١}{\overline{ع}}$ بالصورة القطبية في كل من الحالات التالية :

أ) ع = ٢ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ − ت جا $\frac{\pi}{٣}$) .   ب) ع = − $\sqrt{٣}$ + ت .

جـ) ع = ٢ − ٢ ت .   د) ع = −٨ ت .

[٥] أوجد ع$_{١}$ ع$_{٢}$ ، $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ لكل مما يلي :

أ) ع$_{١}$ = ٢ (جتا ٣ هـ + ت جا ٣ هـ) ، ع$_{٢}$ = ٣ (جتا ٤ هـ + ت جا ٤ هـ) .

ب) ع$_{١}$ = ٥ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$) ، ع$_{٢}$ = ٢ (جتا $\frac{\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{\pi}{٦}$) .

جـ) ع$_{١}$ = ١٢ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°) ، ع$_{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ (جتا ١٥٠° − ت جا ١٥٠°) .

د) ع$_{١}$ = $\sqrt{٣}$ − ت ، ع$_{٢}$ = ٤ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°) .

[٦] لتكن أ = جتا ٢ هـ$_{١}$ + ت جا ٢ هـ$_{١}$ ، ب = جتا ٢ هـ$_{٢}$ + ت جا ٢ هـ$_{٢}$ ؛ (هـ$_{١}$ − هـ$_{٢}$) ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

أثبت أن : ١) أ + ب = ٢ جتا (هـ$_{١}$ − هـ$_{٢}$) [جتا (هـ$_{١}$ + هـ$_{٢}$) + ت جا (هـ$_{١}$ + هـ$_{٢}$)]

٢) $\frac{أ - ب}{أ + ب}$ = ت ظا (هـ$_{١}$ − هـ$_{٢}$) .

[٧] اكتب العدد $\frac{٥ + ت}{٢ + ٣ ت}$ بالصورتين الجبرية والقطبية .

[٨] لتكن ع$_{١}$ = ١ − ت ، ع$_{٢}$ = ١ − $\sqrt{٣}$ ت ؛

أ) اكتب كلاً من ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ بالصورة القطبية ، ب) أوجد ع$_{١}$ ع$_{٢}$ بالصورتين الجبرية والقطبية .

[٩] إذا كان ع$_{١}$ = ٥ (جتا ٣ هـ + ت جا ٣ هـ) ، ع$_{٢}$ = ٣ (جتا هـ − ت جا هـ) ، فأوجد بالصورة القطبية كلاً من :

أ) ع$_{١}$ ع$_{٢}$ ، ب) ع$_{١}$ ع$_{٢}^{٢}$ ،

جـ) $\overline{ع_{١} ع_{٢}}$ حيث هـ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [.

١ – ٥ القـــوى والجــذور

أولاً : القـــوى :

تعرف أن : $ع_١ ع_٢ = ر_١ ر_٢ [جتا (هـ_١ + هـ_٢) + ت جا (هـ_١ + هـ_٢)]$.

ولإيجاد قوى أي عدد مركب مثلا (س + ت ص) ندرس المبرهنة التالية :

مبرهنة دي موافر :

$ع^{ﻫ} = [ر (جتاهـ + ت جاهـ)]^{ﻫ} = ر^{ﻫ} [جتا ﻫ هـ + ت جا ﻫ هـ] = [ر^{ﻫ}؛ ﻫ هـ] ، ﻫ \in ص$

حيث ع = ر (جتاهـ + ت جاهـ) .

نقدم هذه المبرهنة بدون برهان ، ولكن نوضحها على النحو التالي :

نفرض أن :

$ع = ر (جتاهـ + ت جاهـ)$

$ع^٢ = ع ع = ر (جتاهـ + ت جاهـ) \times ر (جتاهـ + ت جاهـ)$

$= ر^٢ (جتا ٢هـ + ت جا ٢هـ)$ [تعريف ضرب عددين مركبين] .

$ع^٣ = ع^٢ ع = ر^٢ (جتا ٢هـ + ت جا ٢هـ) \times ر (جتاهـ + ت جاهـ)$

$= ر^٣ (جتا ٣هـ + ت جا ٣هـ)$

.
.
.

$ع^{ﻫ} = ع^{ﻫ-١} \times ع = ر^{ﻫ-١} [جتا (ﻫ - ١) هـ + ت جا (ﻫ - ١)هـ] \times ر (جتا هـ + ت جا هـ)$

$= ر^{ﻫ} (جتا ﻫ هـ + ت جا ﻫ هـ)$.

مثال (١ – ٢٢)

أوجد مقياس وسعة العددين التاليين :

أ) $\left[٢(جتا \frac{\pi}{١٢} + ت جا \frac{\pi}{١٢}) \right]^٦$.

ب) $\left(\frac{\sqrt{٢} ت}{١ + ت} \right)^٨$.

الحــــل : أ) حسب مبرهنة دي موافر نحصل على :

$[٢ (جتا \frac{\pi}{١٢} + ت جا \frac{\pi}{١٢})]^٦ = ٢^٦ (جتا ٦ \times \frac{\pi}{١٢} + ت جا ٦ \times \frac{\pi}{١٢})$

$= ٦٤ (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢}) = [٦٤ ، \frac{\pi}{٢}]$

$\therefore$ المقياس = ٦٤ ، السعة = $\frac{\pi}{٢}$.

ب) تحويل البسط والمقام للعدد $\frac{\sqrt{٢}\,ت}{١ + ت}$ إلى الصورة القطبية :

$\sqrt{٢}\,ت = \sqrt{٢}\,(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٢} + ت\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٢}) = [\,\sqrt{٢}\,،\,\frac{\pi}{٢}\,]$ ،

$١ + ت = \sqrt{٢}\,(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٤} + ت\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٤}) = [\,\sqrt{٢}\,،\,\frac{\pi}{٤}\,]$

$\therefore\ \frac{\sqrt{٢}\,ت}{١ + ت} = \frac{[\,\sqrt{٢}\,،\,\frac{\pi}{٢}\,]}{[\,\sqrt{٢}\,،\,\frac{\pi}{٤}\,]} = [\,\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}\,،\,\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٤}\,]$

$= [\,١\,،\,\frac{\pi}{٤}\,]$

$\left(\frac{\sqrt{٢}\,ت}{١ + ت}\right)^{٨} = [\,١\,،\,\frac{\pi}{٤}\,]^{٨} = [\,١^{٨}\,،\,\frac{٨\,\pi}{٤}\,] = [\,١\,،\,٢\,\pi\,] = [\,١\,،\,٠^{\circ}\,]$

$\therefore$ المقياس = ١ ، والسعة = ٠ .

مثال (١ - ٢٣)

أوجد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب $(-١ + \sqrt{٣}\,ت)^{٣}$.

الحـــل :

$\because$ ع = $-١ + \sqrt{٣}\,ت$

$\therefore$ س = -١ ، ص = $\sqrt{٣}$ $\Leftarrow$ ر = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \sqrt{٤} = ٢$

$\therefore$ جتاهـ = $\frac{س}{ر} = -\frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{ص}{ر} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore$ هـ تقع في الربع الثاني .

هـ = $١٢٠^{\circ} = \frac{٢\,\pi}{٣}$ $\Leftarrow$ ع = $[\,٢\,،\,\frac{٢\,\pi}{٣}\,]$

$\therefore$ ع^{٣} = $[\,٢^{٣}\,،\,٣ \times \frac{٢\,\pi}{٣}\,] = [\,٨\,،\,٢\,\pi\,]$

$= ٨\,(\text{جتا}\,٢\,\pi + ت\,\text{جا}\,٢\,\pi)$

$= ٨\,[\,١ + (٠)\,ت\,] = ٨$.

$\therefore$ س = ٨ ، ص = ٠ .

الجزء الحقيقي = ٨ ، الجزء التخيلي = ٠ .

مثال (١ – ٢٤)

بسِّط ما يلي : $\frac{(\text{جتا هـ} - \text{ت جا هـ})^{١٠}}{(\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})^{١٢}}$

الحـــل : البسط = [جتاهـ – ت جاهـ]^{١٠} = [جتا (– هـ) + ت جا (– هـ)]^{١٠}

= جتا (–١٠هـ) + ت جا (–١٠هـ) (مبرهنة دي موافر)

المقام = [جتاهـ + ت جاهـ]^{١٢} = جتا (١٢هـ) + ت جا (١٢ هـ)

∴ $\frac{\text{جتا} (-١٠ \text{هـ}) + \text{ت جا} (-١٠\text{هـ})}{\text{جتا} (١٢ \text{هـ}) + \text{ت جا} (١٢ \text{هـ})} = \frac{[١ ، -١٠ \text{هـ}]}{[١ ، ١٢ \text{هـ}]} = [\frac{١}{١} ، -١٠\text{هـ} - ١٢\text{هـ}] = [١ ، -٢٢\text{هـ}]$.

مثال (١ – ٢٥)

عبّر عن جتا ٢ هـ ، جا ٢ هـ بدلالة جا هـ ، جتاهـ ؛ باستخدام مبرهنة دي موافر .

الحـــل : (جتا هـ + ت جا هـ)^{٢} = جتا^{٢}هـ – جا^{٢}هـ + ٢ت جا هـ جتاهـ .

وحسب مبرهنة دي موافر (جتا هـ + ت جا هـ)^{٢} = (جتا ٢هـ + ت جا ٢هـ)

ومن تساوي عددين مركبين ينتج أن :

جتا ٢ هـ = جتا^{٢} هـ – جا^{٢} هـ .

جا ٢ هـ = ٢جا هـ جتا هـ .

تدريب (١ – ٨)

أوجد جتا ٣هـ ، جا ٣ هـ بدلالة جاهـ ، جتا هـ .

ثانياً : الجـــذور :

إذا كان ن ∈ ط* ، وكان أ ، ع ∈ م ، فإن المعادلة ع^{ن} = أ يوجد لها ن من الجذور .

نفرض أن أ = ر (جتا هـ + ت جا هـ) ، ع = ر$_{١}$ (جتا هـ$_{١}$ + ت جا هـ$_{١}$)

بالتعويض في المعادلة ع^{ن} = أ

ر$_{١}^{ن}$ (جتا هـ$_{١}$ + ت جا هـ$_{١}$)^{ن} = ر (جتا هـ + ت جا هـ)

ر$_{١}^{ن}$ [جتا (ن هـ$_{١}$) + ت جا (ن هـ$_{١}$)] = ر (جتا هـ + ت جا هـ) ... لماذا ؟

⇐ ر$_{١}^{ن}$ = ر ⇐ ر$_{١}$ = $\sqrt[ن]{ر}$

ولكن $د$ هـ$_١$ = هـ + ٢ ك π ، حيث ك $\in$ ص

$\Leftarrow$ هـ$_١$ = $\frac{هـ + ٢ ك \pi}{د}$

$\therefore$ ع = $ر^{\frac{١}{د}}$ [جتا $\frac{هـ + ٢ ك \pi}{د}$ + ت جا $\frac{هـ + ٢ ك \pi}{د}$] = [$ر^{\frac{١}{د}}$ ، $\frac{هـ + ٢ ك \pi}{د}$]

وبالتعويض عن قيم ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . ، $د$ − ١ نحصل على $د$ من الجذور .

فمثلاً : إذا أردنا إيجاد الجذرين التربيعيين للعدد ع نضع ك = ٠ ، ١ والجذور التكعيبية نضع ك = ٠ ، ١ ، ٢ وهكذا .

مثال (١ − ٢٦)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد (٢ − ٢ $\sqrt{٣}$ ت) بالصيغتين القطبية والجبرية .

الحـــل :

أولاً : الصيغة القطبية :

نحوّل ع = ٢ − ٢ $\sqrt{٣}$ ت إلى الصورة القطبية .

س = ٢ ، ص = −٢ $\sqrt{٣}$ $\Leftarrow$ ر = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = $\sqrt{٤ + ١٢}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤

$\therefore$ جتا هـ = $\frac{س}{ر}$ = $\frac{١}{٢}$ ، جاهـ = $\frac{ص}{ر}$ = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

هـ = −٦٠° ، لأنها تقع في الربع الرابع حيث جتا هـ > ٠ ، جا هـ < ٠

$\therefore$ هـ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

ع = [ر ، هـ] = [٤ ، ٣٠٠°]

$\sqrt{ع}$ = $\sqrt{ر}$ (جتا $\frac{هـ + ٢ ك \pi}{٢}$ + ت جا $\frac{هـ + ٢ ك \pi}{٢}$) ، ك = ٠ ، ١

عندما ك = ٠ ، فإن الجذر الأول = $\sqrt{٤}$ (جتا $\frac{٣٠٠°}{٢}$ + ت جا $\frac{٣٠٠°}{٢}$) = ٢(جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°)

= ٢ (− $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ت) = − $\sqrt{٣}$ + ت

عندما ك = ١ ، فإن الجذر الثاني = ٢ (جتا ٣٣٠° + ت جا ٣٣٠°) = ٢ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ت) = $\sqrt{٣}$ − ت

ثانياً : الطريقة الجبرية :

نضع $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}\,ت} = س + ص\,ت$ (وبتربيع الطرفين)

$2 - 2\sqrt{3}\,ت = (س + ت\,ص)^2$

$2 - 2\sqrt{3}\,ت = س^2 - ص^2 + 2\,س\,ص\,ت$

بمساواة الجزأين الحقيقي والتخيلي في الطرفين نحصل على :

$س^2 - ص^2 = 2$ .... (١)

$2\,س\,ص = -2\sqrt{3}$ .... (٢)

وبتربيع المعادلتين (١) ، (٢) وجمعهما ينتج أن :

$(س^2 + ص^2)^2 = 16$

$\therefore س^2 + ص^2 = 4$ .... (٣)

بجمع المعادلتين (١) ، (٣) ينتج أن : $2\,س^2 = 6 \Leftarrow س^2 = 3$

$\Leftarrow س = \pm\sqrt{3}$

بطـــــرح (٣) من (١) ينتج أن : $-2ص^2 = -2 \Leftarrow ص^2 = 1 \Leftarrow ص = \pm 1$

من المعادلة (٢) نرى أن حاصل ضرب س في ص سالب ، وعليه فإمّا أن يكون س سالباً عندما ص موجباً أو العكس .

$\therefore$ جذرا العدد المركب هما : $\pm(\sqrt{3} - ت)$.

مثال (١ – ٢٧)

حل المعادلة : $ع^6 + 64 = 0$

الحـــل :

$ع^6 = -64 = 64\,(جتا\,\pi + ت\,جا\,\pi)$

$ع = 64^{\frac{1}{6}}\left(جتا\,\frac{\pi + 2ك\pi}{6} + ت\,جا\,\frac{\pi + 2ك\pi}{6}\right)$ ، ك $= 0$ ، ١ ، ... ، ٥

$ك = 0 \Leftarrow ع_1 = 2\left(جتا\,\frac{\pi}{6} + ت\,جا\,\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + ت$

$ك = 1 \Leftarrow ع_2 = 2\left(جتا\,\frac{\pi}{2} + ت\,جا\,\frac{\pi}{2}\right) = 2\,ت$

$ك = 2 \Leftarrow ع_3 = 2\left(جتا\,\frac{5\pi}{6} + ت\,جا\,\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + ت$

ك = ٣ $\Leftarrow$ ع$_٤$ = ٢ (جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{٧\pi}{٦}$) = − $\sqrt{٣}$ − ت

ك = ٤ $\Leftarrow$ ع$_٥$ = ٢ (جتا $\frac{٣\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٢}$) = − ٢ ت

ك = ٥ $\Leftarrow$ ع$_٦$ = ٢ (جتا $\frac{١١\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{١١\pi}{٦}$) = $\sqrt{٣}$ − ت .

تمارين ومسائل (١ −٥)

[١] أوجد ناتج ما يلي في أبسط صورة مستخدماً مبرهنة دي موافر :

أ) [٢ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)]^{٣} .

ب) [$\sqrt{٢}$ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)]^{٤} .

جـ) [$\sqrt{٥}$ (جتا ٢٠° + ت جا ٢٠°)]^{٤} .

د) (١ + ت)^{٦} .

هـ) (−١ + $\sqrt{٣}$ ت)^{٥} .

و) ($\frac{٢}{−١ − \sqrt{٣}\ ت}$)^{٤} .

[٢] بسّط كلاً مما يأتي :

أ) $\frac{(\text{جتا هـ} − \text{ت جا هـ})^{٢}}{(\text{جتا هـ} − \text{ت جا هـ})^{٣}}$.

ب) $\frac{(\text{جتا هـ} − \text{ت جا هـ})^{٢٠}}{(\text{جتا هـ} − \text{ت جا هـ})^{٢٢}}$.

جـ) $\frac{\text{جتا ٢هـ} + \text{ت جا ٢ هـ}}{\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ}}$.

د) $\frac{(٣ + ٤\ ت)^{٥}(١ − ت)^{٤}}{(٦ + ٨\ ت)^{٥}}$.

هـ) $\frac{(١ + ت)^{٢}}{(١ − ت)^{٢}}$.

و) $\frac{(\text{جتا ٣٥°} + \text{ت جا ٣٥°})^{٨}}{(\text{جتا ١٩°} + \text{ت جا ١٩°})^{٧}}$.

[٣] أثبت صواب ما يلي :

أ) $\frac{-١}{(\text{جتا}\ ٣٠^\circ - \text{ت جا}\ ٣٠^\circ)^{١٢}} = -١$.

ب) $\frac{\text{ت}}{(\text{جتا}\ ٧٠^\circ - \text{ت جا}\ ٧٠^\circ)^{٣}} = \frac{١}{٢}(١ - \sqrt{٣}\ \text{ت})$.

جـ) $\frac{(١ + \sqrt{٣}\ \text{ت})^{٤}(١ + \text{ت})^{٨}}{(\text{جتا}\ ١٠٠^\circ - \text{ت جا}\ ١٠٠^\circ)^{٣}} = -٢٥٦$.

د) $\frac{(\text{جتا}\ ٣٠^\circ + \text{ت جا}\ ٣٠^\circ)^{٥} \times (\text{جتا}\ ٤٥^\circ - \text{ت جا}\ ٤٥^\circ)^{٦}}{(\text{جتا}\ ٧٥^\circ + \text{ت جا}\ ٧٥^\circ)^{٢}} = \text{ت}$.

[٤] أوجد الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركبة الآتية باستخدام الصيغة الجبرية :

أ) ٨ت .   ب) $\frac{١ + \text{ت}}{\sqrt{٢}}$.   جـ) $٩ - ٤٠\text{ت}$.

د) $\frac{٨(١ - \text{ت})}{١ + \text{ت}} + ١٥$.   هـ) $١٥ + ٨\text{ت}$.   و) $١ - ٢\text{ت} - ٢\text{ت}^{٢} + ٢\text{ت}^{٣}$.

[٥] أوجد بالصورة القطبية الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ) -٢ت .   ب) -٤ .   جـ) $\sqrt{٣} - \text{ت}$.

د) $٢ + ٢\sqrt{٣}\ \text{ت}$.   هـ) $\frac{٢(٥ - ٣\sqrt{٣}\ \text{ت})}{١ + ٢\sqrt{٣}\ \text{ت}}$.   و) $٩(\text{جتا}\ ٣٠٠^\circ + \text{ت جا}\ ٣٠٠^\circ)$.

ز) $\text{جا}\ \frac{٢\pi}{٣} + \text{ت جتا}\ \frac{٢\pi}{٣}$.   ح) $\frac{-٨}{١ + \sqrt{٣}\ \text{ت}}$.   ي) $[\ ٤ \text{،} \frac{\pi}{٣}\ ]$.

[٦] أوجد قيمة ما يأتي :

أ) $\sqrt[٣]{٨(\text{جتا}\ ٦٠^\circ + \text{ت جا}\ ٦٠^\circ)}$.   ب) $\sqrt[٣]{-٢ + ٢\text{ت}}$.

جـ) $\sqrt[٤]{-٤}$.   د) $\sqrt[٩]{-\text{ت}}$.

هـ) $(١ + \sqrt{٣}\ \text{ت})^{\frac{٥}{٢}}$.   و) $\sqrt{\frac{-٧ + \text{ت}}{١ + \text{ت}}}$.

[٧] حل كلا من المعادلات الآتية حيث $ع \in م$:

أ) $ع^{٣} = ت$.　　ب) $ع^{٣} = \sqrt{٣} + ت$.　　جـ) $ع^{٤} = -١ + \sqrt{٣}\ ت$.

د) $ع^{٣} + ٨ت = ٠$.　　هـ) $ع^{٣} - ٢٧ = ٠$.　　و) $ع^{٥} = ١$.

[٨] إذا كان $\sqrt{\dfrac{٣١ + ١٧ت}{١ - ت}} = أ + ب\ ت$ ، حيث أ ، ب $\in ح$. فأوجد أ ، ب .

[٩] أوجد قيمة س ، ص التي تحقق كلاً من المعادلات الآتية :

أ) $(س + ت\ ص)^{٢} = ٤٥ - ٢٨\ ت$.

ب) $(س + ت\ ص)^{٢}\ (ت - ٣) = ٥\ (٣\ ت - ١)$.

جـ) $(س + ت\ ص)^{٢} + \dfrac{٨\ (١ - ت)}{١ + ت} + ١٥ = ٠$.

د) $(س + ت\ ص)^{٢} = \dfrac{٣٦ - ٢\ ت}{٣ + ٢\ ت}$.

هـ) $٨ت\ (س + ت\ ص)^{٢} - (١ + ت)^{٢}(٣ - ٢ت)^{٢} = ٠$.

[١٠] لتكن $ع_{١} = ٥(جتاهـ - ت\ جاهـ)$ ، $ع_{٢} = ٦\ (جتا\ ٢\ هـ + ت\ جا٢هـ)$ ، حيث $هـ \in]٠ ، \dfrac{\pi}{٢}[$

$ظا\ هـ = \dfrac{٣}{٤}$. أوجد $ع_{١}^{٢}$ ، $ع_{١}ع_{٢}$ بالصيغتين القطبية والجبرية .

[١١] لتكن $س = \dfrac{١ + ٢\ ت}{١ - ت}$ ، $ص = \dfrac{١ - ٢\ ت}{١ + ت}$ ، أوجد قيمة $\sqrt{٥\ س + ٣\ ص}$.

١ – ٦ حل المعادلة من الدرجة الثانية

المعادلة $أ\ ع^{٢} + ب\ ع + جـ = ٠$ قابلة للحل دائماً في مجموعة الأعداد المركبة ، وباستخدام قانون حل المعادلات التربيعية نجد أن :

$$ع = \dfrac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢\ أ} \quad حيث \quad \Delta = ب^{٢} - ٤\ أ\ جـ .$$

وتعرف أن :

$$مجموع\ الجذرين = \dfrac{-ب}{أ} \quad وحاصل\ ضربهما = \dfrac{جـ}{أ} .$$

مثال (١ – ٢٨)

حل المعادلتين التاليتين :

أ) $ع^{٢} - ٢ ع + ٥ = ٠$.

ب) $ع^{٢} - (٥ + ٧ ت) ع + (-٦ + ١٧ ت) = ٠$.

الحــــل :

أ) $ع^{٢} - ٢ ع + ٥ = ٠$.

$\because$ أ $= ١$ ، ب $= -٢$ ، جـ $= ٥$.

$\Delta = ب^{٢} - ٤ أ جـ = ٤ - ٢٠ = -١٦$

$$\therefore ع = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢ أ} = \frac{٢ \pm \sqrt{-١٦}}{٢} = ١ \pm ٢ ت \ .$$

$ع_{١} = ١ + ٢ ت$ ، $ع_{٢} = ١ - ٢ ت$.

ب) $ع^{٢} - (٥ + ٧ ت) ع + (-٦ + ١٧ ت) = ٠$.

أ $= ١$ ، ب $= -(٥ + ٧ ت)$ ، جـ $= -٦ + ١٧ ت$.

$\Delta = ب^{٢} - ٤ أ جـ = (٥ + ٧ ت)^{٢} - ٤ (-٦ + ١٧ ت) = ٢ ت$.

$$\therefore ع = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢ أ} = \frac{(٥ + ٧ ت) \pm \sqrt{٢ ت}}{٢} \ .$$

ولايجاد $\sqrt{٢ ت}$

نفرض أن : $\sqrt{٢ ت} = س + ص ت$ وبتربيع الطرفين نجد أن :

$٢ ت = س^{٢} - ص^{٢} + ٢ س ص ت$.

$س^{٢} - ص^{٢} = ٠$ ....(١) ، $٢ س ص = ٢$ ....(٢)

بحل المعادلتين نجد أن $س = \pm ١$ ، $ص = \pm ١$.

وبما أن حاصل ضرب س في ص موجب

$\therefore \sqrt{٢ ت} = \pm (١ + ت)$ ، وبالتعويض في القانون العام نجد أن :

$$\therefore ع_1 = \frac{٥ + ٧ت + (١ + ت)}{٢} = \frac{٦ + ٨ت}{٢} = ٣ + ٤ت$$

$$ع_2 = \frac{٥ + ٧ت - (١ + ت)}{٢} = \frac{٤ + ٦ت}{٢} = ٢ + ٣ت \ .$$

مثال (١ − ٢٩)

حل المعادلتين التاليتين :

أ) $ع^3 - ٢٧ت = ٠$. ب) $ع^2 + ٢\,\bar{ع} + ١ = ٠$.

الحـــل :

أ) تكتب المعادلة $ع^3 - ٢٧ت = ٠$ بالصورة $ع^3 + ٢٧ت^3 = ٠$

$\Leftarrow$ $(ع + ٣ت)(ع^2 - ٣عت + ٩ت^2) = ٠$ [بالتحليل] .

امّا $ع + ٣ت = ٠$ $\Leftarrow$ $ع = -٣ت$.

أو $ع^2 - ٣عت + ٩ت^2 = ٠$ وهذه معادلة من الدرجة الثانية يمكن حلّها كما سبق في المثال السابق وينتج أن جذريها $\frac{٣\sqrt{٣} + ٣ت}{٢}$ ، $\frac{-٣\sqrt{٣} + ٣ت}{٢}$.

ب) $ع^2 + ٢\,\bar{ع} + ١ = ٠$.

بوضع $ع = س + ت ص$ $\Leftarrow$ $\bar{ع} = س - ت ص$ في المعادلة السابقة ينتج أن :

$(س + ت ص)^2 + ٢(س - ت ص) + ١ = ٠$

$س^2 + ٢ت س ص + ت^2 ص^2 + ٢س - ٢ت ص + ١ = ٠$ [تعريف تساوي عددين مركبين]

$س^2 - ص^2 + ٢س + ١ = ٠$ ....(١)

$٢س ص - ٢ص = ٠$ ....(٢)

من(٢) ينتج أن : $٢ص(س - ١) = ٠$ $\Leftarrow$ $٢ص = ٠$ أو $س - ١ = ٠$

$\Leftarrow$ $ص = ٠$ أو $س = ١$.

أولاً : عندما $ص = ٠$

من (١) ينتج أن : $س^2 - ٠ + ٢س + ١ = ٠$ $\Leftarrow$ $(س + ١)^2 = ٠$ $\Leftarrow$ $س = -١$.

$\therefore ع = س + ت ص = -١ + (٠)ت = -١$

ثانياً : عندما $س = ١$

من (١) ينتج أن : $١ - ص^2 + ٢ + ١ = ٠$ $\Leftarrow$ $٤ - ص^2 = ٠$ $\Leftarrow$ $ص = \pm ٢$

$\therefore ع = س + ت ص = ١ \pm ٢ت$ ، مجموعة الحل $= \{-١ ، ١ \pm ٢ت\}$.

مثال (١ – ٣٠)

إذا كانت $ع + \frac{١}{ع} = ٢$ جتا هـ ،

فأثبت أن : $ع^{ن} + \frac{١}{ع^{ن}} = ٢$ جتا ن هـ .

الحـــل :

$ع + \frac{١}{ع} = ٢$ جتا هـ $\Leftarrow$ $ع^٢ + ١ = ٢ع$ جتا هـ $\Leftarrow$ $ع^٢ - ٢ع$ جتاهـ $+ ١ = ٠$

$ع = \frac{٢ \text{ جتا هـ} \pm ٢\sqrt{\text{جتا}^٢ \text{هـ} - ١}}{٢}$

$ع =$ جتا هـ $\pm \sqrt{-\text{جا}^٢ \text{هـ}}$

$ع =$ جتا هـ $\pm$ ت جا هـ

بالتعويض في المعادلة التالية :

$ع^{ن} + \frac{١}{ع^{ن}} = (\text{جتاهـ} \pm \text{ت جاهـ})^{ن} + \frac{١}{(\text{جتا هـ} \pm \text{ت جا هـ})^{ن}}$.

$= (\text{جتاهـ} \pm \text{ت جاهـ})^{ن} + (\text{جتاهـ} \pm \text{ت جاهـ})^{-ن}$

$=$ جتا (ن هـ) $\pm$ ت جا (ن هـ) + جتا (–ن هـ) $\pm$ ت جا (–ن هـ)

$=$ [جتا (ن هـ) $\pm$ ت جا (ن هـ)] + [جتا (ن هـ) $\mp$ ت جا (ن هـ)]

$= ٢$ جتا (ن هـ) .

مثال (١ – ٣١)

كوّن المعادلة التي جذراها ٢ – ت ، ٣ + ٢ ت .

الحـــل :

المعادلة التي لها جذران هي معادلة من الدرجة الثانية .

مجموع الجذرين = (٢ – ت) + (٣ + ٢ ت) = ٥ + ت

حاصل ضرب الجذرين = (٢ – ت) (٣ + ٢ ت) = ٨ + ت

$\therefore$ المعادلة هي :

$ع^٢$ – (مجموع الجذرين) ع + (حاصل ضرب الجذرين) = ٠ .

$ع^٢$ – (٥ + ت) ع + (٨ + ت) = ٠ .

تمارين ومسائل (١ - ٦)

[١] حل المعادلات التالية حيث $ع \in م$:

أ) $٣ع^{٢} + ع + ٢ = ٠$.　　ب) $ع^{٢} + ٢ع + ٣ = ٠$.

جـ) $ع^{٢} - ٦ع + ٩ - ٢ت = ٠$.　　د) $ع^{٢} - ٢\sqrt{٢}\,ع + ٤ = ٠$.

هـ) $٢ع^{٢} - (٤ - ت)ع + (٥ - ت) = ٠$.

و) $ع^{٢} + ٢ت\bar{ع} - ١ = ٠$ حيث $\bar{ع}$ مرافق ع .

[٢] كوّن المعادلات التي جذراها على النحو التالي :

أ) $٥ + ٣ت$ ، $٥ - ٣ت$.

ب) $٢ت$ ، $٤ - ت$.

جـ) $(١ - ت)$ ، $(٣ - ت)$.

[٣] أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية حيث $ع \in م$:

أ) $ع^{٢} - ٣ع + (١ + ٣ت) = ٠$.

ب) $(١ - ت)ع^{٢} - (٣ - ت)ع + (٤ - ٢ت) = ٠$.

جـ) $ع^{٢} - \bar{ع} =$ صفراً حيث $\bar{ع}$ مرافق ع .

د) $ع^{٢} - (٢ - ت)ع + (٣ - ت) = ٠$.

هـ) $(٣ - ت)ع^{٢} - ١٠ع = -٣(١ + ٣ت)$.

و) $ت ع^{٢} + (١ - ٢ت)ع + ٣ت = ١$.

[٤] أوجد قيم س ، ص التي تحقق المعادلة :

$(س + ت ص)^{٢} - ١٠(س + ت ص) + ٤١ = ٠$.

[٥] أوجد مجموعة حل المعادلة : $ع^{٣} + ع^{٢} + ع + ١ = ٠$ ، حيث $ع \in م$.

٢ – ١ مبدأ العـــدّ

نتناول في هذا البند إحدى الطرق المفيدة في حساب عدد الطرق اللازمة لإجراء عملية ما بدون استخدام العد المباشر توفيراً للوقت والجهد ؛ فمثلاً : إذا كان لدى رجل جاكت صوف وآخر من القطن ، ورمزنا لهما بالرمزين ﺃ ، ب ولديه كذلك ثلاثة بنطلونات من الصوف والقطن والنايلون، ورقمنا ها على الترتيب ١ ، ٢ ، ٣ . ولنسأل ما عدد إمكانيات (طرق) اختيار جاكت ثم بنطلون كبدلة يمكن للرجل لبسهما معاً .

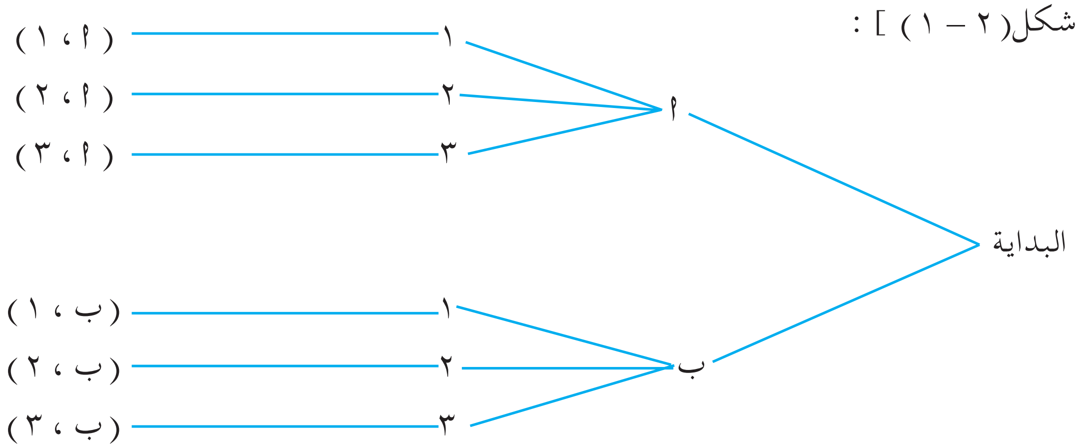
نبدأ بعملية اختيار جاكت وهي تتم بطريقتين :

اختيار الجاكت ﺃ ، أو اختيار الجاكت ب ،

ويلي ذلك عملية اختيار بنطلون ، وهي تتم بثلاث طرق :

اختيار البنطلون ١ ، أو اختيار البنطلون ٢ ، أو اختيار البنطلون ٣ .

ويمكن الحصول على نواتج العملية المركبة من العملتين السابقتين المتتاليتين كما في المخطط الشجري التالي [انظر شكل(٢ – ١)] :



شكل (٢ – ١)

نلاحظ أن طرق اختيار جاكت ثم بنطلون هي الأزواج المرتبة التالية :

(ﺃ ، ١) ، (ﺃ ، ٢) ، (ﺃ ، ٣) ، (ب ، ١) ، (ب ، ٢) ، (ب ، ٣) ، وأن عدد طرق (إمكانيات) إجراء العمليتين معاً يساوي عدد طرق العملية الأولى مضروباً في عدد طرق العملية الأخرى ويساوي ٢ × ٣ = ٦ طرق .

تدريب (٢ – ١)

لتكن سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، كم عدداً مكوناً من رقمين مختلفين يمكن تشكيله من هذه المجموعة؟ وضّح ذلك بمخطط شجري .

مما سبق نجد أنه إذا تمت عملية من خطوتين مستقلتين ، أي إذا كان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى ن طريقة وعدد طرق إجراء الخطوة الأخرى م طريقة، فإن: عدد الطرق الممكنة لإجراء العملية المركبة كاملة هو ن × م طريقة.

ويعمم أسلوب عدد الطرق في قاعدة عامة تسمّى المبدأ الأساسي للعد :

في عملية تتكون من م خطوة مستقلة ، إذا كان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى $ن_١$ ، وعدد طرق إجراء الخطوة الثانية $ن_٢$ ، وعدد طرق إجراء الخطوة الثالثة $ن_٣$ ، ... ، وعدد طرق إجراء الخطوة الأخيرة $ن_م$ ، فإن عدد الطرق الممكنة لإجراء العملية كاملة هو : $ن_١ \times ن_٢ \times ن_٣ \times ... \times ن_م$

مثال (٢ - ١)

كم عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب ٤ أشخاص في صف مستقيم ؟

الحـــل :

عدد الطرق الممكنة لترتيب الشخص الأول = ٤ طرق ،

عدد الطرق الممكنة لترتيب الشخص الثاني = ٣ طرق ،

عدد الطرق الممكنة لترتيب الشخص الثالث = طريقتان ،

عدد الطرق الممكنة لترتيب الشخص الرابع (الأخير) = طريقة واحدة .

إذن عدد الطرق الممكنة لترتيب الأشخاص الأربعة = ٤×٣×٢×١= ٢٤ طريقة .

تسمَّى الصورة ٤×٣×٢×١ مضروب العدد ٤ ، ويرمز له بالرمز $\lfloor\underline{٤}$ أو ٤! .

تعريف (٢ - ١)

مضروب عدد صحيح غير سالب ن هو :

$$\lfloor\underline{ن} = ن (ن - ١) (ن - ٢) \times ... \times ٣ \times ٢ \times ١$$

مثال (٢ - ٢)

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي :

أ) $\lfloor\underline{٥}$.　　　　ب) $\lfloor\underline{٨}$.

الحـــل :

أ) $\lfloor\underline{٥}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ .

ب) $\lfloor\underline{٨}$ = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٤٠٣٢٠ .

مثال (٢ – ٣)

يتكون مجلس إدارة إحدى المؤسسات من خمسة أشخاص ،فبكم طريقة يمكن اختيار رئيساً ونائباً وأمين سر من بين أعضاء مجلس الإدارة ؟

الحـــــل :

بما أن مجلس الإدارة يتكون من خمسة أفراد ،

إذن عدد الطرق الممكنة لاختيار الرئيس = ٥ طرق ،

وعدد الطرق الممكنة لاختيار النائب = ٤ طرق ،

وعدد الطرق الممكنة لاختيار أمين سر = ٣طرق .

وحسب مبدأ العد :

فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار الرئيس ثم النائب ثم أمين سر = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ طريقة .

مثال (٢ – ٤)

أرادت إدارة المرور عمل لوحات معدنية للسيارات تبدأ رموز كل منها من اليمين بحرف من حروف الهجاء العربية متبوع بأربعة أرقام من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٩ }،كم لوحة مختلفة يمكن صنعها في الحالتين التاليتين :

أ) مع تكرار الأرقام ؟ ب) بدون تكرار الأرقام ؟

الحـــــل :

أ) إذا كان تكرار الأرقام مسموحاً :

يمـلأ الفـراغ الأول بـ ٢٨ طريقـة مختلفة (لأن عـدد الأحـرف الهجائيـة ٢٨ حرفـاً ، ويملأ أيّ من الفراغات الأربعة الأخرى بـ (٩) طرق مختلفة .

ويكون عدد اللوحات التي يمكن صنعهـا فـي هـذه الحالة = ٢٨ × ٩×٩×٩ ×٩ = ١٨٣٧٠٨ لوحة .

ب) إذا لم يكن تكرار الأرقام مسموحاً ؛ فإنه يمكن ملء الفراغات الخمسة بطرق مختلفة على النحو التالي :

يملأ الفراغ الأول بـ ٢٨ طريقة ، ويملأ الفراغ الثاني بـ (٩) طرق ، ويملأ الفراغ الثالث بـ (٨) طرق، ويملأ الفراغ الرابع بـ (٧) طرق ، ويملأ الفراغ الخامس بـ (٦) طـرق :

يكون عدد اللوحات التي يمكن صنعها في هذه الحالة = ٢٨ × ٩ × ٨ × ٧ × ٦ = ٨٤٦٧٢ لوحة .

تمارين ومسائل (٢ – ١)

[١] حديقة لها أربعة أبواب ، ما عدد الطرق التي يمكن بواسطتها لشخص أن يدخل الحديقة من أحد الأبواب ويخرج من باب آخر ؟

[٢] أُلقي حجر نرد مرتين ، ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

[٣] رمينا قطعة نقود ثلاث مرات وحجر نرد مرة واحدة ، ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

[٤] كم عددا مكوناً من رقمين يمكن تكوينه من أرقام المجموعة { ١ ، ٢ ، ٥ ، ٦ ، ٩ } ؟ علما بأنه :

أ) يمكن تكرار الأرقام .　　　　ب) بدون تكرار الأرقام .

[٥] كم عدد التطبيقات التي يمكن تكوينها من س إلى ص إذا كانت :

س = { ٢ ، ٣ ، ٥ }　،　ص = { أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ } .

[٦] كم عدداً مؤلفاً من أربعة أرقام يمكن تشكيله من مجموعة الأرقام التالية :

١) { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } .　　　　٢) { ٠ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ } .

في كل من الحالتين التاليتين:

أ) التكرار ممكناً ؟　　　　ب) التكرار غير ممكن ؟

[٧] كم عدد طرق تكوين عدد يقبل القسمة على ٥ ، مكوّن من ثلاثة أرقام من المجموعة { ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } مع إمكانية التكرار مرة ، وعدم أمكانية التكرار مرة أخرى؟

[٨] كم عدد أرقام الهاتف السداسية التي يمكن تشكيلها إذا كانت المنزلة الأخيرة إما ٣ أو ٤ .

[٩] من المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } كم عدداً يمكن تكوينه إذا كان العدد :

أ) مكوناً من ثلاثة أرقام وأكبر من ٣٠٠ مع عدم إمكانية التكرار للأرقام ؟

ب) زوجياً ومكوناً من أربعة أرقام مع إمكانية التكرار مرة ، وعدم إمكانية التكرار مرة أخرى ؟

[١٠] يحوي أحد رفوف مكتبة ٧ كتب عربية ، ٥ كتب إنجليزية ، ٤ كتب فرنسية ، بكم طريقة يستطيع أحد الأشخاص اختيار ثلاثة كتب إحداها باللغة العربية ، والثاني بالإنجليزية ، والثالث بالفرنسية ؟

[١١] كم عدداً زوجياً يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام من المجموعة { ٠ ، ٢ ، ١ ، ٣ ، ٥ } ، بحيث يكون رقم عشراته فردياً مع إمكانية التكرار ؟

[١٢] لدينا نوعان من التلفزيونات و ثلاثة أنواع من الفيديوهات ، أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار تلفزيون وفيديو موضحاً ذلك بالمخطط الشجري .

٢ - ٢ التبــــاديــل

أولاً : تباديل ن من العناصر مأخوذة جميعاً في كل مرة :

إن إمكانات (طـرق) الحصول على عدد مكون مـن ثلاثـة أرقام مختلفـة باستخـدام عناصر المجمـوعـة س = { ٥ ، ٦ ، ٧ } يمكن معرفتها بالطريقة التالية :

عدد طرق وضع رقم الآحاد = ٣ طرق

عدد طرق وضع رقم العشرات = طريقتان

عدد طرق وضع رقم المئات = طريقة واحدة

وباستخدام المبدأ الأساسي للعد فإن :

عدد طرق الحصول على عدد مكون من ثلاثة أرقام مختلفة = ٣ × ٢ × ١ = ٦ طرق ، وهذه الأعداد المختلفة هي : ٧٦٥ ، ٦٧٥ ، ٧٥٦ ، ٥٧٦ ، ٦٥٧ ، ٥٦٧ .

والأعداد المختلفة بسبب تغير رقم كل منزلة من منازلها ، يسمّى كل منها ترتيباً ، وحصلنا عليه بتبديل الأرقام السابقة ، فكل ترتيب يعتبر (تبديلاً) .

إذن عدد تباديل الأرقام الثلاثة السابقة = ٣ × ٢ × ١ = ٦ ، أي يساوي ل٣ .

وبالمثل إذا كان عدد عناصر المجموعة س هو ٤ عناصر ، فإن عدد التباديل الممكنة للحصول على عدد مكون من هذه الأرقام الأربعة هو : ل٤ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ تبديلة .

تعريف (٢ - ٢)

عدد تباديل ن من العناصر المختلفة مأخوذة جميعاً في كل مرة هو :

لن ، ويرمز له بالرمز $^{ن}ل_{ن}$ أو ل (ن ، ن) حيث ن عدد صحيح غير سالب .

$^{ن}ل_{ن}$ = لن = ن (ن - ١) (ن - ٢) .... × ٣ × ٢ × ١ .

مثال (٢ - ٥)

بكم طريقة يمكن لخمسة طلاب الجلوس على خمسة كراسي ؟

الحـــل :

عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها الطالب الأول = ٥ طرق .

عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها الطالب الثاني = ٤ طرق .

عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها الطالب الثالث = ٣ طرق .

عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها الطالب الرابع = طريقتان .

عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها الطالب الخامس = طريقة واحدة .

إذن عدد الطرق (التباديل) = $\underline{|٥}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة .

كل طريقة من هذه الطرق التي عددها ١٢٠ تسمى تبديل لخمسة عناصر مأخوذة كلها ، ونرمز لذلك بالرمز $^{٥}ل_{٥}$.

ثانيا : تباديل ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة :

في كثير من الأحيان نحتاج إلى اختيار وترتيب عدد معين من عناصر مجموعة ما ،كأن نختار مثلاً ر عنصراً من ن عنصراً ، ثم نرتب هذه العناصر المختارة ، ولكن سؤالنا هو : بكم طريقة يمكننا عمل ذلك . وللإجابة عن ذلك نورد التالي :

إذا أردنا عمل علم مكوَّن من ثلاثة ألوان وكان لدينا خمسة ألوان هي : الأحمر ، الأخضر ، الأبيض ، الأزرق ، الأسود ، بكم طريقة يمكن تركيب ألوان العلم ؟

في هذه الحالة نبحث عن اختيار الألوان الثلاثة المكوَّنة للعلم ، وفي الوقت نفسه يهمنا ترتيب هذه الألوان . ويكون لدينا خمسة ألوان يراد اختيار ثلاثة منها . يمكن وضع لون واحد من الألوان الخمسة في الموضع الأول، وبذلك يكون لدينا ٥ خيارات وبمجرد تحديد اللون الذي سيشغل الموضع الأول تبقى أربعة ألوان ، يمكن أن يشغل واحد منها الموضع الثاني ، أي يمكن اختيار اللون الثاني بأربع خيارات ، وبالتالي يبقى ثلاثة خيارات لشغل الموضع الثالث وحسب مبدأ العد يكون :

عدد الطرق التي يمكن بها عمل العلم = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ طريقة .

كل علم من الستين علماً يسمى تبديلاً لخمسة عناصر مأخوذة ثلاثة في كل مرة (أي أجرينا تبديلاً على خمسة عناصر مأخوذة ثلاثة ثلاثة) .

ونرمز لذلك بالصورة $^{٥}ل_{٣}$ (وتُقرأ ٥ تبديل ٣)

$^{٥}ل_{٣}$ = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ .

تعريف (٢ – ٣)

$^{ن}ل_{ر}$ = ن (ن − ١) (ن − ٢) ... (ن − ر + ١) ، **حيث** ر ≤ ن ؛ ن ، ر ∈ ص$^{+}$.

فمثلاً : $^{٧}ل_{٦}$ = حاصل ضرب ٦ أعداد متتالية تبدأ بالعدد ٧ ، وكل عدد ينقص واحداً عن سابقة .

أي أن : $^{٧}ل_{٦}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢

لاحظ أن العدد الأخير = ٢ = (٧ − ٦ + ١)

ويمكن التعبير عن $^{ن}ل_{ر}$ باستخدام المضروب وذلك بضرب البسط والمقام في $\underline{|ن − ر}$ على النحو التالي :

$$^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\ldots(\text{ن}-\text{ر}+١)(\text{ن}-\text{ر})(\text{ن}-\text{ر}-١)\ldots×٣×٢×١}{(\text{ن}-\text{ر})(\text{ن}-\text{ر}-١)\ldots×٣×٢×١}$$

فيصبح التعريف (٢-٣) كما يلي :

$$^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}} \; .$$

ومنه نجد أن : $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}} = \underline{|\text{ن}}$ ، $^{\text{ن}}\text{ل}_{٠} = ١$

وبالمثل :

$$^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|٠}} = \underline{|\text{ن}} \Leftarrow \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}} = \underline{|٠} = ١$$

∴ مضروب الصفر يساوي (١) .

مثال (٢ - ٦)

أوجد قيمة كلٍّ من : $^{٦}\text{ل}_{٢}$ ، $^{٥}\text{ل}_{٥}$ ، $^{٧}\text{ل}_{٤}$.

الحـــل :

$^{٦}\text{ل}_{٢} = ٦ × ٥ = ٣٠$

أو $^{٦}\text{ل}_{٢} = \frac{\underline{|٦}}{\underline{|٦-٢}} = \frac{\underline{|٦}}{\underline{|٤}} = \frac{٦×٥×\cancel{\underline{|٤}}}{\cancel{\underline{|٤}}} = ٣٠$

$^{٥}\text{ل}_{٥} = \frac{\underline{|٥}}{\underline{|٥-٥}} = \frac{\underline{|٥}}{\underline{|٠}} = \underline{|٥} = ٥×٤×٣×٢×١ = ١٢٠$ ($\underline{|٠} = ١$)

$^{٧}\text{ل}_{٤} = \frac{\underline{|٧}}{\underline{|٣}} = \frac{٧×٦×٥×٤×\cancel{\underline{|٣}}}{\cancel{\underline{|٣}}} = ٧×٦×٥×٤ = ٨٤٠$.

مثال (٢ - ٧)

أوجد قيمة ن في كل مما يأتي :

أ) $^{\text{ن}}\text{ل}_{٢} = ٥٦$ ، ب) $^{\text{ن}+١}\text{ل}_{٣} : \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-٢}} = ٧$.

الحـــل :

أ) ∵ $^{\text{ن}}\text{ل}_{٢} = ٥٦$

∴ $\frac{\underline{ن|}}{\underline{ن-٢|}} = ٥٦$

⇐ $\frac{ن(ن-١)\cancel{\underline{ن-٢|}}}{\cancel{\underline{ن-٢|}}} = ٥٦$

⇐ $ن(ن-١) = ٥٦$ ⇐ $ن^٢ - ن - ٥٦ = ٠$

⇐ $(ن-٨)(ن+٧) = ٠$

أما $(ن-٨) = ٠$ ⇐ $ن = ٨$

أو $(ن+٧) = ٠$ ⇐ $ن = -٧$ وهذا مرفوض

∴ $ن = ٨$.

ب) ∵ ${}^{ن+١}ل_٣$: $\frac{\underline{ن|}}{\underline{ن-٢|}} = ٧$

∴ $\frac{\underline{ن+١|}}{\underline{ن+١-٣|}} \times \frac{\underline{ن-٢|}}{\underline{ن|}} = ٧$

⇐ $\frac{(ن+١)\cancel{\underline{ن|}}}{\cancel{\underline{ن-٢|}}} \times \frac{\cancel{\underline{ن-٢|}}}{\cancel{\underline{ن|}}} = ٧$

⇐ $ن + ١ = ٧$ ⇐ $ن = ٦$

مثال (٢ - ٨)

غرفة اجتماعات فيها أحد عشر مقعداً ، بكم طريقة يستطيع خمسة أشخاص الجلوس على استقامة واحدة؟

الحــــل :

إنّ طريقة الجلوس تتغير نتيجة تبديل أماكن جلوسهم . وعليه يكون عدد الطرق الممكنة للجلوس تساوي عدد تبديل أحد عشر مقعداً مأخوذ خمسة خمسة .

أي عدد الطرق الممكنة للجلوس = ${}^{١١}ل_٥ = ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ = ٥٥٤٤٠$ طريقة .

مثال (٢ - ٩)

كم عدد تباديل جلوس ٧ أشخاص في الحالتين التاليتين :

أ) في صف مستقيم .　　　　ب) حول طاولة مستديرة .

الحــــل :

أ) عدد تباديل جلوس ٧ أشخاص في صف مستقيم = ${}^{٧}ل_٧ = \underline{٧|}$.

$= ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٥٠٤٠$ تبديلة .

ب) إن عدد تباديل مجموعة ذات ن عنصراً حول طاولة مستديرة (أي شكل مغلق) هو لن − ١ .

لإنه لم يتم تثبيت نقطة البداية .

∴ عدد تباديل جلوس ٧ أشخاص حول طاولة مستديرة = ل٧ − ١ .

= ل٦ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠ تبديلة .

تدريب(٢ – ٢)

بكم طريقة يمكن أن يجلس ثلاثة طلاب وثلاث طالبات في صف مستقيم؟

مثال (٢ – ١٠)

صف به عشرون طالباً ؛ بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة طلابية مؤلفة من : رئيس ومساعده وسكرتير ومسؤول مالي ؟

الحل :

عدد الطرق = ٢٠ل٤ = ل٢٠ / ل١٦ = (٢٠ × ١٩ × ١٨ × ١٧ ل١٦) / ل١٦ = ١١٦٢٨٠ طريقة .

تمارين ومسائل (٢ – ٢)

[١] أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي :

$ل^{٧}_{٣}$ ، $ل^{١٢}_{٢}$ ، $ل^{٢٠}_{٤}$ ، $ل^{٢٥}_{٥}$.

[٢] عبرّ عن كلّ مما يأتي بالشكل $ل^{ن}_{ر}$:

أ) $١٣ \times ١٢ \times ١١$. ب) $٤ \times ٣ \times ٥ \times ٢ \times ٦ \times ١$. جـ) ٢٤ .

د) ٢١٠ . هـ) $(ن - ١)(ن - ٢)(ن - ٣)(ن - ٤)$. و) $(ن^{٣} - ن)(ن^{٢} - ٤)$.

[٣] أوجد قيمة ن في كلٍّ مما يأتي :

أ) $\underline{|ن} = ٥٠٤٠$. ب) $ل^{ن}_{ن} = ٧٢٠$.

جـ) $٧ \, \underline{|ن-٢} = ٣٥٢٨٠$. د) $ن \, ل^{٥}_{٣} = ل^{٧}_{٥}$.

هـ) $ل^{ن}_{٤} = ١٤ \, ل^{ن-٢}_{٣}$. و) $٧ \, ل^{ن}_{٥} = ل^{ن}_{٣} \times ل^{٩}_{٣}$.

ز) $ل^{٢ن}_{٢} = ٢ \, ل^{ن}_{٢} + ٥٠$.

[٤] أثبت صحة الآتي :

أ) $\dfrac{\underline{|ن+٢}}{\underline{|ن}} = ن^{٢} + ٣ن + ٢$. ب) $\dfrac{ل^{ن}_{ر}}{ل^{ن-١}_{ر-١}} = ن$.

جـ) $ل^{ن}_{ر} = ل^{ن-١}_{ر} + ر \, ل^{ن-١}_{ر-١}$.

[٥] إذا كان $\underline{|ن} = ٢٤$ ، فأوجد $ل^{٢ن}_{٣}$.

[٦] أوجد $\underline{|ر+١}$ حيث $ل^{٨}_{ر} = ٦٧٢٠$.

[٧] لتكن $\underline{|ن+١} : \underline{|ن-١} = ٧٢$ ، أوجد $ل^{ن}_{٠} + ل^{ن}_{٥} + ل^{ن}_{٢}$.

[٨] إذا كان $ل^{ن}_{ر} = ٦٠٤٨٠$ ، $\underline{|ر} = ٧٢٠$ ، فأوجد قيمة $ل^{ن+١}_{ر-١}$.

[٩] لتكن $ل^{٢ن+١}_{٤} : ل^{٢ن-١}_{٣} = ٧٢ : ٥$ ، فأوجد $\underline{|ن}$.

[١٠] إذا كان :

$ل^{س+ص}_{٤} = ٣٦٠$ ، $\underline{|٢س+ص} = ٥٠٤٠$ ، فأوجد $ل^{ص}_{س}$.

[١١] إذا كان :

$${}^{س+ص}ل_{٣} = ٥٠٤ \quad ، \quad {}^{س-ص}ل_{٤} = ١٢٠ \quad ، \quad \text{فأوجد} \quad {}^{س}ل_{ص} \quad .$$

[١٢] ليكن $\;{}^{٦}ل_{ر} = {}^{٦}ل_{ر+١}\;$ ، فأوجد :

$$\frac{(ر+١)!}{(ر+٢)!} + \frac{ر!}{(ر+١)!} + \frac{(ر-٢)!}{(ر-١)!} \quad .$$

[١٣] إذا كان لدينا أربعة كتب، وعلى رف مكتبة يتوفر مكانان شاغران فقط، بكم طريقة يمكن ملء المكانين الشاغرين؟

[١٤] بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين من حروف المجموعة $\;س = \{ ا ، ب ، جـ ، ى ، هـ \}\;$.

[١٥] من بين ثلاثون طالباً ، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة طلابية مؤلفة من : رئيس ومساعد وسكرتير وأمين صندوق ؟

[١٦] كم عدد التطبيقات المتباينة التي يمكن تكوينها من المجموعة $\;س = \{ ١ ، ٢ ، ٣ \}\;$ ، إلى المجموعة $\;ص = \{ ا ، ب ، جـ ، ى ، هـ \}\;$ ؟

[١٧] بكم طريقة يمكن تنظيم جلوس ٨ أشخاص في الحالتين التاليتين :

أ) في صف مستقيم ؟   ب) على طاولة مستديرة ؟

[١٨] بكم طريقة يمكن تلوين علم يتكون من أربعة ألوان إذا كان لدينا تسعة ألوان ؟

[١٩] بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة طلاب وأربعة مدرسين على ٨ كراسي في صف واحد، بحيث يجلس كل طالب ومدرس بالتناوب ؟

٢ - ٣ التوافيق

تدريب (٢ - ٣)

أوجد المجموعات الجزئية الثنائية (المكونة من عنصرين) للمجموعة $\;س = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ \}\;$.

لا شك أنك قد تمكنت من أن تجد ست مجموعات جزئية وهي :

$\{ ١ ، ٢ \}$ ، $\{ ١ ، ٣ \}$ ، $\{ ١ ، ٤ \}$ ، $\{ ٢ ، ٣ \}$ ، $\{ ٢ ، ٤ \}$ ، $\{ ٣ ، ٤ \}$. كل من هذه المجموعات الجزئية يسمّى توفيقاً أو اختياراً ذا عنصرين من مجموعة رباعية .

كذلك يمكن من هذه المجموعة نفسها أن نستخرج مجموعات جزئية ثلاثية (كل منها مكون من ثلاثة عناصر) عدد هذه المجموعات الجزئية أربع مجموعات وهي :

$\{ ١ ، ٢ ، ٣ \}$ ، $\{ ١ ، ٢ ، ٤ \}$ ، $\{ ١ ، ٣ ، ٤ \}$ ، $\{ ٢ ، ٣ ، ٤ \}$.

كل من هذه المجموعات الجزئية ، يسمّى توفيقاً أو اختياراً ثلاثي العناصر من مجموعة رباعية .

وبصفة عامة إذا كان لدينا مجموعة $س$ عدد عناصرها $ن$ عنصراً فإن كل مجموعة جزئية ذات $ر$ عنصراً يسمّى توفيقاً أو اختياراً ذا $ر$ عنصراً من $ن$ عنصراً حيث ($ر \leq ن$) .

تعريف (٢ – ٤)

توفيق $ر$ عنصراً من مجموعة $س$ عدد عناصرها $ن$ ، ($ن \geq ر$) هو عدد المجموعات الجزئية من $س$ التي تتألف من $ر$ عنصراً ، ونرمز لعدد هذه التوافيق (الاختيارات) بالرمز : $^{ن}ق_{ر}$ ، وتُقرأ (نون توافيق راء) ؛ أو بالرمز $\binom{ن}{ر}$ ، وتُقرأ ($ن$ إختيار $ر$) .

والفرق بين التباديل والتوافيق هو أننا في التباديل نهتم بالترتيب لأننا لو أخذنا تباديل $\{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤\}$ مأخوذة اثنين اثنين سنجدها إثنا عشر زوجاً مرتباً : (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) . ومن الملاحظ أن (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) يعتبران تبديلين مختلفين ولكنهما يمثلان توفيقاً واحداً .

وفي المسائل العملية نحتاج أحياناً إلى إيجاد التباديل إذا كان الترتيب مهماً ، وأحياناً نحتاج إلى إيجاد التوافيق إذا كان الترتيب لايهمنا ، وذلك حسب واقع الحالة التي نعالجها .

ولإيجاد عدد توافيق $ن$ من العناصر مأخوذة $ر$ في كل مرة ، نوضح ذلك كالتالي :

من المجموعة $س = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤\}$ حصلنا على ١٢ تبديلاً ،أخذت اثنين اثنين يقابلها ستة توافيق (كل تبديلين يحصل منها على توفيق واحد) أي أن عدد التوافيق يمكن أن يستنتج من عدد التباديل بالقسمة على $\underline{|٢}$

(أي $\frac{\text{١٢ تبديلاً}}{٢} = ٦$ توفيقاً ، والعدد ٢ هو في الحقيقية $^{٢}ل_{٢} = \underline{|٢} = ٢ \times ١ = ٢$) .

وبالمثل حصلنا على أربعة توافيق مأخوذة ثلاثة ثلاثة يقابلها ٢٤ تبديلة ($^{٤}ل_{٣}$) .

أي أن كل ست تبديلات يقابلها توفيق واحد $\frac{\text{٢٤ تبديلاً}}{٦} = ٤$ توفيقاً ، والعدد ٦ ما هو في الحقيقة إلاّ تباديل ثلاثة عناصر فيما بينها أي هو $^{٣}ل_{٣} = \underline{|٣} = ٣ \times ٢ \times ١ = ٦$.

وبصفة عامة كل توفيق (اختيار) من $ر$ عنصراً يقابلة تبديلة عددها ($\underline{|ر}$) .

لأن أي توفيقة منها يمكن أن تترتب عناصرها فيما بينها بطرق عددها $\underline{|ر}$.

$$\therefore \; ^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} \; .$$

وهذه هي العلاقة بين عدد التباديل وعدد التوافيق .

وبما أن : $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{ن\,!}{(ن-ر)\,!}$

$$\therefore\quad ^{ن}ق_{ر} = \dfrac{ن\,!}{ر\,! \times (ن-ر)\,!}\ .$$

مثال (٢ – ١١)

احسب قيمة الآتي :

$^{15}ق_{4}$ ، $^{10}ق_{3}$ ، $^{12}ق_{12}$ ، $^{60}ق_{20}$.

الحـــل :

$$^{15}ق_{4} = \frac{15\,!}{4\,! \times 11\,!} = \frac{15 \times \overset{7}{\cancel{14}} \times 13 \times \cancel{12} \times \cancel{11\,!}}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1 \times \cancel{11\,!}} = 1365\ .$$

$$^{10}ق_{3} = \frac{10\,!}{3\,! \times 7\,!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7\,!}{3 \times 2 \times 1 \times 7\,!} = 120\ .$$

$$^{12}ق_{12} = \frac{12\,!}{12\,! \times 0\,!} = \frac{12\,!}{12\,!} = 1\ .$$

$$^{60}ق_{20} = \frac{60\,!}{20\,! \times 40\,!} = \frac{60 \times 59 \times 58 \times \ldots \times 42 \times 41 \times 40\,!}{20 \times 19 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 \times 40\,!} = 4.191844 \times 10^{15}\ .$$

نلاحظ في المثال السابق أنه عندما كانت الأعداد صغيرة أمكننا إيجاد القيم بالحساب المباشر ، ولكن في حالة الأعداد الكبيرة فإن استخدام الآلة الحاسبة يوفر الوقت والجهد .

مثال (٢ – ١٢)

بكم طريقة يمكن اختيار خمس طالبات من بين عشر طالبات متميزات لتمثيل المدرسة في مسابقة علمية؟

الحـــل :

سنختار مجموعة تتكون من خمسة عناصر وهي مجموعة جزئية من مجموعة تتكون من عشرة عناصر مختلفة، وعليه يكون عدد طرق الاختيار يساوي عدد توافيق عشرة عناصر مأخوذة خمسة في كل مرة .أي أن :

$$^{10}ق_{5} = \frac{10\,!}{5\,! \times 5\,!} = \frac{\cancel{10} \times 9 \times \overset{2}{\cancel{8}} \times 7 \times \overset{2}{\cancel{6}} \times \cancel{5\,!}}{\cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1 \times \cancel{5\,!}} = 252 \text{ طريقة}\ .$$

مثال (٢ - ١٣)

من بين ٧ مدرسين و ١٢ طالباً يراد اختيار لجنة تمثل جماعة الرياضيات في مدرسة ما تتألف من ٥ مدرسين، ٦ طلاب . فبكم طريقة يمكن اختيار المدرسين والطلاب؟

الحــــل :

لتشكيل اللجنة نقوم بعمليتين هما :

الأولى : اختيار ٥ مدرسين من ٧ مدرســين وبمـا أن الترتيــب غير مهــم في الاختـيار فإن :

عدد طـرق اختيارهم $= {}^{7}\text{ق}_{5} = \dfrac{\underline{\text{ل}\,7}}{\underline{\text{ل}\,2}\times\underline{\text{ل}\,5}} = \dfrac{7\times6\ \cancel{\underline{\text{ل}\,5}}}{2\times1\ \cancel{\underline{\text{ل}\,5}}} = 21$ طريقة .

الأخرى : اختيار ٦ طلاب من بين ١٢ طالباً وأيضاً ليس للترتيب أهمية فيكون :

عدد طرق اختيارهم $= {}^{12}\text{ق}_{6} = \dfrac{\underline{\text{ل}\,12}}{\underline{\text{ل}\,6}\times\underline{\text{ل}\,6}} = \dfrac{12\times11\times10\times9\times8\times7\ \cancel{\underline{\text{ل}\,6}}}{6\times5\times4\times3\times2\times1\ \cancel{\underline{\text{ل}\,6}}} = 924$ طريقة .

ووفق مبدأ العد يكون عدد طرق اختيار المدرسين والطلاب $= {}^{7}\text{ق}_{5} \cdot {}^{12}\text{ق}_{6} = 21\times924 = 19404$ طريقة .

مثال (٢ - ١٤)

بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكونة من ثلاثة مدراء على الأقل من بين خمسة مدراء ؟

الحــــل :

اختيار ثلاثة مدراء على الأقل يعني أننا يمكن أن نختار ثلاثة مدراء أو أربعة أو خمسة (دون ترتيب) .

عدد الطرق الممكنة لاختيار ثلاثة مدراء $= {}^{5}\text{ق}_{3} = \dfrac{\underline{\text{ل}\,5}}{\underline{\text{ل}\,3}\times\underline{\text{ل}\,2}} = \dfrac{5\times4\ \underline{\text{ل}\,3}}{2\times1\ \underline{\text{ل}\,3}} = 10$ طرق .

عدد الطرق الممكنة لاختيار أربعة مدراء $= {}^{5}\text{ق}_{4} = \dfrac{\underline{\text{ل}\,5}}{\underline{\text{ل}\,4}\times\underline{\text{ل}\,1}} = \dfrac{5\ \underline{\text{ل}\,4}}{\underline{\text{ل}\,4}} = 5$ طرق .

عدد الطرق الممكنة لاختيار خمسة مدراء $= {}^{5}\text{ق}_{5} = \dfrac{\underline{\text{ل}\,5}}{\underline{\text{ل}\,5}\times\underline{\text{ل}\,0}} = 1$ طريقة واحدة .

وحيث أن الاختيار هو ٣ مدراء ، أو ٤ مدراء ، أو ٥ مدراء ، فإن :

عدد الطرق الممكنة $= {}^{5}\text{ق}_{3} + {}^{5}\text{ق}_{4} + {}^{5}\text{ق}_{5} = 10 + 5 + 1 = 16$ طريقة .

نتيجة (١) :

$$\boxed{{}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر} \quad .}$$

البرهان :

$\because$ الطرف الأيمن $= {}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = \dfrac{ن!}{ر! \times (ن-ر)!} + \dfrac{ن!}{(ر-١)! \times (ن-ر+١)!}$

$$= \frac{ن!}{ر\,(ر-١)! \times (ن-ر)!} + \frac{ن!}{(ر-١)!\,(ن+١-ر) \times (ن-ر)!}$$

$$= \frac{(ن+١-ر)\,ن! + ر\,ن!}{ر\,(ن+١-ر)\,(ر-١)! \times (ن-ر)!} = \frac{ن!\,(ن+١-\cancel{ر}+\cancel{ر})}{ر\,(ن+١-ر)\,(ر-١)! \times (ن-ر)!}$$

$$= \frac{(ن+١)\,ن!}{ر\,(ن+١-ر)\,(ر-١)! \times (ن-ر)!} = \frac{(ن+١)!}{ر! \times (ن+١-ر)!}$$

$= {}^{ن+١}ق_{ر} =$ الطرف الأيسر .

$$\therefore \; {}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر} \quad .$$

وتسمى هذه العلاقة « علاقة الكرخي » .

خواص التوافيق :

١- ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$.

٢- إذا كان ${}^{ن}ق_{ر_١} = {}^{ن}ق_{ر_٢}$ ؛ فإمّا $ر_١ = ر_٢$ ، أو $ر_١ + ر_٢ = ن$.

تدريب (٢ - ٤)

تحقق من صحة الخاصيتين أعلاه .

مثال (٢ – ١٥)

إذا كان $\ {}^{٢٥}ق_{٢ر} = {}^{٢٥}ق_{٣ر-٥}$ فأوجد قيمة ر .

الحـــل :

$\because \ {}^{٢٥}ق_{٢ر} = {}^{٢٥}ق_{٣ر-٥}$.

إمّا أن تكون : $٢ر = ٣ر - ٥ \Leftarrow ر = ٥$.

أو أن تكون : $٢ر + ٣ر - ٥ = ٢٥ \Leftarrow ٥ر = ٣٠ \Leftarrow ر = ٦$.

تدريب (٢ – ٥)

تحقق من حل مثال (٢ – ١٦) .

ملاحظة :

عدد طرق تقسيم ن من العناصر المتماثلة إلى مجموعتين جزئيتين تتضمن الأولى $ن_١$ عنصراً ، وتتضمن الثانية $ن_٢$ عنصراً هو :

$$ {}^{ن}ق_{(ن_١ ، ن_٢)} = \binom{ن}{ن_١ ، ن_٢} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن_١} \times \underline{|ن_٢}} .$$

بصـــورة عامة : إذا كان لدينا ن من العناصر المتماثلة ؛ وأردنا تقسيمها إلى م من المجموعات الجزئية المنفصلة ، بحيث تتضمن المجموعة الأولى $ن_١$ عنصراً متماثلاً ، وتتضمن المجموعة الثانية $ن_٢$ عنصراً متماثلاً ، . . . ، وتتضمن المجموعة الأخيرة $ن_م$ عنصراً متماثلاً فإن عدد طرق هذا التقسيم هي :

$$ \binom{ن}{ن_١ ، ن_٢ ، \ldots ، ن_م} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن_١} \times \underline{|ن_٢} \times \ldots \times \underline{|ن_م}} .$$

مثال (٢ – ١٦)

بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة (**لا إله إلا اللّه**) ؟

الحـــل : عدد حروف كلمة (لا إله إلا اللّه) = ١٢ (حرفاً) .

عدد تكرار حرف اللام = ٥ (حروف) .

عدد تكرار حرف الألف = ٥ (حروف) .

عدد تكرار حرف الهاء = ٢ (حرفين) .

$$\therefore \text{عدد الطرق} = \binom{١٢}{٥ ، ٥ ، ٢} = \frac{\text{ل}١٢}{\text{ل}٥ \times \text{ل}٥ \times \text{ل}٢}$$

$$= \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦\ \text{ل}٥}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ \times ٢ \times ١\ \text{ل}٥} = ١٦٦٣٢ \text{ طريقة .}$$

تدريب (٢ – ٦)

بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة « باب اليمن » ؟

مثال (٢ – ١٧)

بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع ١٥ كتاباً مختلفاً على ٤ طالبات . بحيث تأخذ الطالبة الأولى ٤ كتب، والطالبة الثانية ٦ كتب ، والثالثة كتابين ، والرابعة ٣ كتب .

الحـــل :

حيث أن الكتب جميعها سيتم توزيعها على الطالبات الأربع ، فإن العملية هي تجزئة مجموعة مؤلفة من ١٥ عنصراً إلى ٤ مجموعات جزئية منفصلة ، أعداد عناصرها ٤ ، ٦ ، ٢ ، ٣ على الترتيب ، وعليه فإن :

$$\text{عدد الطرق الممكنة لتوزيع الكتب على الطالبات الأربع} = \binom{١٥}{٤ ، ٦ ، ٢ ، ٣}$$

$$= \frac{\text{ل}١٥}{\text{ل}٤ \times \text{ل}٦ \times \text{ل}٢ \times \text{ل}٣} = \frac{١٥ \times ١٤ \times \ldots \times ٧\ \cancel{\text{ل}٦}}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ \times \ \times ٢ \times ١ \times ٣ \times ٢ \times ١\ \cancel{\text{ل}٦}} = ٦٣٠٦٣٠٠ \text{ طريقة .}$$

تدريب (٢ – ٧)

أثبت أن : $٢\ {}^{٨}\text{ق}_{٤} = ٣٥\ {}^{٤}\text{ق}_{٣}$.

مثال (٢ – ١٨)

أثبت أن : $\dfrac{{}^{ن}\text{ق}_{ر}}{{}^{ن}\text{ق}_{ر-١}} = \dfrac{ن - ر + ١}{ر}$.

الحـــل :

$$\because {}^{ن}\text{ق}_{ر} = \frac{\text{ل}ن}{\text{ل}ر \times \text{ل}(ن - ر)} \quad ، \quad {}^{ن}\text{ق}_{ر-١} = \frac{\text{ل}ن}{\text{ل}(ر - ١) \times \text{ل}(ن + ١ - ر)}$$

الطرف الأيمن $= \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = \dfrac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر})!} \times \dfrac{(\text{ر}-١)!\,(\text{ن}+١-\text{ر})!}{\text{ن}!}$

$= \dfrac{\cancel{(\text{ر}-١)!}\,(\text{ن}+١-\text{ر})\,\cancel{(\text{ن}-\text{ر})!}}{\text{ر}\,\cancel{(\text{ر}-١)!}\,\cancel{(\text{ن}-\text{ر})!}} = \dfrac{\text{ن}+١-\text{ر}}{\text{ر}} =$ الطرف الأيسر .

مثال (٢ - ١٩)

مجموعة مكوَّنة من ٧ طلاب ، و ٤ طالبات ، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكوَّنة من ٥ أشخاص في الحالات التالية :

أ) بدون أي شرط .

ب) تتكون اللجنة من طالب رئيساً وعضوين وعضوتين .

جـ) تتكون اللجنة من ثلاثة طلاب على الأقل .

الحـــل :

أ) عدد الطرق $= {}^{١١}\text{ق}_{٥} = \dfrac{١١!}{٥! \times ٦!} = \dfrac{١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times \cancel{٦!}}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ \times \cancel{٦!}} = ٤٦٢$ طريقة .

ب) عدد الطرق $= {}^{٧}\text{ق}_{١} \times {}^{٦}\text{ق}_{٢} \times {}^{٤}\text{ق}_{٢} = \dfrac{٧!}{٦!} \times \dfrac{٦!}{٢! \times ٤!} \times \dfrac{٤!}{٢! \times ٢!} = ٦٣٠$ طريقة.

جـ) عدد الطرق $= {}^{٧}\text{ق}_{٣} \times {}^{٤}\text{ق}_{٢} + {}^{٧}\text{ق}_{٤} \times {}^{٤}\text{ق}_{١} + {}^{٧}\text{ق}_{٥} \times {}^{٤}\text{ق}_{٠}$.

$= \dfrac{٧!}{٣! \times ٤!} \times \dfrac{٤!}{٢! \times ٢!} + \dfrac{٧!}{٤! \times ٣!} \times \dfrac{٤!}{١! \times ٣!} + \dfrac{٧!}{٥! \times ٢!} \times \dfrac{٤!}{٤! \times ٠!}$

$= ٢١٠ + ١٤٠ + ٢١ = ٣٧١$ طريقة .

مثال (٢ - ٢٠)

من بين خمس عشرة طالبة ، أريد تكوين لجنه مكوَّنة من خمس طالبات، فبكم طريقة يمكن تشكيل هذه اللجنة في الحالتين التاليتين:

أ) بدون أي شرط .

ب) بشرط أن تتكون اللجنة من رئيساً ونائب ومقرر وأمين سر وعضو .

الحـــل :

أ) عدد الطرق $= {}^{١٥}\text{ق}_{٥} = \dfrac{١٥!}{٥! \times ١٠!} = \dfrac{١٥ \times ١٤ \times ١٣ \times ١٢ \times ١١ \times ١٠!}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ \times ١٠!} = ٣٠٠٣$ طريقة .

ب) عدد الطرق = $\text{ل}^{١٥}_{٥} = \frac{\text{ل}١٥}{\text{ل}١٠} = \frac{١٥ \times ١٤ \times ١٣ \times ١٢ \times ١١ \times \cancel{\text{ل}١٠}}{\cancel{\text{ل}١٠}}$ = ٣٦٠٣٦٠ طريقة .

لاحظ في هذا المثال أنه عندما كانت اللجنة بدون أي شرط فليس للترتيب أهمية ، ولكن عندما كانت اللجنة مشروطة وذات مهام مختلفة فإن للترتيب أهمية .

تمارين ومسائل (٢ - ٣)

[١] احسب قيمة الآتي :

$\text{ق}^{٨}_{٥}$ ، $\text{ق}^{٤٥}_{٤٥}$ ، $\text{ق}^{١٣}_{٦}$ ، $\text{ق}^{١٠٠}_{٩٨}$ ، $\text{ق}^{٢٠}_{٤}$.

[٢] أوجد قيم ر التي تحقق المعادلات التالية :

أ) $\text{ق}^{٢٨}_{ر+٤} = \text{ق}^{٢٨}_{ر-٢}$. ب) $\text{ق}^{٢٠}_{٢ر} = \text{ق}^{٢٠}_{ر+٢}$.

جـ) ${}^{ن}\text{ل}_{ر} = ١٢٠\ {}^{ن}\text{ق}_{ن-ر}$.

[٣] أوجد قيم ن التي تحقق ما يأتي :

أ) ${}^{ن}\text{ق}_{٢} = ٤٣٥$. ب) $٥\ {}^{ن}\text{ق}_{٦} = ١٢\ {}^{ن}\text{ق}_{٤}$. جـ) $٢\ {}^{ن}\text{ق}_{٤} = ٣٥\ {}^{\frac{ن}{٢}}\text{ق}_{٣}$.

[٤] من بين خمسة عشر عضواً ، يراد اختيار لجنة فرعية مكونة من خمسة أشخاص ، بكم طريقة يتم ذلك ؟

[٥] بكم طريقة يمكن اختيار ٥ أسئلة للإجابة عنها في امتحان لمادة الرياضيات اشتمل على ٦ أسئلة ؟

[٦] إذا كان لدينا أربعة أنواع من الأقمشة، وتم أختيار نوعين من القماش، فما هي عدد الحالات الممكنة للإختيار؟

[٧] بكم طريقة يمكن اختيار ٤ كتب على الأقل من بين ٨ كتب ؟

[٨] بكم طريقة يمكن اختيار ٣ كتب على الأكثر من بين ٨ كتب ؟

[٩] يُراد ترتيب تسع سيارات : اثنتين منها لونها أحمر ، وثلاث لونها أبيض والباقي لكل واحدة لون مختلف عن الأحمر والأبيض ، فبكم طريقة يمكن ترتيبها ؟

[١٠] كم عدد طرق اختيار خمسة أسئلة للإجابة عنها في امتحان ما يشتمل على ستة أسئلة، إذا عُلم أن السؤال الأول إجباري ؟

[١١] بكم طريقة يمكن انتخاب لجنتين تتكون كل منهما من أربعة أشخاص من بين عشرة أشخاص ،بشرط ألاّ يتكرر إختيار الشخص الواحد في كلتي اللجنتين معاً ؟

[١٢] بكم طريقة يمكن تكوين لجنة في مصنع من سبعة أعضاء يتم اختيارهم من بين تسع إناث ، وخمسة ذكور بحيث يكون في الفريق ثلاثة ذكور فقط ؟

[١٣] يراد تقسيم ١٥ طالباً إلى ثلاث مجموعات متماثلة مكوَّنة من ٨ ، ٤ ، ٣ طلاب، بكم طريقة يتم ذلك؟

[١٤] بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة بها ثمانية أعضاء من بين ثمان مدرسات وخمس عشرة طالبة بحيث تتكون اللجنة من خمس طالبات وثلاث مدرسات ؟

[١٥] أراد مدرس التربية الرياضية تقسيم طلبة الصف وعددهم عشرون طالباً إلى ثلاث فرق رياضيـة : فريق كرة السلة وعددهم خمسة لاعبين ، وفريق كرة القدم وعددهم أحد عشر لاعباً ، وفريق الجمباز وعددهم أربعة لاعبين فبكم طريقة يمكن إجراء ذلك ؟

[١٦] من بين عشرة مدرسين ، وعشرين طالباً نريد اختيار مدرسين اثنين ، وثلاثة طلاب لتمثيل المدرسة في إحدى المهرجانات . فبكم طريقة يمكننا ذلك ؟

[١٧] كم عدد الطرق التي يمكن بها إختيار عشرة عمال للعمل في أحد المصانع من بين اثني عشر متقدماً للعمل في هذا المصنع في الحالات التالية :

أ) بدون أي شرط .

ب) بشرط إختيار شخص معين من المتقدمين .

جـ) بشرط استبعاد شخص معين من المتقدمين .

[١٨] أثبت صحة العلاقات التالية :

أ) $ {}^{ن}\text{ق}_{ر} + ٢ \, {}^{ن}\text{ق}_{ر-١} + {}^{ن}\text{ق}_{ر-٢} = {}^{ن+٢}\text{ق}_{ر} $.

ب) $ {}^{ن}\text{ق}_{ر+١} + ٢ \, {}^{ن}\text{ق}_{ر} + {}^{ن}\text{ق}_{ر-١} = {}^{ن+٢}\text{ق}_{ر+١} $.

٢ – ٤ مبرهنة ذات الحدين

يتكون المقدار الجبري (أ + ب) من حدين هما : أ ، ب ؛ وبإمكاننا أن نرفع هذا المقدار إلى قوة صحيحة موجبة ، ثم نستخدم خاصية التوزيع والضرب المتكرر نحصل على مفكوك لهذا المقدار ، **فمثلاً** :

$(أ + ب) = (أ + ب)$

$(أ + ب)^{٢} = (أ + ب)(أ + ب) = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$.

$(أ + ب)^{٣} = (أ + ب)(أ + ب)^{٢} = أ^{٣} + ٣أ^{٢}ب + ٣أب^{٢} + ب^{٣}$.

$(أ + ب)^{٤} = (أ + ب)(أ + ب)^{٣} = أ^{٤} + ٤أ^{٣}ب + ٦أ^{٢}ب^{٢} + ٤أب^{٣} + ب^{٤}$.

وكذلك يمكن فك المقادير $(أ + ب)^{٥}$ ، $(أ + ب)^{٦}$ ، ... الخ .

ولكن هل يوجد قانون عام لفك مثل هذه المقادير . هذا ما توضحه المبرهنة الآتية :

مبرهنة ذات الحدين (٢ – ١)

إذا كانت ن عدداً صحيحاً موجباً فإن :

$$(أ + ب)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠}\ أ^{ن}ب^{٠} + {}^{ن}ق_{١}\ أ^{ن-١}ب + {}^{ن}ق_{٢}\ أ^{ن-٢}ب^{٢} + \dots + {}^{ن}ق_{ر}\ أ^{ن-ر}ب^{ر} + \dots + {}^{ن}ق_{ن}\ أ^{٠}ب^{ن}$$

$$= \sum_{ر=٠}^{ن} {}^{ن}ق_{ر}\ أ^{ن-ر}ب^{ر} .$$

يمكن استنتاج من مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ ما يأتي:

١) أول حد في المفكوك يساوي ${}^{ن}ق_{٠}\ أ^{ن}ب^{٠} = أ^{ن}$ ، ثم يتناقص أس (أ) بمقدار (١) من حد إلى الحد الذي يليه .

٢) الحد الثاني هو ${}^{ن}ق_{١}\ أ^{ن-١}ب^{١}$ ثم يتزايد أس (ب) بمقدار (١) من حد إلى الحد الذي يليه ، أي أن أس (أ) يتناقص وأس (ب) يتزايد .

٣) الحد الأخير هو $أ^{٠}ب^{ن} = ب^{ن}$.

٤) عدد حدود المفكوك يساوى (ن + ١) حداً .

٥) مجموع أسي أ ، ب في كل حد يساوي ن .

٦) معامـلات الحدود المتناظرة متساوية، بمعنى أن معامل الحد الأول يساوي معامل الحد الأخير ومعامل الحد الثاني يساوي معامل الحد قبل الأخير ... وهكذا .

مثال (٢ − ٢١)

أوجد مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{٦}$.

الحل :

$$(\text{س}+\text{ص})^{٦} = \text{ق}_{٠}^{٦}\,\text{س}^{٦} + \text{ق}_{١}^{٦}\,\text{س}^{٥}\,\text{ص} + \text{ق}_{٢}^{٦}\,\text{س}^{٤}\,\text{ص}^{٢} + \text{ق}_{٣}^{٦}\,\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٣} + \text{ق}_{٤}^{٦}\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٤} + \text{ق}_{٥}^{٦}\,\text{س}\,\text{ص}^{٥} + \text{ق}_{٦}^{٦}\,\text{ص}^{٦}$$

$$(\text{س}+\text{ص})^{٦} = \text{س}^{٦} + ٦\,\text{س}^{٥}\,\text{ص} + \frac{٦!}{٢!\;٤!}\,\text{س}^{٤}\,\text{ص}^{٢} + \frac{٦!}{٣!\;٣!}\,\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٣} + \frac{٦!}{٤!\;٢!}\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٤} + \frac{٦!}{٥!\;١!}\,\text{س}\,\text{ص}^{٥} + \text{ص}^{٦} .$$

$$= \text{س}^{٦} + ٦\,\text{س}^{٥}\,\text{ص} + ١٥\,\text{س}^{٤}\,\text{ص}^{٢} + ٢٠\,\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٣} + ١٥\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٤} + ٦\,\text{س}\,\text{ص}^{٥} + \text{ص}^{٦}$$

مثال (٢ − ٢٢)

أوجد مفكوك $(٢\,\text{س} - ٣\text{ص})^{٥}$.

الحل :

نلاحظ أن : $\text{أ} = ٢\,\text{س}$ ، $\text{ب} = -٣\,\text{ص}$ ؛ فيكون المفكوك كما يأتي :

$$(٢\,\text{س} - ٣\,\text{ص})^{٥} = \sum_{\text{ر}=٠}^{٥} \text{ق}_{\text{ر}}^{٥}\,(٢\,\text{س})^{٥-\text{ر}}\,(-٣\,\text{ص})^{\text{ر}}$$

$$= \text{ق}_{٠}^{٥}\,(٢\,\text{س})^{٥} + \text{ق}_{١}^{٥}\,(٢\,\text{س})^{٤}(-٣\text{ص}) + \text{ق}_{٢}^{٥}\,(٢\,\text{س})^{٣}(-٣\text{ص})^{٢} + \text{ق}_{٣}^{٥}\,(٢\,\text{س})^{٢}(-٣\,\text{ص})^{٣} + \text{ق}_{٤}^{٥}\,(٢\,\text{س})(-٣\,\text{ص})^{٤} + \text{ق}_{٥}^{٥}\,(-٣\,\text{ص})^{٥}$$

$$= ٣٢\,\text{س}^{٥} - ٢٤٠\,\text{س}^{٤}\,\text{ص} + ٧٢٠\,\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٢} - ١٠٨٠\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٣} + ٨١٠\,\text{س}\,\text{ص}^{٤} - ٢٤٣\,\text{ص}^{٥} .$$

في هذا المثال نرى أنّ إشارتي الموجب والسالب تتناوب ابتداءً من الحد الأول وذلك لأن أس الحد $(-٣\,\text{ص})$ يتناوب زوجياً وفردياً ابتداءً من الصفر .

تدريب (٢ − ٨)

أوجد مفكوك كلاً من $(١ + \text{س})^{\text{ن}}$ ، $(١ - \text{س})^{\text{ن}}$.

الحد العام في مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$:

الحد العام في مفكوك $(\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}}$ هو الحد الذي ترتيبه $(\text{ر} + ١)$ (لأننا نبدأ بوضع $\text{ر} = ٠$) ، أي أن الحد العام هو : $\text{ح}_{\text{ر}+١}$.

حيث $\text{ر} + ١ \leq \text{ن}$ ، وهو معطى بالقاعدة :

$$\boxed{\text{ح}_{\text{ر}+١} = \text{ق}_{\text{ر}}^{\text{ن}}\;\text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}}\;\text{ب}^{\text{ر}}}$$

مثال (٢ – ٢٣)

اكتب الحد السابع في مفكوك $(٢ س - ص)^{٩}$.

الحـــل : باستخدام الحد العام $ح_{ر+١} = ق^{ن}_{ر} أ^{ن-ر} ب^{ر}$ يكون :

$$ح_{٧} = ح_{٦+١} = ق^{٩}_{٦} (٢ س)^{٣} (-ص)^{٦} = \frac{\underline{|٩}}{\underline{|٦} \times \underline{|٣}} (٨ س^{٣}) (ص)^{٦} = \frac{٩ \times ٨ \times ٧ \underline{|٦}}{٣ \times ٢ \times ١ \underline{|٦}} \times ٨ س^{٣} ص^{٦}$$

$$= ٦٧٢ س^{٣} ص^{٦} .$$

مثال (٢ – ٢٤)

أوجد الحد الثامن في مفكوك $(٢ س^{٣} + \frac{١}{س})^{١٠}$.

الحـــل :

$$ح_{٨} = ح_{٧+١} = ق^{١٠}_{٧} (٢ س^{٣})^{٣} (\frac{١}{س})^{٧} = \frac{\underline{|١٠}}{\underline{|٧} \underline{|٣}} (٢ س^{٣})^{٣} (\frac{١}{س})^{٧}$$

$$= \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \underline{|٧}}{٣ \times ٢ \times ١ \underline{|٧}} \times ٢^{٣} س^{٩} \times \frac{١}{س^{٧}} = ٩٦٠ س^{٢} .$$

مثال (٢ – ٢٥)

أوجد معامل $س^{١٠}$ في مفكوك $(٢ س - ٣)^{١٤}$.

الحـــل :

بما أن رتبة الحد الذي يحتوي $س^{١٠}$ غير معلومة فإننا نفرض أن الحد الذي يحتوي $س^{١٠}$ هو $ح_{ر+١}$ ، وعليه يكون :

$$ح_{ر+١} = ق^{١٤}_{ر} (٢ س)^{١٤-ر} (-٣)^{ر}$$

ولكي نحصل على الحد الذي يحوي $س^{١٠}$ نضع $(س)^{١٤-ر} = (س)^{١٠}$

$$\therefore ١٤ - ر = ١٠ \quad ، \quad ر = ١٤ - ١٠ = ٤$$

$$\therefore ح_{٥} = ق^{١٤}_{٤} (٢ س)^{١٠} (-٣)^{٤} = \frac{\underline{|١٤}}{\underline{|٤} \; \underline{|١٠}} \times ٢^{١٠} س^{١٠} \times ٣^{٤}$$

$$= \frac{١٤ \times ١٣ \times ١٢ \times ١١ \underline{|١٠}}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ \underline{|١٠}} \times ٢^{١٠} \times س^{١٠} \times ٣^{٤} = ٨١٠٨١ \times ٢^{١٠} س^{١٠} .$$

$\therefore$ معامل $س^{١٠}$ هو ٨١٠٨١×٢^{١٠} .

تدريب (٢ – ٩)

أوجد معامل $\text{س}^{٥}$ في مفكوك $\left(٢\,\text{س} - \frac{١}{\text{س}^{٥}} \right)^{١٧}$.

مثال (٢ – ٢٦)

أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $\left(٢\,\text{س}^{٥} - \frac{١}{\text{س}^{٣}} \right)^{٨}$.

الحـــل :

الحد الخالي من س هو الحد الذي يحتوي على $\text{س}^{٠}$ ، وحيث أن رتبته غير معلومة فإننا نفرض أنه $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

$$\therefore\ \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}} \times (٢\,\text{س}^{٥})^{٨-\text{ر}} \times \left(-\frac{١}{\text{س}^{٣}}\right)^{\text{ر}}$$

$$= {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}} \times ٢^{٨-\text{ر}} \times \text{س}^{٤٠-٥\text{ر}} \times (-١)^{\text{ر}} \times \text{س}^{-٣\text{ر}}$$

$$= {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}} \times ٢^{٨-\text{ر}} \times (-١)^{\text{ر}} \times \text{س}^{٤٠-٥\text{ر}-٣\text{ر}}$$

كي يكون الحد الخالي من س ، فإنه يحتوي على ($\text{س}^{٠}$) ، أي أن : $\text{س}^{٤٠-٨\text{ر}} = \text{س}^{٠}$.

$$\therefore\ ٤٠ - ٨\,\text{ر} = ٠ \quad \Longleftarrow \quad \text{ر} = ٥ \ .$$

إذن الحد المطلوب هو : $\text{ح}_{٦} = {}^{٨}\text{ق}_{٥} \times ٢^{٣} \times (-١)^{٥} \times ١ = -٤٤٨$.

الحدود الوسطى:

يمكننا استخدام الحد العام في إيجاد الحد الأوسط في مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$ ، وحيث أنّ عدد حدود المفكوك هي $\text{ن} + ١$ ، فهناك حالتان :

١) إذا كان ن عدداً زوجياً ، فإن: $\text{ن} + ١$ يكون فردياً وفي هذه الحالة يوجد حد أوسط واحد رتبته $\frac{\text{ن}}{٢} + ١$.

٢) إذا كان ن عدداً فردياً ،فإن: $\text{ن} + ١$ يكون زوجياً ، وفي هذه الحالة يوجد حدان أوسطان رتبة الأول $\frac{\text{ن}+١}{٢}$،

ورتبة الثاني $\frac{\text{ن}+١}{٢} + ١$.

مثال (٢ – ٢٧)

أوجد الحدين الأوسطين في مفكوك $\left(٢\,\text{ص} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٤} \right)^{٩}$.

الحـــل :

بما أنّ ٩ عدداً فردياً ، فإنه يوجد حدان أوسطان

رتبة الأول = $\frac{٩ + ١}{٢} = ٥$.

ورتبة الثاني = $\frac{٩ + ٣}{٢} = ٦$.

ولإيجاد كل منهما نستخدم قانون الحد العام :

$ح_{ر+١} = {}^{ن}\text{ق}_{ر}\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر}$ فيكون

$$ح_{٥} = {}^{٩}\text{ق}_{٤}\ (\,٢\,ص\,)^{٥}\,(\,-\,\frac{ص^{٢}}{٤}\,)^{٤} = \frac{\underline{ل٩}}{\underline{ل٤}\ \underline{ل٥}} \times ٣٢\,ص^{٥} \times \frac{ص^{٨}}{٢٥٦}$$

$$= \frac{٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦\ \ \underline{ل٥}}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١\ \ \underline{ل٥}} \times ٣٢\,ص^{٥} \times \frac{ص^{٨}}{٢٥٦} = \frac{٦٣}{٤}\,ص^{١٣}\ ،$$

$$ح_{٦} = {}^{٩}\text{ق}_{٥}\ (\,٢\,ص\,)^{٤}\,(\,-\,\frac{ص^{٢}}{٤}\,)^{٥} = \frac{\underline{ل٩}}{\underline{ل٥}\ \underline{ل٤}} \times ١٦\,ص^{٤} \times -\frac{ص^{١٠}}{١٠٢٤} = -\,\frac{٦٣}{٣٢}\,ص^{١٤}\ .$$

تدريب (٢-١٠)

أوجد الحد الأوسط في مفكوك $(\,٢\,س\,-\,\frac{١}{س}\,)^{١٢}$.

مثال (٢ - ٢٨)

إذا كان $ح_{١٣} = ح_{١٤}$ في مفكوك $(\,١\,-\,س\,)^{٢٥}$. فأوجد قيمة س ، حيث $س \neq ٠$.

الحـــل :

$\because\ ح_{ر+١} = {}^{ن}\text{ق}_{ر}\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر}$ فإن :

$ح_{١٣} = {}^{٢٥}\text{ق}_{١٢}\,(\,١\,)^{١٣}\,(\,-\,س\,)^{١٢} = {}^{٢٥}\text{ق}_{١٢}\ س^{١٢}$.

$ح_{١٤} = {}^{٢٥}\text{ق}_{١٣}\,(\,١\,)^{١٢}\,(\,-\,س\,)^{١٣} = -\,{}^{٢٥}\text{ق}_{١٣}\ س^{١٣}$.

$\because\ ح_{١٣} = ح_{١٤}$ ، $\therefore\ {}^{٢٥}\text{ق}_{١٢}\ س^{١٢} = -\,{}^{٢٥}\text{ق}_{١٣}\ س^{١٣}$ ،

$\because\ {}^{٢٥}\text{ق}_{١٢} = {}^{٢٥}\text{ق}_{١٣}$.

$\therefore\ س^{١٢} = -\,س^{١٣}$

أي أن : $س^{١٣} + س^{١٢} = ٠$

$\therefore\ س^{١٢}\,(\,س + ١\,) = ٠$

$\therefore\ س = -١$ ، أو $س = ٠$ (وهذا مرفوض) .

مثال (٢ – ٢٩)

أوجد قيمة $(١٫٠٠٥)^{١٠}$ مقربة إلى أربعة أرقام عشرية .

الحـــل :

$$(١٫٠٠٥)^{١٠} = (١ + ٠٫٠٠٥)^{١٠} = \sum_{\text{ر}=٠}^{١٠} {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}} \times (٠٫٠٠٥)^{\text{ر}}$$

$$= ١ + {}^{١٠}\text{ق}_{١} \times \frac{٥}{١٠^{٣}} + {}^{١٠}\text{ق}_{٢} \times \frac{٢٥}{١٠^{٦}} + {}^{١٠}\text{ق}_{٣} \times \frac{١٢٥}{١٠^{٩}} + \ldots + \frac{٥^{١٠}}{١٠^{٣٠}}$$

$$= ١ + ٠٫٠٥ + ٠٫٠٠١١٢٥ + ٠٫٠٠٠٠٠١٥ + \ldots \quad .$$

$$\therefore (١٫٠٠٥)^{١٠} \approx ١٫٠٥١١ \quad .$$

نلاحظ أننا توقفنا عند الحد الرابع إذ صار لدينا ٦ منازل عشرية ولو أوجدنا الحد الخامس لظهرت لدينا ٧ منازل عشرية ولن تؤثر على الحد الرابع عند التقريب المطلوب .

النسبة بين كل حد والحد السابق له في مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}}$:

لنفرض أن الحدين هما $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}}$.

$$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}}\ \text{ص}^{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}\ \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}+١}\ \text{ص}^{\text{ر}-١}} = \frac{\dfrac{\text{ن}!}{\text{ر}!\ (\text{ن}-\text{ر})!}}{\dfrac{\text{ن}!}{(\text{ر}-١)!\ (\text{ن}-\text{ر}+١)!}} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

$$= \frac{(\text{ر}-١)!\ (\text{ن}-\text{ر}+١)!}{\text{ر}!\ (\text{ن}-\text{ر})!} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{(\text{ر}-١)!\ (\text{ن}-\text{ر}+١)\ (\text{ن}-\text{ر})!}{\text{ر}\ (\text{ر}-١)!\ (\text{ن}-\text{ر})!} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{(\text{ن}-\text{ر}+١)\ \text{ص}}{\text{ر}\ \text{س}}$$

مثال (٢ – ٣٠)

أوجد النسبة بين الحدين الخامس والرابع في مفكوك $(٣\text{س} + ٤\text{ص})^{١٢}$.

الحـــل :

$$\because \frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{(\text{ن}-\text{ر}+١) \times ٤\text{ص}}{\text{ر} \times ٣\text{س}} \quad .$$

$$\therefore \frac{\text{ح}_{٥}}{\text{ح}_{٤}} = \frac{١٢-٤+١}{٤} \times \frac{٤\text{ص}}{٣\text{س}} = \frac{٩}{٤} \times \frac{٤\text{ص}}{٣\text{س}} = \frac{٣\text{ص}}{\text{س}} \quad .$$

تدريب (٢ – ١١)

في مفكوك (أ س + ب ص)$^{\text{ن}}$ ، أثبت أن النسبة بين المعاملين الحسابيين لحدين متتاليين هي :

$$\frac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+١}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}} \times \frac{\text{ب (معامل الحد الثاني)}}{\text{أ (معامل الحد الأول)}} \quad .$$

مثال (٢ – ٣١)

في مفكوك (١ + س)$^{\text{ن}}$ إذا كان معاملا الحدين الثامن والتاسع متساويين ، وكانت $\frac{\text{ح}_٧}{\text{ح}_٥} = \frac{٤٤}{٧٥}$.

أوجد قيم كلاً من : ن ، س .

الحـــل :

$$\frac{\text{معامل ح}_٩}{\text{معامل ح}_٨} = \frac{(\text{ن} - ٨ + ١)}{٨} \times \frac{١}{١} = ١ \quad \text{(لأن المعاملين متساويين)} \; .$$

$$\therefore \; \text{ن} - ٧ = ٨ \quad \Leftarrow \quad \text{ن} = ١٥ \; .$$

$$\because \; \frac{\text{ح}_٧}{\text{ح}_٥} = \frac{\text{ح}_٧}{\text{ح}_٦} \times \frac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٥} \; .$$

$$\therefore \; \frac{٤٤}{٧٥} = \left(\frac{١٥ - ٦ + ١}{٦} \times \frac{\text{س}}{١} \right) \times \left(\frac{١٥ - ٥ + ١}{٥} \times \frac{\text{س}}{١} \right) .$$

$$\therefore \; \frac{٤}{٢٥} = \text{س}^٢ \quad \Leftarrow \quad \text{س} = \pm \frac{٢}{٥} \; .$$

مثال (٢ – ٣٢)

إذا كانت النسبة بين معاملات ثلاثة حدود متتالية في مفكوك (٣ س + ٤ ص)$^{\text{ن}}$ هي ٢٧ : ٣٦ : ٣٢

فأوجد قيمة ن ورتب هذه الحدود .

الحـــل :

نفرض أن الحدود هي $\text{ح}_{\text{ر}}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}+٢}$.

$$\frac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+١}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}} \times \frac{٤}{٣} = \frac{٣٦}{٢٧}$$

$$\therefore \; \frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}} = ١ \quad \Leftarrow \quad \text{ن} - ٢\text{ر} + ١ = ٠ \qquad .... (١)$$

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+٢}}{\text{معامل } ح_{ر+١}} = \frac{د - (ر + ١) + ١}{ر + ١} \times \frac{٤}{٣} = \frac{٣٢}{٣٦}$$

$$\therefore \frac{د - ر}{ر + ١} = \frac{٢}{٣} \Longleftarrow ٣ د - ٥ ر - ٢ = ٠ \qquad ....(٢)$$

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن : $ر = ٥$ وبالتعويض في (١) نجد أن : $د = ٩$.

∴ الحدود هي $ح_٥$ ، $ح_٦$ ، $ح_٧$.

تمارين ومسائل (٢-٥)

[١] أوجد مفكوك كلٍ مما يأتي :

أ) $(٢ س + ٣ ص)^٤$.

ب) $(ص - \frac{١}{٢ ص})^٥$.

جـ) $(٢ أ + \frac{١}{٢ أ})^٦$.

د) $(١ - ٣ س)^٦$.

هـ) $(٤ + س)^٥$.

و) $(س^٢ - ١)^٨$.

ز) $(١ + س - ٢ س^٢)^٨$.

[٢] أوجد كلاً مما يأتي :

أ) الحد الخامس من $(١ + س)^{١٢}$.

ب) الحد الثامن من $(١ - س)^{١١}$.

جـ) $ح_٤$ من $(\frac{٢ س}{٣} - \frac{٣}{٢ س})^٦$.

د) $ح_٦$ من $(س + \frac{١}{س})^{١١}$.

هـ) $ح_٨$ من $(٣٠ س + \frac{٢}{٣} س^{-٢})^{١٠}$.

و) $ح_٦$ من $(\frac{٢}{\sqrt{س}} + \frac{\sqrt{س}}{٢})^{١٢}$.

[٣] أوجد كلاً مما يأتي :

أ) معامل الحد السابع في مفكوك $(٣ س^٢ - \frac{٢ س}{٣})^{١١}$.

ب) معامل $س^٩$ في مفكوك $(س^٢ - \frac{٣}{س^٣})^{١٢}$.

جـ) الحد الخالي من س في مفكوك $(س - ٢ س^{-١})^{١٠}$.

د) الحد الخالي من س في مفكوك $(٢ س - \frac{٣}{س^٣})^{١٢}$.

[٤] أثبت أن :

أ) $(س + س^{-١})^{٦} - (س - س^{-١})^{٦} = ١٢ (س^{٤} + س^{-٤} + \frac{١}{٣} ٣)$.

ب) معاملي الحدين الأوسطين في مفكوك $(س + ص)^{٢١}$ متساويان .

جـ) الحد الأوسط في مفكوك $\left(\frac{ص \sqrt{س}}{٣} - \frac{٣}{س \sqrt{ص}} \right)^{١٦}$ هو ١٢٨٧٠ $ص^{٤}$ $س^{-٤}$.

[٥] أوجد قيمة كلاً ممايأتي :

أ) $(١ + \sqrt{٢})^{٥} - (١ - \sqrt{٢})^{٥}$.

ب) $(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})^{٤} - (\sqrt{٣} - \sqrt{٢})^{٤}$.

جـ) $(١ + \sqrt{س})^{٤} + (١ - \sqrt{س})^{٤}$.

د) $(س - ٢ ص)^{٥} - (س + ٢ ص)^{٥}$.

[٦] أوجد كلاً ممايأتي :

أ) الحد الأوسط في مفكوك $\left(٢ س^{٣} + \frac{١}{٢ س} \right)^{١٤}$.

ب) الحد الأوسط في مفكوك $\left(س + \frac{١}{س} \right)^{٨}$.

جـ) الحدين الأوسطين في مفكوك $\left(\frac{١}{٢} س - ص \right)^{٩}$.

د) النسبة بين الحدين الرابع والخامس في مفكوك $\left(٢ س - \frac{١}{٤ س^{٢}} \right)^{٥}$.

هـ) معامل $س^{٢}$ في مفكوك $(١ + س + س^{٢})^{٥}$.

[٧] باستخدام مفكوك ذي الحدين أوجد قيمة كلاً مما يأتي :

أ) $(١,٠٣)^{١٠}$ مقربة إلى ثلاثة منازل عشرية .

ب) $(٠,٩٩٨)^{٥}$ مقربة إلى منزلتين عشريتين .

جـ) $(٥,١)^{٤}$ مقرباً الناتج إلى منزلتين عشريتين .

[٨] إذا كان الحد الثالث في مفكوك $(١ + س)^{٨}$ يساوي ١١٢ ، فأوجد قيمة س .

[٩] إذا كانت ثلاثة معاملات لحدود متتالية في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ هي : ٢٠ ، ١٩٠ ، ١١٤٠

فما قيمة ن ؟ وما رتب تلك الحدود ؟

[١٠] إذا كان قيم الحد الثاني والثالث والرابع في مفكوك $(س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية هي : ١٦ ، ١١٢ ، ٤٤٨ على الترتيب . أوجد قيم كلاً من : ن ، س ، ص .

[١١] إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(٢ س + ٣ ص)^{٢ ن + ١}$ متساويين . أثبت أن :

س : ص = ٣ : ٢ .

[١٢] في مفكوك $(س + ١)^{ن}$ وجد أن : $ح_{٤} = ٣ ح_{٢}$ ، $٥ ح_{٦} = ٣ ح_{٥}$. أوجد قيمتي ن ، س .

٣ – ١ بعض المبرهنات الأساسية في الاحتمالات

سبق أن تعرَّفت على بعض المفاهيم الأساسية في الاحتمالات ، مثل : التجربة العشوائية ، وفضاء العينة ، والحوادث العشوائية ، وبعض العمليات على الحوادث العشوائية ، والدالة الاحتمالية وخواصها . وفي هذا البند نذكرك بأهم تلك المفاهيم ، ومن ثم نعيد تناول خواص الدالة في صورة مبرهنات .

مبرهنة (٣ – ١)

احتمال وقوع الحادثة المستحيلة يساوي صفراً ، أي أن : حا ($\varnothing$) = ٠ .

البرهان : ∵ ع ∪ $\varnothing$ = ع

∴ حا (ع ∪ $\varnothing$) = حا (ع) .... (١)

، ∵ ع ، $\varnothing$ حادثتان متنافيتان

حا (ع ∪ $\varnothing$) = حا (ع) + حا ($\varnothing$) « المسلمة ٣ » .... (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن :

حا (ع) = حا (ع) + حا ($\varnothing$)

ومنها حا ($\varnothing$) = ٠ .

مبرهنة (٣ – ٢)

إذا كانت $\bar{\text{أ}}$ هي الحادثة المكملة للحادثة أ في فضاء العينة (ع) فإن : حا ($\bar{\text{أ}}$) = ١ – حا (أ) .

البرهان : ∵ ع = أ ∪ $\bar{\text{أ}}$ ، أ ∩ $\bar{\text{أ}}$ = $\varnothing$

∴ حا (ع) = حا (أ) + حا (أ̄) « مسلمة ٣ »

∵ حا (ع) = ١ « مسلمة ٢ »

∴ ١ = حا (أ) + جا (أ̄)

ومنها حا (أ̄) = ١ – جا (أ)

مبرهنة (٣ – ٣)

لأي حادثتين أ ، ب ∋ ك يكون : حا (أ ب̄) = حا (أ) – حا (أ ب) .

البرهان : من الشكل (٣–١) نلاحظ أن :

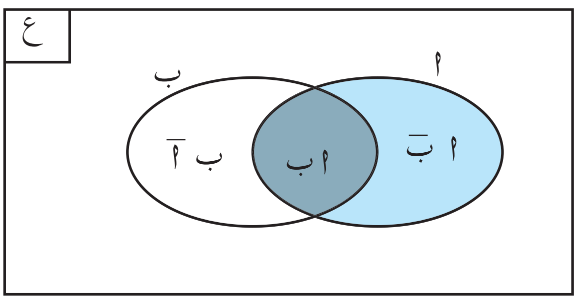
أ ب̄ ∪ أ ب = أ

وعليه : حا (أ ب̄ ∪ أ ب) = حا (أ)

∵ أ ب̄ ∩ أ ب = ∅

∴ حا (أ) = حا (أ ب̄) + حا (أ ب)

ومنها حا (أ ب̄) = حا (أ) – حا (أ ب) .



شكل (٣ – ١)

نتيجة (١) :

إذا كانت أ ، ب حادثتين متنافيتين فإن :

حا (أ ب̄) = حا (أ) ، حا (ب أ̄) = جا (ب) .

تدريب (٣ – ١)

برهن النتيجة (١) .

نتيجة (٢) :

لأي حادثتين أ ، ب ∋ ك ، ب ⊇ أ :

١) حا (أ ب̄) = حا (أ) – حا (ب)

٢) حا (ب) ≥ حا (أ)

البرهان : (١) ∵ ب ⊇ أ ، ∴ أ ب = ب

∴ حا (أ ب) = حا (ب)

∵ حا (أ ب̄) = حا (أ) – حا (أ ب) (مبرهنة ٣–٣)

∴ حا (أ ب̄) = حا (أ) – حا (ب)

تدريب (٣ – ٢)

برهن الفقرة (٢) من النتيجة (٢) .

مثال (٣ – ١)

إذا كان حا (أ) = ٠,٤ ، حا (ب) = ٠,٢ ، حا (أ ∪ ب) = ٠,٥ ، حا (أ ب) = ٠,١ .

فأوجد احتمال :

١) عدم وقوع الحادثة أ .
٢) وقوع الحادثة أ دون وقوع الحادثة ب .
٣) وقوع إحدى الحادثتين أ أو ب على الأكثر .
٤) عدم وقوع أيٍّ من الحادثتين أ أو ب .

الحـــل :

١) احتمال عدم وقوع الحادثة أ هو حا (أ̄)

∵ حا (أ̄) = ١ – حا (أ) [مبرهنة (٣ –٢)]

∴ حا (أ̄) = ١ – ٠,٤ = ٠,٦

٢) احتمال وقوع الحادثة أ دون ب هو حا (أ ب̄) (احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب)

∵ حا (أ ب̄) = حا (أ) – حا (أ ب) [مبرهنة (٣–٣)]

∴ حا (أ ب̄) = ٠,٤ – ٠,١ = ٠,٣

٣) احتمال وقوع إحدى الحادثتين على الأكثر يكافئ احتمال عدم وقوعهما معاً ويكون بذلك الاحتمال المطلوب

هو: حا (أ ب)َ

∵ حا (أ ب)َ = ١ – حا (أ ب)

∴ حا (أ ب)َ = ١ – ٠,١ = ٠,٩

٤) احتمال عدم وقوع أيٍّ منها يكافئ احتمال عدم وقوع أ وعدم وقوع ب ، أي أن :

حا (أ̄ ب̄) = حا (أ ∪ ب)َ = ١ – ٠,٥ = ٠,٥ .

نتيجة (٣) :

لأي حادثة أ ⊆ ف يكون : ٠ ≤ حا (أ) ≤ ١ .

تدريب (٣ – ٣)

برهن النتيجة (٣) .

المبرهنة(٣ –٤) التالية تعتبر من أهم المبرهنات الأساسية في الاحتمالات،وتعرف بـ« قانون الاحتمال الكلي » .

مبرهنة (٣ – ٤)

لأي حادثتين ﺃ ، ب ⊇ ك ، فإن :

حا (ﺃ ∪ ب) = حا (ﺃ) + حا (ب) – حا (ﺃ ب) .

البرهان : بالاستفادة من الشكل (٣ – ١) في مبرهنة (٣ –٣) نلاحظ أن :

∵ ﺃ ∪ ب = ﺃ ∪ (ب $\overline{ﺃ}$) .

∵ ﺃ ∩ ب $\overline{ﺃ}$ = ∅ .

∴ حا (ﺃ ∪ ب) = جا (ﺃ) + حا (ب $\overline{ﺃ}$)

∵ حا (ب $\overline{ﺃ}$) = حا (ب) – حا (ﺃ ب)

∴ حا (ﺃ ∪ ب) = حا (ﺃ) + حا (ب) – حا (ﺃ ب) .

مثال (٣ – ٢)

ألقيا حجــرا نرد مرة واحــدة ، ولوحــظ العدد الظاهر على الوجة العلوي لكل من الحجرين ، وعرَّفنا الحادثتين ﺃ ، ب على النحو التالي :

ﺃ : حادثة أن يكون مجموع العددين على الوجهين العلويين للحجرين هو ٨ .

ب : حادثة أن يكون العددان على الوجهين العلويين للحجرين متساويين.

فما احتمال حدوث ﺃ أو ب .

الحــــل :

∵ ﺩ (ع) = ٣٦ نقطة .

والاحتمال المطلوب هو: حا (ﺃ ∪ ب)

∴ ﺃ = { (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ٢) } .

ب = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦) } .

ﺃ ب = { (٤ ، ٤) } .

∴ حا (ﺃ) = $\frac{٥}{٣٦}$ ، حا (ب) = $\frac{٦}{٣٦}$ ، حا (ﺃ ∩ ب) = حا (ﺃ ب) = $\frac{١}{٣٦}$

∵ حا (ﺃ ∪ ب) = حا (ﺃ) + حا (ب) – حا (ﺃ ب)

∴ حا (ﺃ ∪ ب) = $\frac{٥}{٣٦}$ + $\frac{٦}{٣٦}$ – $\frac{١}{٣٦}$ = $\frac{١٠}{٣٦}$ = $\frac{٥}{١٨}$.

تمارين ومسائل (٣ - ١)

[١] أختير عشوائياً عدد صحيح س من المجموعة { س : ٢ ≤ س ≤ ١٢ ، س ∈ ص$^{+}$ } ، فإذا كان

أ : حادثة الحصول على عدد زوجي .

ب : حادثة الحصول على عدد أولي فردي .

فأوجد :

١) حا (أ) . ٢) حا (ب) .

٣) حا (أ ب) . ٤) حا (أ ∪ ب) .

[٢] صندوق يحتوي على ٦ كرات حمراوات ، ٤ كرات بيضاوات ، ٥ كرات سوداوات، سحبت كرة – عشوائيا – من الصندوق . فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

١) سوداء . ٢) ليست حمراء . ٣) حمراء أو بيضاء .

[٣] إذا كان حا (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، حا (ب) = $\frac{٣}{٨}$ ، حا (أ ب) = $\frac{١}{٤}$ ،

فأوجد :

١) حا (أ ∪ ب) ٢) حا (أ ∪ $\overline{\text{ب}}$) .

[٤] إذا كان حا (أ) = س ، حا (ب) = $\frac{١}{٤}$ ، حا (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$ ، فأوجد قيمة س :

١) عندما أ ب = ∅ ٢) عندما ب ⊂ أ .

[٥] قاعة بها ٨٠ طالبا ، من بينهم ٦٠ طالبا يدرسون اللغة الإنجليزية ، ٤٠ طالبا يدرسون اللغة الفرنسية ، ٣٠ طالبا يدرسون اللغتين معاً .

لتكن الحادثتان أ ، ب معرَّفتين على النحو التالي :

أ : حادثة اختيار طالبٍ يدرس اللغة الإنجليزية .

ب : حادثة اختيار طالبٍ يدرس اللغة الفرنسية .

أوجد :

١) حا (أ ∪ ب) . ٢) حا ($\overline{\text{أ}}$ ب) . ٣) حا (أ $\overline{\text{ب}}$) .

[٦] إذا كانت أ ⊂ ب ، وكان حا (أ) = ٠,٣ ، حا (ب) = ٠,٧ . فأوجد :

١) حا (أ ∪ ب) . ٢) حا (أ $\overline{\text{ب}}$) . ٣) حا (ب $\overline{\text{أ}}$) .

٣ – ٢ بناء النموذج الاحتمالي

نتعرف في هذا البند على طريقة تمكننا من حساب قيمة الدالة الاحتمالية (حا) لأي حادثة في الفضاء الاحتمالي (ع ، ك ، حا) ، وإذا خصّصنا لكل حادثة ابتدائية ($س_ر$) عدداً حقيقياً « $ا_ر$ » ، [أي : حا ($س_ر$) = $ا_ر$] يحقق الشرطين التاليين :

١) $ا_ر$ ≥ ٠ ، ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . . ، ن   ٢) $\sum_{ر=١}^{ن}$ $ا_ر$ = ١

نكون قد كونّا نموذجاً احتمالياً نستطيع بواسطته حساب احتمال أي حادثة من (ك) ، أي نكون قد عرَّفنا الدالة (حا) على (ك) وبما ينسجم مع المسلمات الاحتمالية تماماً :

تعريف (٣ – ١)

احتمال حادثة هو مجموع احتمالات الحوادث الابتدائية الداخلة في تشكيل هذه الحادثة .

تدريب (٣ – ٤)

إذا كان : ع = { ا ، ب ، جـ } ، حا (ا) = ٠,٣ ، حا (ب) = ٠,٢ ، فأوجد حا (جـ) .

مثال (٣ – ٣)

أُلقيت قطعتان متجانستان من النقود ، ولوحظ الوجه الظاهر عند استقرارهما على الأرض .

١) اكتب فضاء العينة .   ٢) كوّن نموذجا احتماليا مناسبا لهذه التجربة .

٣) أوجد احتمالات الحوادث التالية :

أ) الحصول على الصورة مرة واحدة على الأقل .   ب) الحصول على الكتابة من القطعة الثانية .

جـ) الحصول على الكتابة مرة واحدة فقط .   د) الحصول على الصورة مرة واحدة على الأكثر .

الحـــل :

١) ع = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) } .

٢) بما أن القطعتين متجانستين ، فإن الاحتمال يكون متساوي الظهور للصورة والكتابة .

وحيث إن معرفة عدد النتائج الممكنة (ن (ع)) شرط مسبق لتكوين أيِّ نموذج احتمالي مطلوب لأي تجربة عشوائية .

نجد أن ن (ع) = ٤ نقاط (حوادث ابتدائية) .

إذن ممكن الآن أن نخصِّص لكل نقطة من نقاط ع قيمة احتمالية = $\frac{١}{٤}$ ، وفي هذه الحالة نكون قد كوّنا النموذج الاحتمالي الآتي :

حا {(ص ، ص)} = حا {(ص ، ك)} = حا {(ك ، ص)} = حا {(ك ، ك)} = $\frac{١}{٤}$

وهو النموذج الاحتمالي المطلوب تكوينه لهذه التجربة .

٣) حا (ا) = حا {(ص ، ص)} + حا {(ص ، ك)} + حا {(ك ، ص)} .

$= \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

حا (ب) = حا {(ص ، ك)} + حا {(ك ، ك)} .

$= \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$.

حا (جـ) = حا {(ص ، ك)} + حا {(ك ، ص)} .

$= \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$.

حا (د) = حا {(ص ، ك)} + حا {(ك ، ص)} + حا {(ك ، ك)} .

$= \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$.

لاحظ من حل المثال السابق (٣ – ٣) فقـرة (٢) انَّ كل نقطة من نقاط فضاء العيـنة « ع » لها الاحتمـال نفسه ويساوي $\frac{١}{ن(ع)} = \frac{١}{٤}$ ؛

الفضـاءات التي تكـون فيه فرصة وقـوع الحـوادث متساوية تسمّى الفضـاءات ذات الاحتمالات المتساوية ، وتُسمَّى دالة الاحتمال (حا) المعرَّفة على مثل هذه الفضاءات دالة الاحتمال المنتظمة فمثلاً : عنـد إلقـاء حجـر نرد وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي له عند استقراره على الأرض ، فإن : ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، ونجد أن :

حا ({ ١ }) = حا ({ ٢ }) = حا ({ ٣ }) = حا ({ ٤ }) = حا ({ ٥ }) = حا ({ ٦ }) = $\frac{١}{٦}$.

وبهذا نكون قد خصَّصنا في هذه التجربة لكل نقطة من نقاط فضاء العينـة« ع »الاحتمال نفسه = $\frac{١}{ن(ع)} = \frac{١}{٦}$

وهذا يعني أن (حا) دالة احتمال منتظمة ؛ إلا أن بناء النموذج الاحتمالي لا يفترض تساوي قيم ($ا_ر$) دائما في كل التجارب العشوائية . وإذا افترضنا الآن أن (ا) حادثة تتضمن ن (ا) فإن :

$$\text{حا (ا)} = \underbrace{\frac{١}{ن(ع)} + \frac{١}{ن(ع)} + \dots + \frac{١}{ن(ع)}}_{\text{ن (ا) مرة}} = \frac{ن(ا)}{ن(ع)}$$

(حيث احتمال كل نقطة (حادثة) = $\frac{١}{ن(ع)}$)

ونشير أن أكثر ما تكون دالة الاحتمال منتظمة في التجارب التي يتم فيها اختيار عنصر من مجموعة عشوائية .

فعندما نقول مثلاً : إننا سحبنا –عشوائياً– ورقة من مجموعة أوراق لعب محكمة الخلط، أو سحبنا – عشوائياً – كرة من صندوق فإن ذلك يعني أنّ دالة الاحتمـــال منتظمة . وعندما تكون دالة الاحتمال منتظمة نستخـــدم التعريف الآتي في حساب احتمال أي حادثة .

تعريف (٣ – ٢)

إذا كانت (حا) دالة احتمال منتظمة معرَّفـة على (ك) وكانـت (ا) حادثة في تجربة عشوائيــة ، فإن :

$$حا\,(ا) = \frac{د\,(ا)}{د\,(ع)} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة للحادثة } (ا)}{\text{عدد الحالات الممكنة لفضاء العينة } «ع»} \quad ، \quad د\,(ا) \leq د\,(ع) \,.$$

مثال (٣ – ٤)

صندوقان يحتوي الأول منهما على كرتين بيضاوين وكرة سوداء ، ويحتوي الآخر على كرة بيضاء فقط . سحبت عشوائيا كرة من الصندوق الأول ووضعت في الصندوق الثاني وخلطت الكرتان في الصندوق الثاني خلطا محكما . ثم سحبت منه بعد ذلك عشوائياً كرة .

١) كوِّن نموذجاً احتمالياً مناسباً لهذه التجربة .

٢) ما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق الثاني بيضاء ؟

الحـــل :

نوجد د (ع) وللتمييز بين الكرات بعضها عن بعض نرمز للكرتين البيضاوين في الصندوق الأول بالرمزين « $ب_١$ » ، « $ب_٢$ » وللكرة السوداء بالرمز (س) وللكرة البيضاء في الصندوق الآخر بالرمز « $ب_٣$ » فيكون :

ع = { ($ب_١$ ، $ب_١$) ، ($ب_١$ ، $ب_٣$) ، ($ب_٢$ ، $ب_٢$) ، ($ب_٢$ ، $ب_٣$) ، (س، $ب_٣$) ، (س، س) } حيث المسقط الأول في كل زوج مرتَّب يرمز لنتيجة السحب من الصندوق الأول ، والمسقط الثاني لنتيجة السحب من الصندوق الآخر .

١) إذا خصَّصنا لكل نقطة من نقاط فضاء العينة (ع) احتمالا = $\frac{١}{٦}$ فإننا في هذه الحالة نكون قد كونا النموذج الاحتمالي الآتي :

حا {($ب_١$ ، $ب_١$)} = حا {($ب_١$ ، $ب_٣$)} = حا {($ب_٢$ ، $ب_٢$)} = حا {($ب_٢$ ، $ب_٣$)} = حا {(س ، $ب_٣$)}

= حا {(س ، س)} = $\frac{١}{٦}$.

وهو النموذج الاحتمالي المطلوب تكوينه في هذه التجربة .

٢) نفـرض أن ا هي حادثـــة سحـــب كـــرة بيضـــاء مـــن الصنـــدوق الثانـــي .

∴ ا = {($ب_١$ ، $ب_١$)، ($ب_١$ ، $ب_٣$)، ($ب_٢$ ، $ب_٢$) ، ($ب_٢$ ، $ب_٣$) ، (س ، $ب_٣$) } .

∴ ق(أ) = ٥ نقاط (حوادث أولية بسيطة) ؛ ∵ ق (ع) = ٦ نقاط ،

∵ حا (أ) = $\frac{\text{ق (أ)}}{\text{ق (ع)}}$ ∴ حا (أ) = $\frac{٥}{٦}$.

مثال (٣ – ٥)

اختير عشوائياً عدد صحيح (س) حيث : ١ ≥ س ≥ ٥٠ .

أوجد احتمال أن يكون العدد المختار :

١) فردياً . ٢) يقبل القسمة على (١٣) .

٣) ليس مربعاً كاملاً . ٤) لا يقبل القسمة على (١٠) .

الحـــل :

ع = { ١ ، ٢ ، ٣، . . . . ، ٥٠ } .

∴ ق (ع) = ٥٠ .

١) نفرض أن : أ هي حادثة العدد المختار فردياً .

∴ أ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، . . . . ، ٤٩ }. ⟸ ق (أ) = ٢٥ .

∵ حا (أ) = $\frac{\text{ق (أ)}}{\text{ق (ع)}}$ ∴ حا (أ) = $\frac{٢٥}{٥٠}$ = $\frac{١}{٢}$.

٢) نفرض أن : د هي حادثة العدد المختار يقبل القسمة على «١٣»

∴ د = { ١٣ ، ٢٦ ، ٣٩ } ⟸ ق (د) = ٣ .

∵ حا (د) = $\frac{\text{ق (د)}}{\text{ق (ع)}}$ ، ∴ حا (د) = $\frac{٣}{٥٠}$.

٣) نفرض أن : ب هي حادثة العدد المختار ليس مربعاً كاملاً ، فتكون المتممة $\bar{\text{ب}}$ هي : حـادثة العدد المختار مربعاً كاملاً .

∴ $\bar{\text{ب}}$ = { ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، ٤٩ } ⟸ ق ($\bar{\text{ب}}$) = ٧ .

∵ حا ($\bar{\text{ب}}$) = $\frac{\text{ق (} \bar{\text{ب}} \text{)}}{\text{ق (ع)}}$ ∴ حا ($\bar{\text{ب}}$) = $\frac{٧}{٥٠}$

وحيث أن : حا ($\bar{\text{ب}}$) = ١ – حا (ب)

∴ حا (ب) = ١ – حا ($\bar{\text{ب}}$) = ١ – $\frac{٧}{٥٠}$ = $\frac{٤٣}{٥٠}$.

٤) نفرض أن : جـ هي حادثة العدد المختار لا يقبل القسمة على « ١٠ » فتكون المتممة $\overline{\text{جـ}}$ هي حادثة العدد المختار يقبل القسمة على (١٠) .

$$\therefore \overline{\text{جـ}} = \{\text{١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠}\} \Leftarrow \text{ن}(\overline{\text{جـ}}) = \text{٥} \ .$$

$$\because \text{حا}(\overline{\text{جـ}}) = \frac{\text{ن}(\overline{\text{جـ}})}{\text{ن}(\text{ع})} \qquad \therefore \text{حا}(\overline{\text{جـ}}) = \frac{\text{٥}}{\text{٥٠}} = \frac{\text{١}}{\text{١٠}} \ .$$

وحيث أن : $\text{حا}(\overline{\text{جـ}}) = \text{١} - \text{حا}(\text{جـ})$.

$$\therefore \text{حا}(\text{جـ}) = \text{١} - \text{حا}(\overline{\text{جـ}}) = \text{١} - \frac{\text{١}}{\text{١٠}} = \frac{\text{٩}}{\text{١٠}} \ .$$

مثال (٣ – ٦)

وجد في أحد الأحياء أنّ احتمال إنجاب ولد يساوي احتمال إنجاب بنت . أختيرت عشوائياً أسرة من بين أسر ذلك الحي ووجد أن لديها ٣ أطفال .

١) حدّد فضاء العيّنة المرتبط بالجنس ، والترتيب في العمر لدى الأسرة المختارة .

٢) احسب احتمال الحادثتين التاليتين :

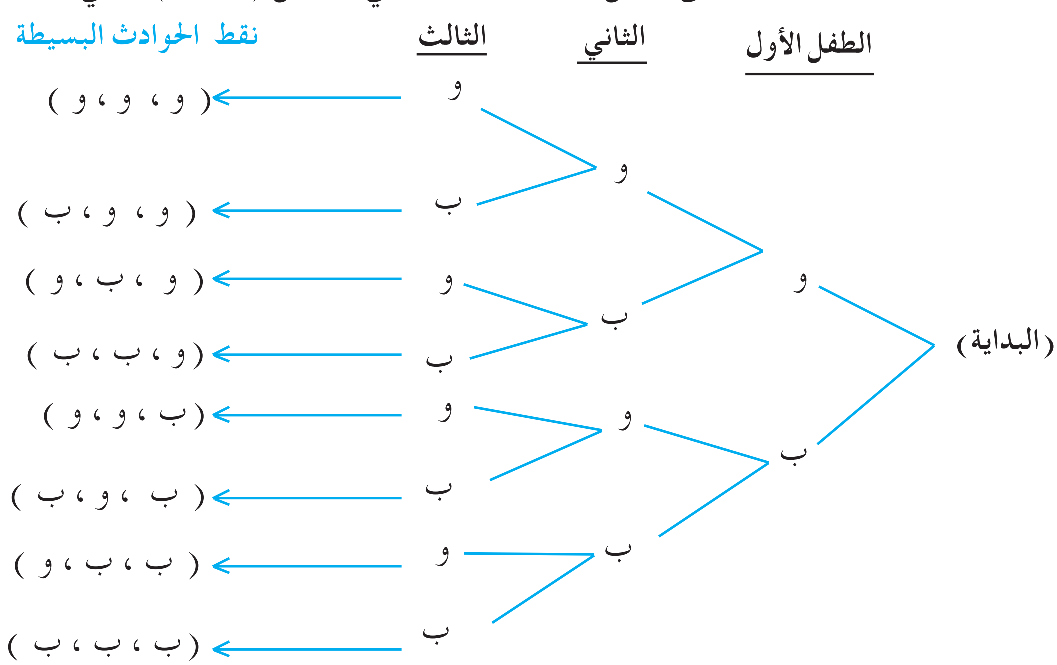
أ) أن يكون أطفال الأسرة المختارة بنتين وولد .

ب) أن يكون الطفل الأكبر للأسرة المختارة ولداً .

الحـــل :

نرمز للولد بالرمز « و » وللبنت بالرمز « ب » .

١) لتحديد فضاء العيّنة نكتب التجربة على شكل شجرة بيانيّة كما في الشكل (٣ – ٢) التالي :



شكل (٣ – ٢)

∴ ع = { (و ، و ، و) ، (و ، و ، ب) ، (و ، ب ، و) ، (و ، ب ، ب) ، (ب ، و ، و) ، (ب ، و ، ب) ، (ب ، ب ، و) ، (ب ، ب ، ب) } .

∴ ى (ع) = ٨ .

٢) أ) نفرض أن : أ هي حادثة أن يكون أطفال الأسرة المختارة بنتين وولد .

∴ أ = { (و ، ب ، ب) ، (ب ، و ، ب) ، (ب ، ب ، و) } ⟸ ى (أ) = ٣ .

∵ حا (أ) = $\frac{ى (أ)}{ى (ب)}$ ∴ حا (أ) = $\frac{٣}{٨}$.

ب) نفرض أن : ب هي حادثة أن يكون الطفل الأكبر للأسرة المختارة ولداً .

∴ ب = {(و ، و ، و) ، (و ، و ، ب) ، (و ، ب ، و) ، (و ، ب ، ب) } ⟸ ى (ب) = ٤ .

∵ حا (ب) = $\frac{ى (ب)}{ى (ع)}$.

∴ حا (ب) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$.

تمارين ومسائل (٣ - ٢)

[١] أُلقي مكعبا نرد معاً على الأرض مرة واحدة ، احسب احتمال الحصول على :

أ) العدد نفسه من المكعبين .

ب) مجموع أكبر من ٩ .

جـ) العدد « ٣ » من المكعب الأول .

[٢] صندوق به كرات متجانسة ، مختلفة اللون ، ٤ كرات حمراوات ، ٣ كرات بيضاوات، ٥ كرات سوداوات ، سُحبت كرة – عشوائياً – من الصندوق ، احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

١) حمراء أو سوداء .

٢) حمراء أو بيضاء .

٣) حمراء أو بيضاء أو سوداء .

[٣] قاعة بها ٨٠ طالباً يدرس كل منهم لغة أجنبية واحدة ، فإذا كان ٣٥ طالباً منهم يدرسون الإنجليزية ، ٢٥ طالباً يدرسون الفرنسية والباقي يدرسون الألمانية . اُختير – عشوائياً – طالب ، فما احتمال أن يكون ممن يدرسون :

١) اللغة الإنجليزية . ٢)اللغة الفرنسية .

٣) اللغة الألمانية أو اللغة الفرنسية .

[٤] أُلقيت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية ولوحظ الوجه الظاهر عليها عند استقرارها على الأرض ؛

أولاً : حدد الفضاء الاحتمالي (ع) لهذه التجربة .

ثانياً : احسب احتمال ظهور:

أ) صورة واحدة على الأقل . ب) صورتين على الأقل .

جـ) كتابة واحدة على الأقل . د) كتابتين متتاليتين .

هـ) صورتين فقط . و) صورتين على الأكثر .

[٥] سُحبت – عشوائياً – بطاقة من بين ١٠٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ١٠٠ .

ما احتمال أن يكون العدد على البطاقة المسحوبة :

أ) يقبل القسمة على « ١٠ » . ب) يقبل القسمة على « ١٧ » .

جـ) يقبل القسمة على « ١٠ » أو « ١٧ » .

[٦] أُلقي حجر نرد مرتين ، ولوحظ الوجه الظاهر عليه عند استقراره على الأرض ، احسب احتمال كلٍّ من الحوادث التالية :

أ) مجموع الرقمين = عدداً زوجياً .

ب) مجموع الرقمين = ٧ .

جـ) الحصول على العدد (٤) في الرمية الأولى وعلى العدد (٣) في الرمية الثانية .

[٧] اختير – عشوائياً – عدد صحيح « س » حيث ١ ≤ س ≤ ٦٠ . أوجد احتمال أن يكون العدد المختار :

أ) زوجياً . ب) مربعاً كاملاً .

جـ) يقبل القسمة على ٧ . د) يقبل القسمة على ٧ أو ١٧ .

[٨] صندوقان يحتوي الأول على كرتين بيضاوين وكرة سوداء ، ويحتوي الثاني على كرة بيضاء وكرة سوداء . سُحبت كرة – عشوائياً – من الصندوق الأول ووضعت في الصندوق الثاني وخُلطت جميع الكرات في الصندوق الثاني ثم سحبت منه كرة عشوائياً .

١) كوِّن النموذج الاحتمالي لهذه التجربة .

٢) ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق الثاني بيضاء ؟

[٩] سحبت ورقة – عشوائياً – من بين مجموعة أوراق اللعب العادي (عددها ٥٢ ورقة) محكمة الخلط .

احسب احتمال أن تكون الورقة مسحوبة :

أ) صورة ولد أو صورة بنت .

ب) سوداء .

جـ) سوداء أو صورة ولد .

[١٠] أُلقيت قطعة نقود أربع مرات متتالية ، ولوحظ الوجه الظاهر عليها عند استقرارها على الأرض :

أولاً : حدِّد الفضاء الاحتمالي (ع) لهذه التجربة .

ثانياً : احسب احتمالات كلٍ من الحوادث التالية :

أ) أن تكون نتيجة الرمية الثانية ظهور الصورة . ب) ظهور الصورة ثلاث مرات على الأقل .

جـ) ظهور الكتابة مرتين على الأقل .

[١١] أسرة لها أربعة أطفال ؛ تم تسجيلهم من الأكبر إلى الأصغر حسب النوع :

أولاً : اكتب فضاء العينة لهذه التجربة .

ثانياً : عبِّر عن الحوادث التالية واحسب احتمالها :

أ) لدى الأسرة بنتان . ب) لدى الأسرة ولد واحد على الأقل .

جـ) عدد الذكور أكثر من عدد الإناث .

٣ – ٣ الاحتمال الشرطي وقانون الضرب والحوادث المستقلة

أولاً : الاحتمال الشرطي :

كثيراً ما يصادفنا في حياتنا اليومية حسابات وقوع حادثة بشرط تحقق وقوع حادثة أخرى كحادثة دخول الطالب الجامعة إذا حصل على معدل ٧٥٪ على الأقل ، أو حصول عبدالله على سيارة إذا حصل على شهادة البكالوريوس من الجامعة ... وهكذا .

ويسمَّى مثل هذا الاحتمال بالاحتمال الشرطي (المشروط) وإذا افترضنا أن : أ هي حادثة حصول عبدالله على سيارة ، ب هي حادثة حصول عبدالله على شهادة البكالوريوس ؛ فإن احتمال حصول عبدالله على سيارة في حالة حصوله على شهادة البكالوريوس من الجامعة يكون : حا (أ | ب) وهو رمز الاحتمال الشرطي ويُقرأ احتمال وقوع « أ » بشرط وقوع « ب » .

تعريف (٣ –٣)

$$\text{حا}(\text{أ} \mid \text{ب}) = \frac{\text{حا}(\text{أ ب})}{\text{حا}(\text{ب})} \text{ ، حا}(\text{ب}) \neq ٠ \text{ ، } \text{حا}(\text{ب} \mid \text{أ}) = \frac{\text{حا}(\text{أ ب})}{\text{حا}(\text{أ})} \text{ ، حا}(\text{أ}) \neq ٠ .$$

مثال (٣ – ٧)

إذا كان حا (أ ∪ ب) = ٠,٤ ، حا (أ ب) = ٠,١ ، حا (ب) = ٠,٢ . فأوجد :

١) حا (أ | ب) . ٢) حا (ب | أ) . ٣) حا (ب | $\bar{\text{أ}}$) . ٤) حا ($\bar{\text{أ}}$ | $\bar{\text{ب}}$) .

الحـــل :

١) ∵ $\text{حا}(\text{أ} \mid \text{ب}) = \frac{\text{حا}(\text{أ ب})}{\text{حا}(\text{ب})}$ ∴ $\text{حا}(\text{أ} \mid \text{ب}) = \frac{٠,١}{٠,٢} = \frac{١}{٢}$.

٢) ∵ $\text{حا}(\text{ب} \mid \text{أ}) = \frac{\text{حا}(\text{أ ب})}{\text{حا}(\text{أ})}$ ∴ $\text{حا}(\text{ب} \mid \text{أ}) = \frac{٠,١}{\text{حا}(\text{أ})}$ ....(١)

نوجد حا (أ) كما يلي :

∵ حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) – حا (أ ب)

∴ ٠,٤ = حا (أ) + ٠,٢ – ٠,١ .

∴ حا (أ) = ٠,٣ ....(٢)

وبالتعويض عن حا (أ) من (٢) في (١) نجد أن :

$$\text{حا (ب | أ)} = \frac{٠,١}{٠,٣} = \frac{١}{٣} .$$

٣) $$\text{حا (ب | }\bar{\text{أ}}\text{)} = \frac{\text{حا (ب }\bar{\text{أ}}\text{)}}{\text{حا (}\bar{\text{أ}}\text{)}} = \frac{\text{حا (ب) – حا (أ ب)}}{\text{١ – حا (أ)}} = \frac{٠,٢ - ٠,١}{١ - ٠,٣} = \frac{٠,١}{٠,٧} = \frac{١}{٧} .$$

٤) $$\text{حا (}\bar{\text{أ}}\text{ | }\bar{\text{ب}}\text{)} = \frac{\text{حا (}\bar{\text{أ}}\,\bar{\text{ب}}\text{)}}{\text{حا (}\bar{\text{ب}}\text{)}} = \frac{\text{حا (أ ∪ ب)}'}{\text{حا (}\bar{\text{ب}}\text{)}} = \frac{\text{١ – حا (أ ∪ ب)}}{\text{١ – حا (ب)}} = \frac{١ - ٠,٤}{١ - ٠,٢} = \frac{٠,٦}{٠,٨} = \frac{٣}{٤} .$$

مثال (٣ – ٨)

أوجد حا (ب | أ) إذا كان :

١) أ ⊂ ب . ٢) أ ، ب حادثتين متنافيتين .

الحـــل :

١) إذا كانت أ ⊂ ب فلابد أن تقع « ب » كلَّما وقعت « أ »

∵ أ ⊂ ب ، ∴ أ ب = أ ⟸ حا (أ ب) = حا (أ) ....(١)

وحيث أن : $\text{حا (ب | أ)} = \frac{\text{حا (أ ب)}}{\text{حا (أ)}}$ ....(٢)

وبالتعويض عن (١) في (٢) نحصل على :

$$\text{حا (ب | أ)} = \frac{\text{حا (أ)}}{\text{حا (أ)}} = ١ .$$

٢) ∵ أ ، ب حادثتان متنافيتان ⟸ أ ب = ∅ .

∴ حا (أ ب) = حا (∅) = ٠ ....(٣)

∵ $\text{حا (ب | أ)} = \frac{\text{حا (أ ب)}}{\text{حا (أ)}}$ ....(٤)

وبالتعويض عن (٣) في (٤) نحصل على :

$\text{حا (ب | أ)} = \frac{٠}{\text{حا (أ)}} = ٠$ ، ∴ حا (ب | أ) = ٠

وهذا يعني إذا كانت أ ، ب حادثتين متنافيتين فلايمكن أن تقع « ب » إذا وقعت « أ » .

ثانياً : قانون حاصل الضرب :

من تعريف الاحتمال الشرطي يمكن أن نستنتج مباشرة قانون حاصل الضرب . لنفترض أن ا ، ب حادثتان، فإن احتمال وقوع الحادثتين معاً يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة « ب » في احتمال وقوع الحادثة «ا» بشرط وقوع « ب » ، أو يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة «ا» في احتمال وقوع الحادثة « ب » بشرط وقوع «ا» . نلخّص ما سبق بشكل رمزي في التعريف الآتي :

تعريف (٣ - ٤)

حا (ا ب) = حا (ب) حا (ا | ب) أو حا (ا ب) = حا (ا) حا (ب | ا) .

يُسمَّى هذا التعريف « قانون حاصل الضرب » ويتوقف تطبيقه على كون أيِّ الحادثتين قد وقعت أولاً .

مثال (٣ - ٩)

سحبت عشوائيا بطاقتان من بين أوراق اللّعب العادي (عددها ٥٢ بطاقة) .

ما احتمال الحصول على الباشا (الشائب) وعشرة ؟

الحـــل :

نفرض أن : ا هي حادثة الحصول على الباشا وعشرة .

∴ حا (ا) = حا { السحبة الأولى باشا والأخرى عشرة } أو حا { السحبة الأولى عشرة والأخرى الباشا }

وإذا اعتبرنا : $ب_١$ هي حادثة الحصول على الباشا في السحبة الأولى ⟸ حا ($ب_١$) = $\frac{٤}{٥٢}$

$ب_٢$ هي حادثة الحصول على العشرة في السحبة الأخرى ⟸ حا ($ب_٢$) = $\frac{٤}{٥١}$ = حا ($ب_٢$ | $ب_١$)

$جـ_١$ هي حادثة الحصول على العشرة في السحبة الأولى ⟸ حا ($جـ_١$) = $\frac{٤}{٥٢}$

$جـ_٢$ هي حادثة الحصول على الباشا في السحبة الأخرى ⟸ حا ($جـ_٢$) = $\frac{٤}{٥١}$ = حا ($جـ_٢$ | $جـ_١$)

∴ حا (ا) = حا ($ب_١$ $ب_٢$) + حا ($جـ_١$ $جـ_٢$)

∴ حا (ا) = حا ($ب_١$) حا ($ب_٢$ | $ب_١$) + حا ($جـ_١$) حا ($جـ_٢$ | $جـ_١$)

$$= \frac{٤}{٥٢} \times \frac{٤}{٥١} + \frac{٤}{٥٢} \times \frac{٤}{٥١} = \frac{١}{١٣} \times \frac{٤}{٥١} + \frac{١}{١٣} \times \frac{٤}{٥١}$$

$$= \frac{٤}{٦٦٣} + \frac{٤}{٦٦٣} = \frac{٨}{٦٦٣} \quad .$$

مثال (٣ – ١٠)

صندوق يحتوي على ٣ كرات حمراوات ، ٧ كرات بيضاوات . سحبت – عشوائياً – كرة من الصندوق وأُضيفت إليه كرة من اللّون المخالف للكرة المسحوبة . وخلطت مع بقية الكرات الموجودة في الصندوق ، ثم سحبت منه – عشوائياً – كرة .

أولاً : أوجد احتمال الحوادث التالية :

١) أن تكون الكرة المسحوبة الثانية حمراء . ٢) أن تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوان .

٣) أن تكون الكرتان المسحوبتان من لون واحد .

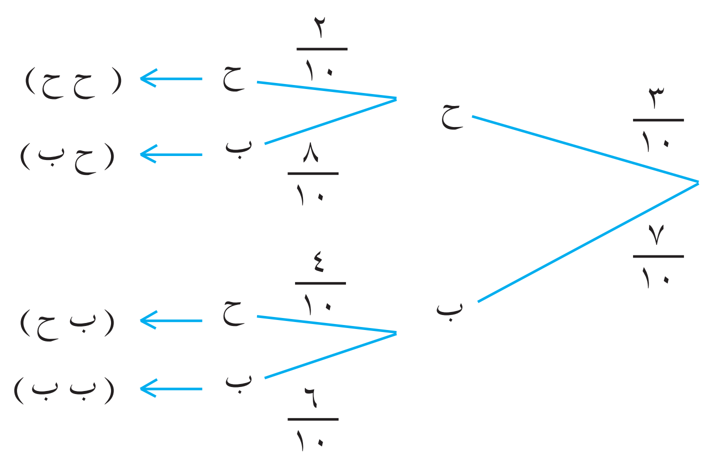
ثانياً : إذا كانت الكرتان المسحوبتان من لون واحد ، فما احتمال أن تكون الكرتان من اللّون الأبيض ؟

الحــــل :

أولاً : سوف نحل هذا المثال باستخدام طريقة الشجرة ، حيث هذه الطريقة تسهل حل الكثير من التمارين والمسائل من هذا النوع .

ولكي نميّز بين ألوان الكرات نرمز لسحب كرة حمراء من الصندوق بالرمز (ح) ولسحب كرة بيضاء بالرمز (ب) مع مراعاة أن الكرة المضافة إلى الصندوق هي من اللّون المخالف للكرة المسحوبة منه أولاً .

نرسم الشجرة البيانيّة وفقاً للمعلومات المعطاة في المثال . كما في الشكل (٣ – ٣) التالي :



شكل (٣ – ٣)

نفترض أن :

أ : هي حادثة الكرة الثانية حمراء .

ب : هي حادثة الكرتان المسحوبتان بيضاوان .

جـ : هي حادثة الكرتان المسحوبتان من لون واحد .

ء : هي الحادثة (ب | جـ)

١) احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء هو :

$$\text{حا}(\text{أ}) = \frac{٣}{١٠} \times \frac{٢}{١٠} + \frac{٧}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} = \frac{٦}{١٠٠} + \frac{٢٨}{١٠٠} = \frac{١٧}{٥٠}$$

(لأن هناك مسارين من الشجرة يؤدي إلى كرة حمراء).

٢) احتمال أن تكون الكرتان بيضاوان هو : حا (ب) = $\frac{٧}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٢١}{٥٠}$ (من تتبع المسارات في الشجرة)

٣) احتمال أن تكون الكرتان من لون واحد هو : حا(جـ) = $\frac{٣}{١٠} \times \frac{٢}{١٠} + \frac{٧}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥٠} + \frac{٢١}{٥٠} = \frac{١٢}{٢٥}$

(هناك مساران أن تكون الكرتان بيضاوان أو حمراوان)

ثانيا : احتمال وقوع ب بشرط وقوع جـ هو : حا (ء) = حا (ب | جـ) = $\frac{\text{حا (ب جـ)}}{\text{حا (جـ)}}$

وحيث إن : حا (ب جـ) = حا (ب) (لأن : جـ = كرتان حمراوان ، كرتان بيضاوان)،
(ب = كرتان بيضاوان) .

$$\therefore \text{حا (ء)} = \frac{\text{حا (ب)}}{\text{حا (جـ)}} = \frac{\frac{٢١}{٥٠}}{\frac{١٢}{٢٥}} = \frac{٢١}{٥٠} \times \frac{٢٥}{١٢} = \frac{٧}{٨} \ .$$

ثالثاً : الحوادث المستقلة :

يقال عن حادثتين ﺃ ، ب أنهما حادثتان مستقلتان إذا كان حدوث إحداهما لا يتأثر بحدوث (أو عدم حدوث الأخرى ،أي أن استقلال حادثتين ﺃ ، ب يعني أن : حا (ﺃ | ب) = حا (ﺃ) أو حا (ب | ﺃ) = حا (ب)
وبالتعويض في قانون حاصل الضرب نحصل على القانون : حا (ﺃ ب) = حا (ﺃ) × حا (ب)
وهو أيضاً شرط أساسي لكون ﺃ ، ب حادثتين مستقلتين .

تعريف (٣ – ٥)

إذا كانت ﺃ ، ب حادثتين مستقلتين فإن : حا (ﺃ ب) = حا (ﺃ) × حا (ب) .

مثال (٣ – ١١)

إذا كان حا (ﺃ ∪ ب) = حا (ﺃ) حا ($\bar{\text{ب}}$) + حا (ب) .
أثبت أن : ﺃ ، ب حادثتان مستقلتان .

الحـــل :

نبحث في تحقّق الشرط : حا (ﺃ ب) = حا (ﺃ) حا (ب) ؛
فإذا تحقّق : كانت ﺃ ، ب حادثتين مستقلتين ، وإذا لم يتحقق : كانت ﺃ ، ب حادثتين غير مستقلتين .

∵ حا (ﺃ ∪ ب) = حا (ﺃ) حا ($\bar{\text{ب}}$) + حا (ب) (معطى)

∵ حا (ﺃ ∪ ب) = حا (ﺃ) + حا (ب) – حا (ﺃ ب) [مبرهنة (٣ – ٤)].

∴ حا (ا) + حا (ب) − حا (ا ب) = حا (ا) حا($\bar{ب}$) + حا (ب)

= حا (ا) [١ − حا (ب)] + حا (ب)

= حا (ا) − حا (ا) حا (ب) + حا (ب) .

∴ − جا (ا ب) = − حا (ا) حا (ب) ⟸ حا (ا ب) = حا (ا) حا (ب) .

∴ ا ، ب حادثتان مستقلتان .

مثال (٣ − ١٢)

إذا كانت ا ⊃ ب وكان حا (ا) = $\frac{١}{٤}$ ، حا (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، فهل ا ، ب حادثتين مستقلتين ؟

الحـــل :

نبحث في تحقق الشرط : حا (ا ب) = حا (ا) حا (ب) .

أولاً : نوجد قيمة الطرف الأيمن من الشرط كما يلي :

∵ ا ⊃ ب ⟸ ا ب = ا ⟸ حا (ا ب) = حا (ا) = $\frac{١}{٤}$ .... (١)

ثانياً : نوجد قيمة الطرف الأيسر من الشرط كما يلي :

حا (ا) حا (ب) = $\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{١٢}$ .... (٢)

ثالثاً: نقارن بين (١) ، (٢) فنجد أن :

$\frac{١}{٤} \neq \frac{١}{١٢}$ أي أن : حا (ا ب) ≠ حا (ا) حا (ب)

∴ لم يتحقّق شرط الاستقلالية للحادثتين .

∴ ا ، ب حادثتان غير مستقلتين .

تمارين ومسائل (٣ − ٣)

[١] إذا كان : حا ($\bar{ا}$ | ب) = ٠,٤ ، حا (ب) = ٠,٨ . فأوجد حا (ا ب) ؟

[٢] إذا كانت ا ، ب حادثتين مستقلتين ، حا (ا) = $\frac{١}{٢}$ ، حا (ا ∪ ب) = $\frac{٢}{٣}$.

فأوجد : ١) حا (ب) . ٢) حا (ا | ب) . ٣) حا ($\bar{ب}$ | ا) .

[٣] برهن أن : حا ($\bar{ا}$ | ب) = ١ − حا (ا | ب) .

[٤] صندوق فيه ١٦ مصباحاً من بينها ٤ مصابيح غير سليمة ، سُحبت ٣ مصابيح – عشوائياً – من الصندوق واحد تلو الآخر ، فما احتمال أن تكون الثلاثة المصابيح سليمة ؟

[٥] صندوق يحتوي على ٧ كرات حمراوات ، ٣ كرات بيضاوات . سُحبت ٣ كرات من الصـنـدوق عشوائيا واحدة تلو الآخر ، فما احتمال أن تكون : الأولى والثانية حمراوان والثالثة بيضاء ؟

[٦] إذا كانت ﺍ ، ب حادثتين مستقلتين فأثبت أن :

١) ﺍ ، $\overline{\text{ب}}$ مستقلتان . ٢) $\overline{\text{ا}}$ ، ب مستقلتان . ٣) $\overline{\text{ا}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ مستقلتان .

[٧] احتمال أن يصيب هشام الهدف = $\frac{١}{٤}$ ، واحتمال أن يصيب محمد الهدف = $\frac{٢}{٥}$ ؛ ما احتمال إصابة الهدف إذا صوّب كلٌّ من هشام ومحمد نحو الهدف في آن واحد ؟

[٨] صندوقان متجانسان يحتوي الأول على ٩ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٩ ، ويحتوي الثاني على ٥ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٥ . اختير صندوق – عشوائياً – وسحبت منه بطاقة – عشوائياً – وإذا كان رقم البطاقة المسحوبة زوجياً ؛ فما احتمال أن تكون من الصندوق الأول ؟

[٩] وجد في إحدى اختبارات الثانوية العامة أن ٢٥٪ من الطلبة قد رسبوا في مادة الرياضيات ، ١٥ ٪ رسبوا في الكيمياء ، ١٠٪ رسبوا في الرياضيات والكيمياء . اختير – عشوائياً – طالب .

فما احتمال أن يكون :

١) راسبا في الرياضيات ، علماً بأنه راسب في الكيمياء .

٢) راسبا في الكيمياء ، علماً بأنه راسب في الرياضيات .

[١٠] ألقي حجـر نـرد ، ولوحـظ الوجـه العلوي الظاهر عند استقـراره على الأرض . فإذا كان :

ﺍ هي حادثة ظهور العدد « ٤ » ، ب هي حادثة ظهور عدد زوجي ،

جـ هي حادثة ظهور عدد أصغر من « ٣ » .

أوجد : ١) حا (ب جـ) . ٢) حا (ﺍ | ب) .

٣) حا (ب | جـ) . ٤) بيِّن أيّاً من الحوادث ﺍ ، ب ، جـ مستقلة مثنى مثنى .

[١١] تسابق ٣ طلاب في الجري هم ﺍ ، ب ، جـ ؛ فإذا كان احتمال فوز ﺍ = $\frac{١}{٢}$ ، واحتمـال فـوز ب = $\frac{١}{٣}$ ، واحتمال فوز جـ = $\frac{١}{٦}$. إذا تسابق الطلاب في الجري مرتين معاً ؛ فأوجد :

١) فضاء العينة للسباق مرتين .

٢) احتمال فوز الطالب « جـ » بالسباق الأول ، « ﺍ » بالسباق الثاني .

[١٢] لدينا ثلاثة صناديق متجانسة ، يحتوي الأول على ٣ كرات حمراوات، ٥ كرات بيضـاوات ، ويحتـوي الثاني على كرتين حمراوين وكره بيضاء ، ويحتوي الثالث على كرتين حمـراوين ، ٣ كرات بيضاوات . اختير صندوق عشـوائياً وسحبت منه – عشوائياً – كرة ، ووجد أن الكرة المسحوبة منه كانت حمـراء . فما احتمال أن تكون تلك الكرة من الصندوق الأول ؟

٣ – ٤ متتاليات التكرارات المستقلة وقانون الاحتمال الثنائي

يصادفنا في الحياة اليومية الكثير من التجارب العشوائية التي تكون نتائجها واحدة من نتيجتين منفصلتين: إمَّا نجاحاً ، أو فشلاً ؛ فإذا رمزنا لاحتمال النجاح بالرمز « ح » ولاحتمال الفشل بالرمز « ف » ،واستناداً إلى مسلمات الاحتمالات وفكرة بناء النموذج الاحتمالي نجد بسهولة أن: ف = ١ – ح. ولنفرض أننا ألقينا قطعة نقود متجانسة « ن » مرة ، ونعتبر أن ملاحظة ظهور الصورة عند استقرارها على الأرض يمثل « نجاحاً » ، وظهور الكتابة يمثل فشلاً ، فإننا نجد أن متتالية نتائج التكرارات « ن » يجب أن تتضمّن « س » نجاحاً ،(ن – س) فشلاً .

ولتكن ا هي حادثة الحصول على « س » نجاحاً ، فإن احتمال أي متتالية من « ا » يجب أن تكون : $ح^{س} \times ف^{ن-س}$ لأن الحادثة «ا» تتكون من المتتاليات ح ، ف التي تحتوي على « س » نجاحاً ، (ن – س) فشلاً ، ويتطلب حساب حا (ا) ، معرفة جميع المتتاليات المختلفة التي تحتوي على « س » نجاحاً ؛ ومن معرفتنا للتوافيق نجد أن عدد هذه المتتاليات هي باختصار $^{ن}ق_{س}$.

وبذلك تصبح : $حا(ا) = {}^{ن}ق_{س} \times ح^{س} \times ف^{ن-س}$ .... (١)

وهو احتمال وقوع الحادثة «ا» من النجاحات « س » في « ن » من المحاولات المكررة وبالتالي تصبح العلاقة (١) كالتالي:

$$حا\left(\{س\}\right) = {}^{ن}ق_{س} \times ح^{س} \times ف^{ن-س} = {}^{ن}ق_{س} \times ح^{س} \times (١-ح)^{ن-س}$$

ويطلق على هذه العلاقة اسم قانون الاحتمال الثنائي (أو توزيع ذي الحدين) .

حيث ن عدد المحاولات (عدد المرات المستقلة لاجراء التجربة) ؛

س : عدد مرات النجاح ،

ح : احتمال النجاح ، واحتمال نجاح واحد على الأقل هو : $١ - ف^{ن}$ ،

ف : احتمال الفشل ، واحتمال الفشل في كل المحاولات هو : $ف^{ن}$.

وعند استخدام هذا القانون في إيجاد احتمال وقوع الحوادث فإنه يجب توفر الشروط التالية :

١) كل محاولة مستقلة تماماً عن أية محاولة أخرى .

٢) احتمال نجاح أو تحقق الحادثة يبقى ثابتاً في جميع المحاولات .

٣) كل محاولة من نوع ذي الحدين (فشل أو نجاح) .

مثال (٣ – ١٣)

أُلقيت قطعة نقود متجانسة ٦ مرات متتالية ، ولوحظ الوجه الظاهر عليها عند استقرارها على الأرض ، أوجد احتمال الحوادث التالية :

١) ظهور صورتين بالضبط .
٢) ظهور أربع صور على الأقل .
٣) عدم ظهور الصورة .
٤) ظهور صورة واحدة على الأقل .

الحـــل :

بما أن التجربة تنطوي على ثنائية إما ظهور صورة أو كتابة ، ومتكررة ست مرات بصورة مستقلة فهي تتبع التوزيع الثنائي ؛ وبما أنَّ قطعة النقود متجانسة ، ونعتبر ظهور الصورة يمثل « نجاحاً » .

$$\therefore\ \text{ن} = ٦ \quad ، \quad \text{ح} = \text{ف} = \frac{١}{٢}$$

١) نفرض أن : أ هي حادثة ظهور صورتين بالضبط (أي س = ٢)
وحيث المطلوب هو حا (س = ٢) = حا (أ) (للتبسيط)

$$\therefore\ \text{حا}(\text{أ}) = {}^{٦}\text{ق}_{٢} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦-٢} = \frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} = ١٥ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦} = \frac{١٥}{٦٤}$$

٢) نفرض أن : ب هي حادثة ظهور أربع صور على الأقل وكلمة على الأقل تشير إلى أن التوزيع هنا متراكم أي س $\geq$ ٤ (أي س = ٤ أو ٥ أو ٦) ، وحيث المطلوب هو حا (س $\geq$ ٤) = حا (ب) .

$$\therefore\ \text{حا}(\text{ب}) = {}^{٦}\text{ق}_{٤} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + {}^{٦}\text{ق}_{٥} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} \times \left(\frac{١}{٢}\right) + {}^{٦}\text{ق}_{٦} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦}$$

$$= {}^{٦}\text{ق}_{٢} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦} + {}^{٦}\text{ق}_{١} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦}\left({}^{٦}\text{ق}_{٢} + {}^{٦}\text{ق}_{١} + ١\right)$$

$$= \frac{١}{٦٤} \times \left(\frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١} + ٦ + ١\right) = \frac{٢٢}{٦٤} = \frac{١١}{٣٢} \ .$$

٣) نفرض أن : جـ هي حادثة عدم ظهور الصورة تكافئ الفشل في جميع الرميات = $\text{ف}^{\text{ن}}$.

$$\therefore\ \text{حا}(\text{جـ}) = \text{ف}^{\text{ن}} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦} = \frac{١}{٦٤} \ .$$

٤) نفرض أن : ء هي حادثة ظهور صورة واحدة على الأقل

$$\therefore\ \text{حا}(\text{ء}) = ١ - \text{حا}(\text{جـ}) \ .$$

$$\therefore\ \text{حا}(\text{ء}) = ١ - \text{ف}^{\text{ن}} = ١ - \frac{١}{٦٤} = \frac{٦٣}{٦٤} \ .$$

مثال (٣ – ١٤)

أطلق صياد ٣ رصاصات على هدف ، فإذا كان احتمال إصابة الهدف هو ٠,٦ ؛ أوجد احتمال :

١) اصابة الهدف ثلاث مرات .
٢) اصابة الهدف مرة واحدة فقط .
٣) عدم اصابة الهدف مرة واحدة فقط .
٤) اصابة الهدف مرتين على الأقل .

الحـــل :

لاحظ أن شروط استخدام قانون الاحتمال الثنائي متوفرة ، ن = ٣ (عدد مرات إجراء المحاولات) .

نفرض أن احتمال النجاح هو إصابة الهدف فيكون :

ح = ٠,٦ ⟸ ف = ١ – ح = ١ – ٠,٦ = ٠,٤ .

١) احتمال اصابة الهدف ثلاث مرات (أي س = ٣) .

∴ حا (س = ٣) = ^{٣}ق$_{٣}$ × (٠,٦)^{٣} × (٠,٤)^{٠} = ١ × (٠,٦)^{٣} × ١ = ٠,٢١٦ .

٢) احتمال اصابة الهدف مرة واحدة فقط(أي س = ١) .

∴ حا (س = ١) = ^{٣}ق$_{١}$ × (٠,٦) × (٠,٤)^{٢} = ٣ × ٠,٦ × ٠,١٦ = ٠,٢٨٨ .

٣) احتمال عدم اصابة الهدف مرة واحدة فقط (أي س = ٢) .

∴ حا (س = ٢) = ^{٣}ق$_{٢}$ × (٠,٦)^{٢} × (٠,٤) = $\frac{٣ \times ٢}{٢ \times ١}$ × ٠,٣٦ × ٠,٤ = ٠,٤٣٢ .

٤) احتمال اصابة الهدف مرتين على الأقل (أي س = ٢ أو ٣).

∴ حا (س ≥ ٢) = ^{٣}ق$_{٢}$ × (٠,٦)^{٢} × (٠,٤) + ^{٣}ق$_{٣}$ × (٠,٦)^{٣} = ٠,٤٣٢ + ٠,٢١٦ = ٠,٦٤٨ .

مثال (٣ – ١٥)

أُلقي حجر نرد ٧ مرات متتالية ، واعتبر أن النجاح هو الحصول على الرقمين ٥ أو ٦ في الرمية الواحدة .

أوجد احتمالات الحوادث التالية :

١) الحصول على الرقمين ٥ أو ٦ ثلاث مرات بالضبط .
٢) عدم الحصول على الرقمين ٥ أو ٦ .
٣) الحصول على الرقمين ٥ أو ٦ مرة واحدة على الأقل .

الحـــل :

∵ ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } للرمية الواحدة .

ن = ٧ ، ح = حا ({ ٥ ، ٦ }) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$.

⇐ ف = ١ − ح = ١ − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$.

١) احتمال الحصول على الرقمين ٥ أو ٦ ثلاث مرات بالضبط (أي س = ٣) .

∴ حا (س = ٣) = $^{٧}\text{ق}_{٣}$ × $(\frac{١}{٣})^{٣}$ × $(\frac{٢}{٣})^{٤}$ = $\frac{٥٦٠}{٢١٨٧}$.

٢) احتمال عدم الحصول على الرقمين ٥ أو ٦ ≡ $\text{ف}^{\text{ن}}$ (الفشل في جميع المحاولات) (أي س = ٠) .

∴ حا (س) = $\text{ف}^{\text{ن}}$ = $(\frac{٢}{٣})^{٧}$ = $\frac{١٢٨}{٢١٨٧}$.

٣) احتمال الحصول على الرقمين ٥ أو ٦ مرة واحدة على الأقل = حا (س) = ١ − $\text{ف}^{\text{ن}}$.

∴ حا (س) = ١ − $\frac{١٢٨}{٢١٨٧}$ = $\frac{٢٠٥٩}{٢١٨٧}$.

مثال (٣ – ١٦)

ليكن احتمال مولود ذكر يساوى $\frac{١}{٢}$ ، واحتمال نوع الطفل مستقل من طفل إلى آخر .

فإذا كان لدى أسرة أربعة أطفال . فما احتمال أن يكون :

١) جميعهم ذكوراً . ٢) واحد منهم على الأقل ذكر .

٣) عدد الذكور يساوي عدد الإناث .

الحـــل :

ن = ٤ أطفال ، ح = ف = $\frac{١}{٢}$

١) نفرض أن : أ هي حادثة أن يكون جميعهم ذكوراً (أي س = ٤) .

∴ حا (أ) = $^{٤}\text{ق}_{٤}$ × $(\frac{١}{٢})^{٤}$ × $(\frac{١}{٢})^{٠}$ = $\frac{١}{١٦}$.

٢) نفرض أن : ب هي حادثة أن يكون واحد من الأطفال على الأقل ذكراً ،

وحيث أن احتمال جميع الأطفال إناث = $\text{ف}^{\text{ن}}$ = $(\frac{١}{٢})^{٤}$ = $\frac{١}{١٦}$.

∴ حا (ب) = ١ – $\text{ف}^{\text{ن}}$ = ١ − $\frac{١}{١٦}$ = $\frac{١٥}{١٦}$.

٣) نفرض أن : جـ هي حادثة عدد الذكور يساوي عدد الإناث (أي س = ٢) .

∴ حا (جـ) = $^{٤}\text{ق}_{٢}$ × $(\frac{١}{٢})^{٢}$ × $(\frac{١}{٢})^{٢}$ = $\frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١}$ × $(\frac{١}{٢})^{٤}$ = $\frac{٣}{٨}$.

تمارين ومسائل (٣ - ٤)

[١] أُلقيت قطعة نقود ٣ مرات متتالية ، ولوحظ الوجه الظاهر عليها عند استقرارها على الأرض ؛ .
أوجد احتمالات الحوادث التالية :

أ) ظهور الصورة ٣ مرات . ب) ظهور الصورة مرتين .

جـ) ظهور الصورة مرة واحدة . د) عدم ظهور الصورة .

[٢] أطلق صياد ٧ رصاصات على هدف ، فإذا كان احتمال إصابة الهدف = $\frac{١}{٤}$ ؛
ما احتمال أن يصيب الصياد الهدف على الأقل مرتين؟

[٣] ليكن احتمال أن يكسب الفريق « أ » في أي مباراة يلعبها $\frac{٢}{٣}$ ، فإذا لعب الفريق « أ » أربع مباريات .
أوجد احتمال أن يكسب الفريق « أ » :

١) مباراتين بالضبط .

٢) مباراة واحدة على الأقل .

٣) أكثر من نصف المباريات .

[٤] أسرة لها ٦ أطفال . ما احتمال أن يكون عدد الأولاد في الأسرة:

١) يساوي عدد البنات .

٢) أقل من عدد البنات .

[٥] إذا كان أحد لاعبي البلياردو يصيب الكرة بمتوسط (احتمال) ٠,٣ ، وحاول هذا اللاعب رمي الكرة أربع مرات ؛ فما احتمال أن يصيب الكرة :

أ) مرتين .

ب) مرة واحدة على الأقل .

[٦] إذا كان احتمال أن يتخرّج طالب التحق بكلية هو ٠,٤ . أوجد احتمال :

أ) ألا يتخرّج أي طالب من بين ٥ طلاب .

ب) أن يتخرج طالب واحد على الأقل من بين ٥ طلاب .

٣ – ٥ السحب مع الإعادة وبدون إعادة

أولاً : السحب مع الإعادة :

السحـب مـع الإعـادة هـو السحـب مـرة أخـرى بعـد إعـادة الشـيء المسحوب في المرة السابقة بحيث لاتتـأثر أي سحبة بالـتي قبلها ، عندئذٍ تصبح الحوادث مستقلة عن بعضها بعضا . وفي هـذه الحالة يمكـن أن نستخدم ما قد درسناه في متتالية التكرارات المستقلة وقانون الاحتمال الثنائي (توزيع ذي الحدين) ، والأمثلة التالية توضِّح ذلك .

مثال (٣ – ١٧)

صندوق يحتوي على ٦ كرات حمراوات ، ٤ كرات بيضاوات ، سُحبت منه – عشوائياً – ٣ كرات مع الإعادة .

احسب احتمال كلٍّ من الحوادث التالية :

١) الثلاث الكرات المسحوبة حمراوات .

٢) كرة واحدة حمراء .

٣) كرة واحدة على الأقل بيضاء .

الحـــل : مجموع الكرات في الصندوق = ٦ + ٤ = ١٠ كرات .

نفرض أن : أ هي حادثة سحب كرة حمراء ∴ حا (أ) = $\frac{٦}{١٠}$ = ٠,٦

وإذا إعتبرنا أن : ح = حا (أ) = ٠,٦ ⟸ ف = ١ – ح = ١ – ٠,٦ = ٠,٤ ، وحيث أن السحب من الصندوق هو ٣ كرات ⟸ ى = ٣ .

١) نفرض أن : ب هي حادثـة الكرات الثلاث المسحوبة حمراوات (أي س = ٣) .

∴ حا (ب) = $ق^{٣}_{٣}$ × $(٠,٦)^{٣}$ × $(٠,٤)^{٠}$ = ١ × ٠,٢١٦ × ١ = ٠,٢١٦ .

٢) نفرض أن : جـ هي حادثة سحب كرة واحدة حمراء (أي س = ١) .

∴ حا (جـ) = $ق^{٣}_{١}$ × (٠,٦) × $(٠,٤)^{٢}$ = ٣ × ٠,٦ × ٠,١٦ = ٠,٢٨٨ .

٣) نفرض أن : ى هي حادثة سحب كرة واحدة على الأقل بيضاء .

∴ حا (ى) = ١ – حا (جميعهم حمراوات)

= ١ – حا (س = ٣)

= ١ – ٠,٢١٦

= ٠,٧٨٤

مثال (٣ – ١٨)

صندوق به ١٠ كرات حمراوات ، ٥ كرات سوداوات . سحبت منه – عشوائياً – كرتان مع الإعادة .

احسب احتمال كلٍ من الحوادث التالية :

١) الحصول على كرتين حمراوين .

٢) الأولى حمراء والأخرى سوداء .

٣) واحدة حمراء وواحدة سوداء .

٤) الكرتان من لون واحد .

٥) واحدة على الأكثر سوداء .

٦) واحدة على الأقل سوداء .

الحــــل :

نفرض أن : ط هي حادثة سحب كرة حمراء تمثل « نجاحاً » ، وأن ك هي حادثة سحب كرة سوداء .

$\therefore$ ح = حا (ط) = $\frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣}$

$\Leftarrow$ ف = ١ – ح = ١ – $\frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣}$ ، ويمثل احتمال سحب كرة سوداء $\Leftarrow$ حا (ك) = $\frac{١}{٣}$.

١) نفرض أن : أ هي حادثة الحصول على كرتين حمراوين (أي س = ٢) ،

$\therefore$ حا(أ) = $^{٢}ق_{٢} \times (\frac{٢}{٣})^{٢} \times (\frac{١}{٣})^{٠} = ١ \times \frac{٤}{٩} \times ١ = \frac{٤}{٩}$.

٢) نفرض أن : ب هي حادثة سحب الكرة الأولى حمراء والأخرى سوداء ، وعليه يكون : ب = (ط ، ك) .

$\therefore$ حا (ب) = حا (ط) × حا (ك) = $\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٩}$.

٣) نفرض أن : جـ هي حادثة سحب كرة واحدة حمراء وواحدة سوداء تكافئ سحب الكرتين من لونين مختلفين.

وعليه يكون : جـ = (ط ، ك) أو (ك ، ط)

$\therefore$ حا (جـ) = حا (ط) × حا (ك) + حا (ك) × حا (ط) = $\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٩}$.

٤) نفرض أن : ء هي حادثة سحب الكرتين من لون واحد تكافئ إمَّا الكرتين حمراوين ، أو الكرتين سوداوين.

وعليه يكون : ء = (ط ، ط) أو (ك ، ك)

$\therefore$ حا (ء) = حا (ط) × حا (ط) + حا (ك) × حا (ك) = $\frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} = \frac{٤}{٩} + \frac{١}{٩} = \frac{٥}{٩}$

٥) نفرض أن : هـ هي حادثة سحب فيها على الأكثر كرة سوداء (أي س = ١ أو ٢)

$\therefore$ حا (هـ) = $^{٢}ق_{١} \times (\frac{٢}{٣}) \times (\frac{١}{٣}) + {}^{٢}ق_{٢} \times (\frac{٢}{٣})^{٢} \times (\frac{١}{٣})^{٠} = \frac{٤}{٩} + \frac{٤}{٩} = \frac{٨}{٩}$.

٦) نفرض أن : و هي حادثة سحب كرة واحدة على الأقل سوداء تكافئ إمَّا أن نحصل على كرة واحدة سوداء (أي س = ١) أو نحصل على كرتين سوداوين (أي س = ٠) وعليه يكون :

حا (و) = $^{٢}ق_{١} \times (\frac{٢}{٣})(\frac{١}{٣}) + {}^{٢}ق_{٠} \times (\frac{٢}{٣})^{٠}(\frac{١}{٣})^{٢}$

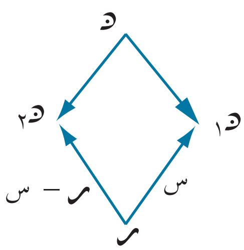
$= ٢ \times \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٣} + ١ \times ١ \times \frac{١}{٩} = \frac{٤}{٩} + \frac{١}{٩} = \frac{٥}{٩}$.

ثانياً : السحب بدون الإعادة :

السحب بدون إعادة هو السحب مرة أخرى بدون إعادة الشيء المسحوب وبذلك تصبح كل سحبة متأثرة بالتي قبلها ؛ وعندئذٍ تصبح الحوادث غير مستقلة عن بعضها . في هذه الحالة لايمكن أن نستخدم ما قد درسناه في متتالية التكرارات المستقلة وقانون الاحتمال الثنائي ، وإنّما نبحث عن قانون آخر نستخدمه في حالة السحب بدون إعـــادة وقبـل أن نستنتج هذا القانون نقدِّم الآتي :

نفرض أنّ لدينا صندوقاً يحتوي على « $ن$ » شيئاً منها $ن_١$ من النوع الأول، $ن_٢ = ن - ن_١$ من النوع الثاني، وإذا سحبنا – عشوائياً – وبدون إعادة « $ر$ » شيئاً . فما هو احتمال الحصول على « $س$ » شيئاً من النوع « الأول »؟

ولحساب هذا الاحتمال نوجد :



١) عدد الحالات الممكنة = $^{ن}ق_{ر}$.

٢) عدد الحالات الملائمة = $^{ن_١}ق_{س} \times {}^{ن_٢}ق_{ر-س} = \binom{ن_١}{س}\binom{ن_٢}{ر-س}$

وعليه يكون احتمال الحصول على « $س$ » شيئاً من النوع $ن_١$ هو :

$$ح(س) = \frac{^{ن_١}ق_{س} \times {}^{ن_٢}ق_{ر-س}}{^{ن}ق_{ر}}$$.

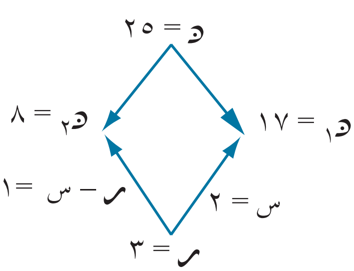
شكل (٣ – ٤)

وهو قانون السحب بدون إعـادة، ويمكن كتابة هذا القانون هندسياً بطريقة المعين كما في [الشكل (٣– ٤)].

مثال (٣ – ١٩)

صـنـدوق يحتوي على ٢٥ كرة ، منها ١٧ حمراوات ، ٨ بيضاوات . سحبت من الصندوق – عشوائياً – ٣ كرات معاً بدون إعادة . فما احتمال أن تكون كرتان منها حمراوين ؟

الحـــل :



من الشكل (٣ – ٥) :

نفرض أن : أ هي حادثة سحب كرتين حمراوين :

شكل (٣ – ٥)

$$\therefore ح(س = ٢) = ح(أ) = \frac{^{١٧}ق_{٢} \times {}^{٨}ق_{١}}{^{٢٥}ق_{٣}} = \frac{١٠٨٨}{٢٣٠٠} = ٠,٤٧٣٠$$.

مثال (٣ – ٢٠)

صندوق يحتوي على ٣ كرات بيضاوات وكرتين حمراوين ؛ سُحبت – عشوائياً – كرتان ، دون إعادة .

احسب احتمال أن تكون :

١) الأولى بيضاء والأخرى حمراء .　　　　٢) أحداهما بيضاء والأخرى حمراء .

الحــــل :

١) نفرض أن : أ هي حادثة سحب كرتين الأولى بيضاء والأخرى حمراء .

$$\therefore \text{ح}(\text{أ}) = \frac{٣}{٥} \times \frac{٢}{٤} = \frac{٣}{١٠} \ .$$

٢) نفرض أن : ب هي حادثة سحب كرتين أحدهما بيضاء والأخرى حمراء .

$$\therefore \text{ح}(\text{ب}) = \frac{{}^{٣}\text{ق}_{١} \times {}^{٢}\text{ق}_{١}}{{}^{٥}\text{ق}_{٢}} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥} \ .$$

تمارين ومسائل (٣–٥)

[١] صندوق يحتوي على ١٠ كرات حمراوات ، ٥ كرات سوداوات ، سُحبت – عشوائياً – كرتان من الصندوق :

ولتكن الحادثة أ : هي الحصول على كرتين حمراوين ، الحادثة ب : هي الأولى حمراء والأخرى سوداء،

الحادثة جـ : هي واحدة حمراء وأخرى سوداء .

احسب احتمال كلٍّ من الحوادث أ ، ب ، جـ في كلٍ من الحالتين التاليتين :

١) مع الإعادة .

٢) بدون إعادة .

[٢] صندوق يحتوي على ١٥ مصباح منها ٥ مصابيح غير سليمة ، سُحبت – عشوائياً – ٣ مصابيح ، والحادثتان أ ، ب معرفتان كالتالي :

أ : المصابيح الثلاثة سليمة ، ب : فقط مصباحاً واحداً غير سليم .

احسب احتمال كل من الحادثتين أ ، ب في الحالتين التاليتين :

١) السحب مع الإعادة .　　　　٢) السحب بدون إعادة .

[٣] صندوق يحتوي على ٩ كرات متجانسة ، منها ٥ كرات بيضاوات والباقي سوداوات سُحبت – عشوائياً – ٣ كرات من الصندوق . ما احتمال أن تكون كرة سوداء وكرتان بيضاوين ؟

[٤] لدينا ٥٢ ورقة من ورق اللعب العادي. سُحبت من بينها ورقتان – عشوائياً – أوجد :

١) عدد الحالات الممكنة لسحب هاتين الورقتين .

٢) احتمال أن تكون الورقتان أحداهما بنت والأخرى عشرة .

[٥] صنـــدوق يحتـــوي على ٦ كرات بيضاوات ، ٩ كرات سوداوات . سُحبت – عشوائياً – ٣ كرات من الصندوق . لتكن الحادثتان أ ، ب على النحو التالي :

أ : الكرات المسحوبة من نفس اللون .

ب : إحدى الكرات المسحوبة سوداء .

احسب احتمال كلٍ من الحادثتين أ ، ب في كل من الحالتين التاليتين :

١) مع الإعادة .

٢) بدون إعادة .

[٦] أخذت ٣ فئران من مجموعة مكوَّنة من ٥ فئران بيضاء اللون ، ٤ بنيَّة اللَّون لاستخدامها في تجربة معينة .

احسب احتمال كلٍّ من الحوادث التالية :

أ : جميع الفئران المختارة بيضاء اللون .

ب : جميع الفئران المختارة بنية اللون .

جـ : فأر لونه بني وفأران لونهما أبيض .

[٧] وجد أن مجلس إحدى الإدارات التعليمية يتكوَّن من ٩ أشخاص ذكور ، ٥ إناث . اختير من بينهم شخصان لتمثيل الإدارة . احسب احتمال أن يكون :

١) كلٌّ من الشخصين المختارين ذكراً .

٢) أحد الشخصين المختارين على الأقل ذكراً .

٣) أحد الشخصين المختارين ذكراً ، والآخر أنثى .

[٨] صندوق يحتوي على ٦ كرات حمراء ، ٥ كرات بيضاء ، ٣ كرات صفــراء ، سُحبــت – عشوائياً – كرتان ما احتمال أن تكونا :

١) من نفس اللون .

٢) من لونين مختلفين .

[٩] وجد أن مجلس إدارة أحد البنوك يتكون من ١٠ أعضاء من صنعاء ، ٩ أعضاء من تعز ، ٦ أعضاء من عدن .

أختير – عشوائيا – ٣ أعضاء لتمثيل البنك .

ما احتمال أن يكونوا :

١) من المحافظات الثلاث .

٢) من عدن أو صنعاء .

٣) من صنعاء وتعز .

[١٠] سُحبت ورقتان – عشوائياً – من بين ١٠ ورقات مرقمة من ١ إلى ١٠ .

ما احتمال أن يكون مجموعهما فردياً إذا تم سحب الورقتين ورقة تلو الأخرى في الحالتين التاليتين:

١) مع الإعادة .

٢) بدون إعادة .

[١١] سحبت بطاقتان عشوائياً من بين ٢٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٢٠ .

ما احتمال أن يكون مجموع العددين على البطاقتين المسحوبتين فردياً في كل من الحالتين التاليتين :

أولاً : مع الإعادة .

ثانياً : بدون إعادة .

[١٢] إذا استخدمت أرقام المجموعة سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ } في كتابة عدد مكوّن من خمسة أرقام مختلفة . احسب احتمال أن يكون العدد:

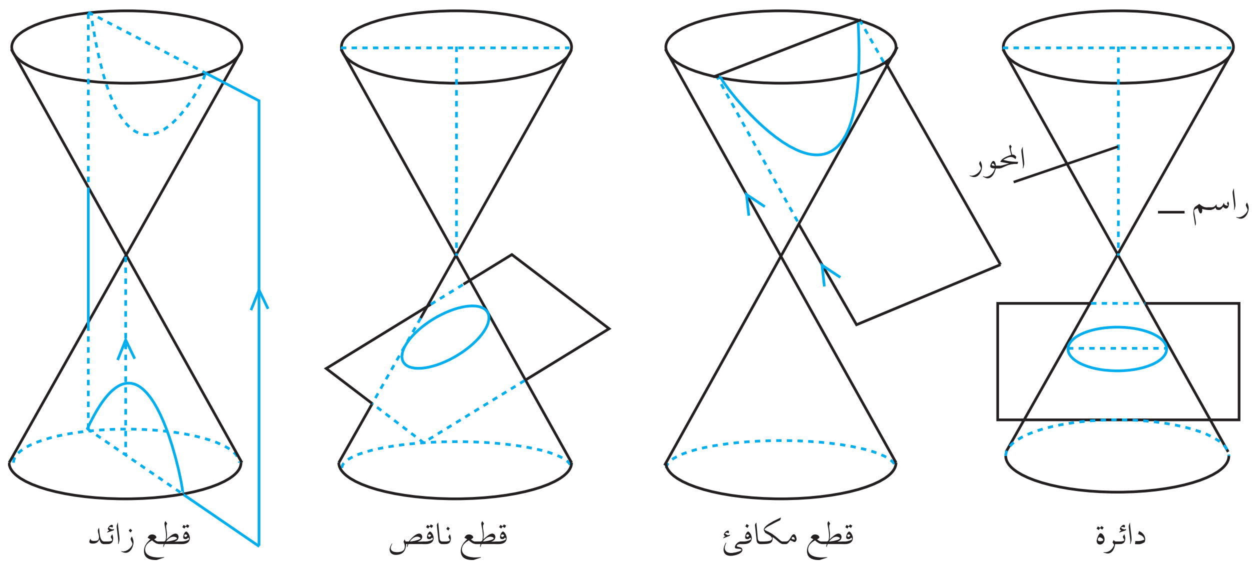
١) فردياً .

٢) زوجياً .

٣) قابلاً القسمة على (٥) .

٤ – ١ تمهيـــد

سميت كل من الدائرة ، القطع المكافئ ، القطع الناقص والقطع الزائد قطوع مخروطية لانها ناتجة عن تقاطع مستوى مع مخروط دائري قائم مزدوج شكل (٤ – ١) .



دائرة (أ)   قطع مكافئ (ب)   قطع ناقص (جـ)   قطع زائد (د)

شكل (٤ – ١)

ويكون :

١ – منحنى التقاطع دائرة عندما يكون المستوى القاطع عمودياً على المحور .

٢ – منحنى التقاطع قطعاً مكافئاً عندما يكون المستوى القاطع موازياً لأحد رواسم المخروط .

٣ –منحنى التقاطع قطعاً ناقصاً عندما يكون المستوى القاطع مائلاً على المحور ولا يوازي أي راسم من رواسم المخروط .

٤ – منحنى التقاطع قطعاً زائداً عندما يكون المستوى القاطع موازياً لمحور المخروط .

وسندرس في هذه الوحدة القطوع الثلاثة الأخيرة في نظام الإحداثيات الكارتزية المتعامدة ، ولأنك سبق أن درست معادلة الدائرة القياسية ، وهي :

$$(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = نق^{٢} \quad .$$

ومنها يمكن تحديد احداثي مركز الدائرة م (أ ، ب) وطول نصف قطرها نق ؛ وهي معادلة من الدرجة الثانية ، وبفك الأقواس وجمع الحدود المتشابهة نحصل على الصورة العامة لمعادلة دائرة ، وهي :

$$س^{٢} + ص^{٢} - ٢أس - ٢ب ص + جـ = ٠ \quad .$$

وعليه فإن المجموعة $\{(س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} - ٢أس - ٢ب ص + جـ = ٠ ، س ، ص \in ح\}$.
يمكن أن تكون خالية أو نقطة أو دائرة اعتماداً على المقدار $أ^{٢} + ب^{٢} - جـ$ سالباً أو مساوياً للصفر أو موجباً .
وفي الحالة الاخيرة تكون النقطة م (أ ، ب) مركز الدائرة ، وطول نصف قطرها $نق = \sqrt{أ^{٢} + ب^{٢} - جـ}$.
وانطلاقاً من هذا سنوجد معادلة القطوع المخروطية المتبقية على أساس أنها عبارة عن معادلات من الدرجة الثانية وسنتعرف على شكل منحنياتها .

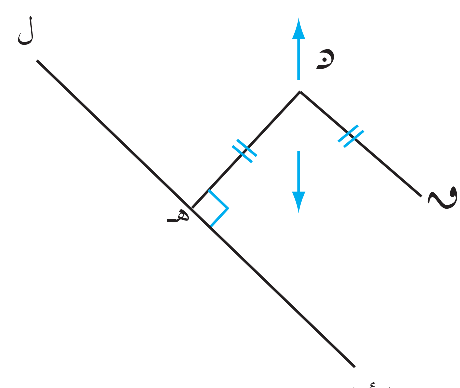
فمثلاً المعادلات :

$$ص^{٢} + أس = ٠ \quad ، \quad ٢س^{٢} + ص^{٢} = ب^{٢} \quad ، \quad ٤ص^{٢} - س^{٢} = أ^{٢} .$$

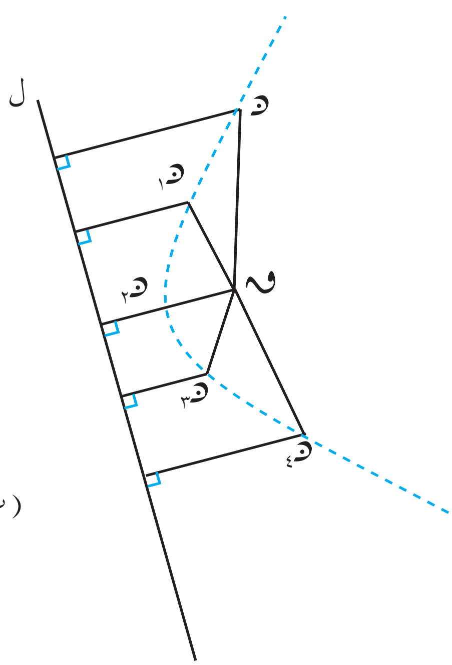
عبارة عن معادلات من الدرجة الثانية ولكنها لاتمثل دائرة لان معاملي $س^{٢}$ ، $ص^{٢}$ غير متساويين .

٤ – ٢ القطــــع المكافــئ

في الشكل (٤ – ٢ أ) إذا فرضنا و نقطة ثابتة ، ل مستقيماً ثابتاً ، وتحركت النقطة د في مستواهما بحيث يكون بعدها عن و مساوياً بعدها عن $\overleftrightarrow{ل}$ ، فإن د ترسم منحنياً كما في الشكل (٤ – ٢ ب) يسمى قطعاً مكافئاً .



(أ)

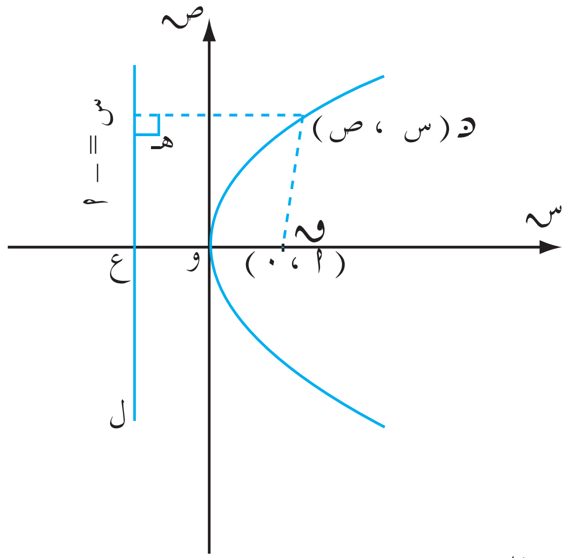


(ب)

شكل (٤ – ٢)

تعريف (٤ – ١)

القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي بُعدها عن نقطة ثابتة يساوى بُعدها عن مستقيم ثابت . تُسمّى النقطة الثابتة بؤرة القطع المكافئ ويسمّى المستقيم الثابت دليل القطع المكافئ .



شكل (٤ – ٣)

معادلة القطع المكافئ :

ليكن س و ص هو مستوى الإحداثيات المتعامدة ، ولتكن ق بؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات الموجب ، والدليل ل↔ يوازي محور الصادات وأن | ع ق | = ٢ أ (بُعد البؤرة عن الدليل) .

فتكون البؤرة ق (أ ، ٠) ومعادلة الدليل س = – أ ، [الشكل (٤ – ٣)] .

فإذا كانت د (س ، ص) أيّ نقطة على القطع المكافئ ، فإن :

بُعدها عن الدليل : | د هـ | = | س + أ |

وبُعدها عن البورة : | د ق | = $\sqrt{}$(س – أ)^{٢} + ص^{٢} .

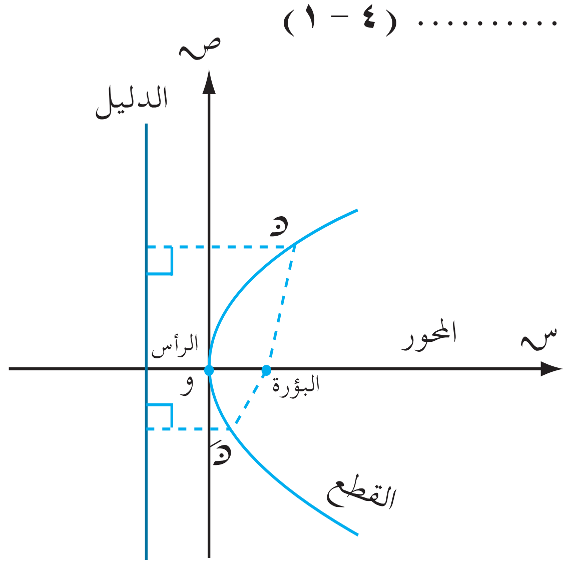
∴ $\sqrt{}$(س – أ)^{٢} + ص^{٢} = | س + أ | . [تعريف (٤ – ١)]

وبتربيع الطرفين نجد :

س^{٢} – ٢ أ س + أ^{٢} + ص^{٢} = س^{٢} + ٢ أ س + أ^{٢} .

وبعد الاختصار نحصل على :

ص^{٢} = ٤ أ س ، أ > ٠	.... (٤ – ١)



شكل (٤ – ٤)

تعريف (٤ – ٢)

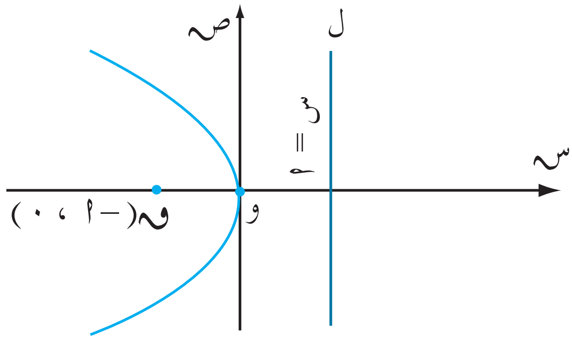
المستقيم الذي يمر بالبؤرة وعمودياً على الدليل يسمّى محور تماثل القطع ، أو باختصار محور القطع ، وتسمّى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محوره رأس القطع (أو ذروته) ، وهي تنصف المسافة بين البؤرة والدليل .

كما هو موضح في شكل (٤ – ٤) .

فالمعادلة (٤ – ١) هي معادلة قطع مكافئ تقع بؤرته في النقطة (أ ، ٠) ، ومعادلة دليله هي س = – أ ، ومحوره هو محور السينات ورأس القطع هي نقطة الاصل .

وإذا بادلنا موضعي البؤرة والدليل فإن معادلة القطع تتغير تبعاً لذلك ويمكن أن تأخذ الصور التالية التي يمكن استنتاجها بسهولة من التعريف :

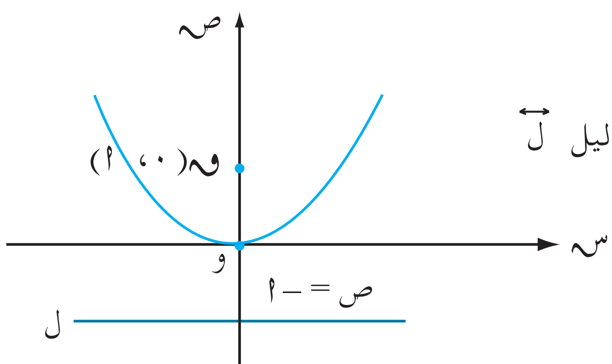
١) عندما تكون بؤرة القطع هي ب (–أ ، ٠) ، الدليل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ معادلته س = أ كما في [شكل (٤ – ٥)] ورأس القطع هي نقطة الاصل ، فإن معادلة القطع هي :



شكل (٤ – ٥)

ص^{٢} = –٤ أ س ، أ > ٠	... (٤ – ٢)

٢) عندما تكون البؤرة هي ب (٠ ، أ) ومعادلة الدليل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ هي ص = – أ ورأسه نقطة الأصل ، فإن معادلة القطع هي :

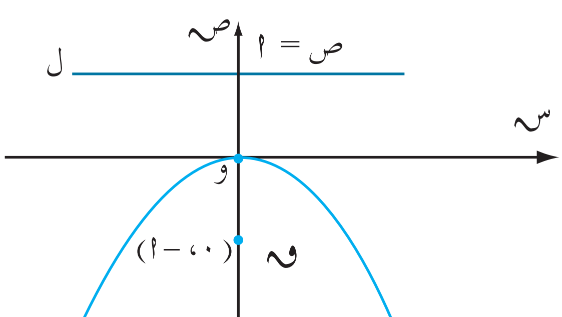


شكل (٤ – ٦)

س^{٢} = ٤ أ ص ، أ > ٠	... (٤ – ٣)

ومحور الصادات هو محور تماثله [شكل (٤ – ٦)] .

٣) كذلك إذا كانت البؤرة ب (٠ ، –أ) ومعادلة الدليل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ هي ص = أ ورأسه نقطة الأصل [شكل (٤ – ٧)] فإن معادلة القطع هي:



شكل (٤ – ٧)

س^{٢} = – ٤ أ ص ، أ > ٠	... (٤ – ٤)

ملاحظة : تُسمى المعادلات من(٤ – ١) إلى (٤ – ٤) بالمعادلات القياسية للقطع المكافئ .

وبمقارنة الصور المختلفة لمعادلة القطع المكافئ والأشكال البيانية المرافقة لها نلاحظ أنه إذا أخذت معادلة القطع الصورة : ص^{٢} = ± ٤ أ س ، تكون فتحة القطع وفق الاتجاه الموجب (اليمين) أو الاتجاه السالب (اليسار) لمحور السينات تبعاً لإشارة المقدار ٤ أ س موجبة أو سالبة [انظر الشكلين (٤ – ٣) و(٤ – ٥)] .

وإذا أخذت معادلة القطع المكافئ الصورة س^{٢} = ± ٤ أ ص تكون فتحته وفق الاتجاه الموجب(أعلى) أو الاتجاه السالب (أسفل) لمحور الصادات تبعاً لإشارة المقدار ٤ أ ص موجبة أو سالبة [انظر الشكلين (٤–٦) و (٤ –٧)].

مثال (٤ – ١)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته (٠ ، ٣) ، ثم مثله بيانياً .

الحـــل :

بما أن بؤرة القطع هي (٠ ، ٣) ورأســه نقطة الأصــل ،

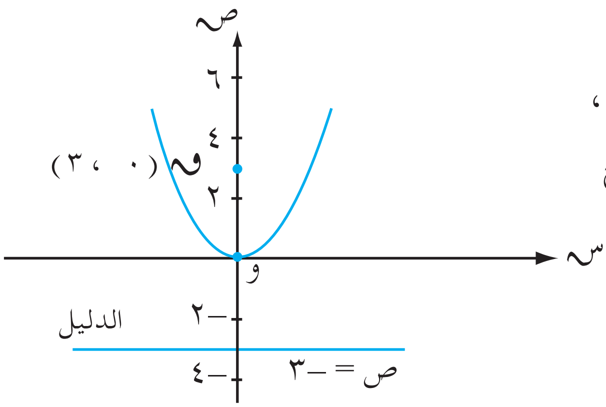
فإن محوره هو محــور الصادات، لذلك فالقطع مفتوح

إلى أعلى وتكون معادلته على الصورة :

$س^{٢} = ٤ أ ص$ ، $\because$ أ = ٣ .

إذن المعادلة هي $س^{٢} = ١٢ ص$.

[شكل (٤ – ٨)] .



شكل (٤ – ٨)

مثال (٤ – ٢)

عيّن البؤرة والدليل للقطع المكافئ : $ص^{٢} = -٦ س$ ، ثم مثّله بيانياً .

الحـــل :

المعادلة على الصورة : $ص^{٢} = -٤ أ س$

وبالمقارنة نجد أن :

$-٤ أ = -٦$

$\therefore أ = \frac{٣}{٢}$

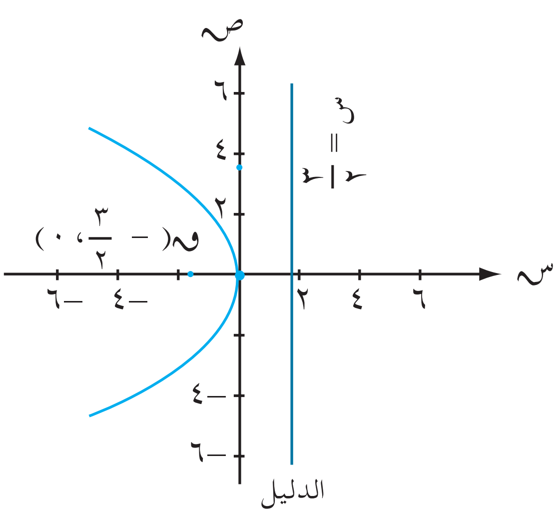
إذن رأس القطع هي نقطة الأصل ومحوره هو

محور السينات .

القطع مفتوح إلى اليسار ، تكون البؤرة النقطة

$(-\frac{٣}{٢} ، ٠)$ والدليل هـو المستقيم

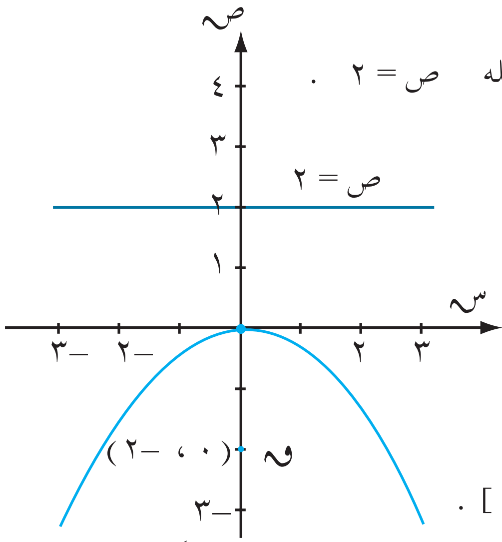
$س = \frac{٣}{٢}$ [شكل (٤ – ٩)] .



شكل (٤ – ٩)

مثال (٤ – ٣)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $ص = ٢$.



شكل (٤ – ١٠)

الحـــل :

بما أن $ص = ٢$ ، ورأس القطع (٠ ، ٠) فالقطع في وضع قياسي . إذن الدليل موازٍ محور السينات ، وعليه فإن محور القطع المكافئ هو محور الصادات ، والبؤرة هي النقطة (٠ ، –٢) ، $أ = ٢$.

معادلته من الشكل $س^{٢} = -٤ أ ص$

∴ المعادلة المطلوبة : $س^{٢} = -٨ ص$ ، [شكل (٤ – ١٠)] .

مثال (٤ – ٤)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومحوره هو محور السينات ويمر بالنقطة (٢ ، ٣) .

الحـــل :

معادلة القطع المكافئ على الصورة : $ص^{٢} = ٤ أ س$

بما أن النقطة (٢ ، ٣) ، تقع على القطع فهي تحقق معادلته .

∴ $٩ = ٨ أ$ $\Leftarrow$ $أ = \frac{٩}{٨}$.

إذن المعادلة هي : $ص^{٢} = ٤ (\frac{٩}{٨}) س$ $\Leftarrow$ $ص^{٢} = \frac{٩}{٢} س$.

مثال (٤ – ٥)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٣ ، ٢) ، ومعادلة دليله $س = -٤$.

الحـــل :

∵ البؤرة (٣ ، ٢) ، ∴ القطع في وضع غير قياسي وبالتالي نستخدم التعريف .

لتكن (س ، ص) نقطة على القطع المكافئ :

∴ بُعدها عن البؤرة $= \sqrt{(س - ٣)^{٢} + (ص - ٢)^{٢}}$.

وبُعدها عن الدليل $= \frac{| س + ٤ |}{\sqrt{١^{٢} + (٠)^{٢}}} = | س + ٤ |$ (بُعد نقطة عن مستقيم) .

∴ $\sqrt{(س - ٣)^{٢} + (ص - ٢)^{٢}} = | س + ٤ |$.

$\Leftarrow$ $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = (س + ٤)^{٢}$

$\Leftarrow$ $س^{٢} - ٦ س + ٩ + ص^{٢} - ٤ ص + ٤ = س^{٢} + ٨ س + ١٦$

$\Leftarrow$ $ص^{٢} - ٤ ص - ١٤ س - ٣ = ٠$ وهي المعادلة المطلوبة .

تمارين ومسائل (٤ – ٢)

[١] أوجد معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الشروط الآتية :

أ) الرأس (٠ ، ٠) ، البؤرة (٠ ، ٦) .   ب) الرأس (٠ ، ٠)، والبؤرة (–٣ ، ٠) .

جـ) الرأس (٠ ، ٠) ، ومعادلة الدليل ص = ٢ .   د) البؤرة (٠ ، – $\frac{٥}{٢}$) ، ومعادلة الدليل ص = $\frac{٥}{٢}$

[٢] أوجد إِحداثي البؤرة ومعادلة الدليل ، ثم ارسم القطع المكافئ في الحالات التالية :

أ) ص^{٢} = ٨ س .   ب) س^{٢} = ٦ ص .

جـ) س = ص^{٢} .   د) س^{٢} = –١٠ص .

هـ) ٥ س^{٢} = ٨ ص .   و) $\frac{٤}{٩}$ ص = س^{٢} .

[٣] أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومحوره هو المحور السيني ويمر بالنقطة (–٦ ، ٨) .

[٤] **أثبت أن** النقطة (٣ ، ٣) تقع داخل القطع المكافئ ص^{٢} = ٦ س .

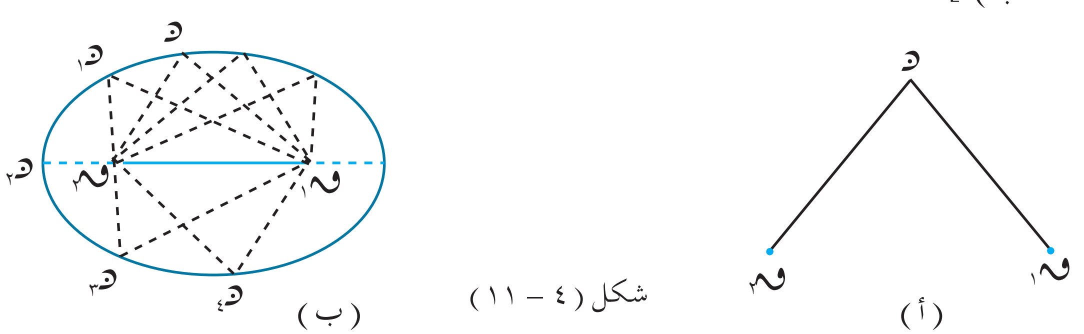
[٥] أوجد معادلات القطوع المكافئة في الحالات التالية :

أ) الدليل س = ٨ ، البؤرة (٢ ، ٢) .

ب) الدليل ص = –٧ ، البؤرة (٢ ، ١) .

٤ – ٣ القطــطـــع النــاقـــص

تأمل الشكل (٤ – ١١أ) : لتكن و$_{١}$ ، و$_{٢}$ نقطتين ثابتتين ، والنقطة د تتحرك في مستوى هاتين النقطتين بحيث يكون |د و$_{١}$| + |د و$_{٢}$| طولاً ثابتاً ، نلاحظ أن د ترسم منحنياً يسمَّى قطعاً ناقصاً [شكل (٤ – ١١ب)] .

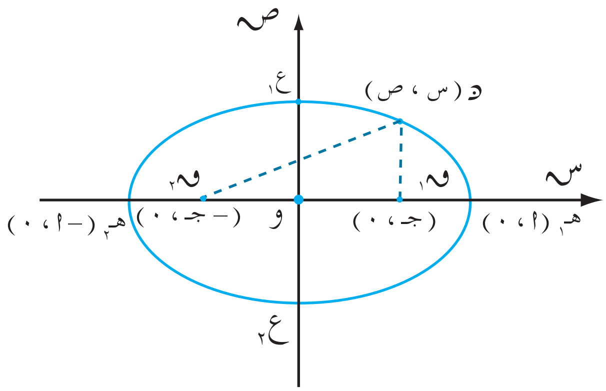


شكل (٤ – ١١)

تعريف (٤ – ٣)

القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي مجموع بُعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوى يساوي طولاً ثابتاً . تُسمّى النقطتان الثابتتان بؤرتي القطع الناقص .

معادلة القطع الناقص :



شكل (٤ – ١٢)

ليكن س و ص مستوى الإحداثيات المتعامدة ، لتكن و_1 ، و_2 بؤرتي القطع، $|\text{و}_1\text{و}_2| = \text{٢جـ}$ ، محور السينات يمر بالنقطتين و_1 ، و_2 ، نقطة الأصل « و »منتصف المسافة بين البؤرتين، وبذلك يكون $\text{و}_1(\text{جـ} ، \text{٠})$ ، $\text{و}_2(-\text{جـ} ، \text{٠})$. [شكل(٤ – ١٢)] .

لتكن د (س ، ص) نقطة على القطع ، فإن : $|\text{د و}_1| + |\text{د و}_2| = \text{٢أ}$ ، حيث ٢أ هو الطول الثابت المعطى ، أ $>$ جـ .

$$|\text{د و}_1| = \sqrt{(\text{س} - \text{جـ})^2 + \text{ص}^2} \quad ، \quad |\text{د و}_2| = \sqrt{(\text{س} + \text{جـ})^2 + \text{ص}^2} \; .$$

$$\therefore \sqrt{(\text{س} - \text{جـ})^2 + \text{ص}^2} + \sqrt{(\text{س} + \text{جـ})^2 + \text{ص}^2} = \text{٢أ}$$

$$\therefore \sqrt{(\text{س} - \text{جـ})^2 + \text{ص}^2} = \text{٢أ} - \sqrt{(\text{س} + \text{جـ})^2 + \text{ص}^2}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على :

$$(\text{س} - \text{جـ})^2 + \text{ص}^2 = \text{٤أ}^2 - \text{٤أ}\sqrt{(\text{س} + \text{جـ})^2 + \text{ص}^2} + (\text{س} + \text{جـ})^2 + \text{ص}^2$$

$$\Leftarrow \sqrt{(\text{س} + \text{جـ})^2 + \text{ص}^2} = (\text{أ} + \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}\,\text{س})$$

وبتربيع الطرفين مرة أخرى نجد أن :

$$(\text{س} + \text{جـ})^2 + \text{ص}^2 = \text{أ}^2 + \text{٢ جـ س} + \frac{\text{جـ}^2}{\text{أ}^2}\,\text{س}^2$$

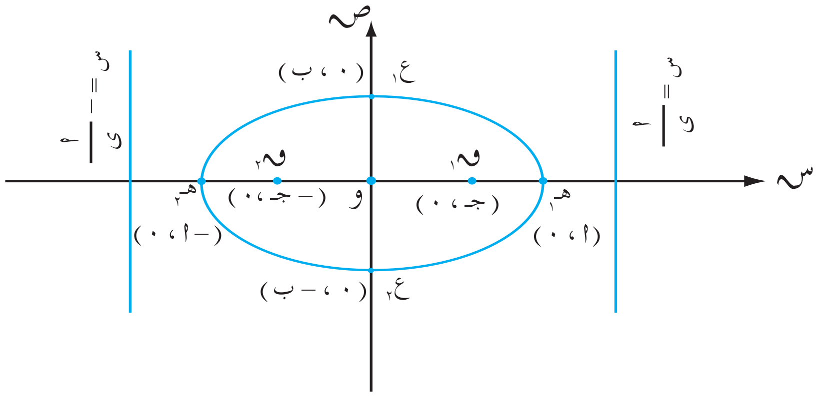
$$\Leftarrow \text{ص}^2 + \left(\frac{\text{أ}^2 - \text{جـ}^2}{\text{أ}^2}\right)\text{س}^2 = (\text{أ}^2 - \text{جـ}^2) \quad \Leftarrow \quad \frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2 - \text{جـ}^2} = ١$$

وللتبسيط نضع $\text{أ}^2 - \text{جـ}^2 = \text{ب}^2$ ، حيث أ $>$ جـ ، فتكون معادلة القطع الناقص هي :

$$\boxed{\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = ١} \qquad \text{..........} \; (\text{٤} - \text{٥})$$

يطلق على المعادلة (٤ – ٥) الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص .

[أنظر شكل (٤ – ١٣)]



شكل (٤ – ١٣)

تعريف (٤ – ٤)

١ – تُسمَّى القطعة المستقيمة هـ١ هـ٢ بالمحور الأكبر ، وتُسمى القطعة المستقيمة ع١ ع٢ بالمحور الأصغر .

٢ – النقطتان هـ١ (ا ، ٠) ، هـ٢ (– ا ، ٠) (نقطتا تقاطع القطع الناقص مع محور السينات) تُسميان رأسي القطع .

٣ – تُسمّى النقطة و (نقطة تقاطع محوري القطع) بمركز القطع الناقص .

٤ – يسمَّى العدد ($\frac{جـ}{ا}$) التخالف المركزي ونرمز له بالرمز ى .

٥ – المستقيم الذي معادلته س = $\frac{ا}{ى}$ يُسمّى دليل القطع المرافق للبؤرة و١ ، والمستقيم س = – $\frac{ا}{ى}$ دليل القطع المرافق للبؤرة و٢ ، والاثنان يُسميان دليلي القطع الناقص .

ملاحظات :

في معادلة القطع الناقص $\frac{س^2}{ا^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ ، [انظر شكل (٤ – ١٣)] تلاحظ أن :

١ – إذا استبدلنا (س) بـ(– س) فمعادلة القطع لاتتغير ، أي أن القطع الناقص متماثل حول محور السينات .
كذلك القطع الناقص متماثل حول محور الصادات .

٢ – طول المحور الاكبر يساوى ٢ ا وطول المحور الاصغر يساوي ٢ ب .

٣ – التخالف المركزي ى = $\frac{جـ}{ا} = \sqrt{١ - \frac{ب^2}{ا^2}}$ حيث ى < ١ .

٤ – بؤرتا القطع الناقص هما (± ا ى ، ٠) = (± جـ ، ٠) .

٥ – معادلتا دليلي القطع الناقص س = ± $\frac{ا^2}{جـ}$ = ± $\frac{ا}{ى}$.

وإذا أخذنا محور الصادات ماراً ببؤرتي القطع ،
فعندئذ تكون هاتان البؤرتان هما $و_١$ (٠ ، جـ) ،
$و_٢$ (٠ ، – جـ) وتصبح معادلة القطع هي :

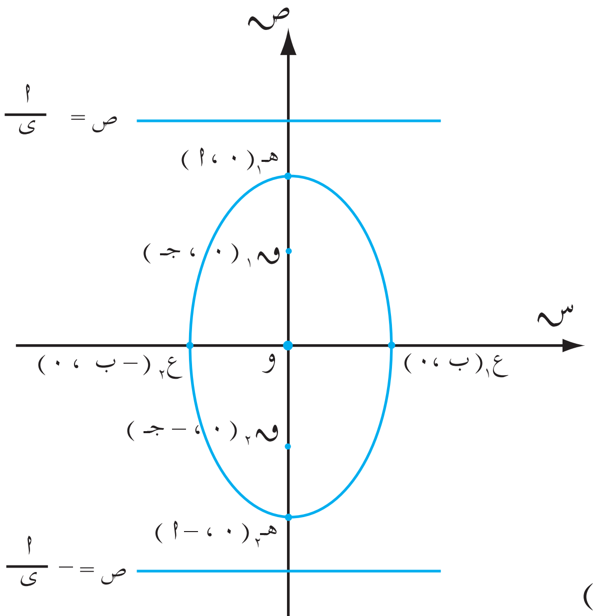
$$\boxed{\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١} \quad .... (٤-٦)$$

حيث $ب^٢ = أ^٢ - جـ^٢$ ، أ > ب .

فإن القطع الناقص كما في [شكل (٤ – ١٤)] ،
أي أن المحور الأكبر على محور الصادات والمحور
الأصغر على محور السينات ، وأن رأسي القطع هما
النقطتين (٠ ، أ) ، (٠ ، – أ)، ومعادلتي دليليه هما

$ص = \pm \frac{أ}{ى} = \pm \frac{أ^٢}{جـ}$ ؛ وبؤرتاه هما (٠ ، ± جـ)

ولا تتغير القيمتان جـ ، ى عن السابق .



شكل (٤ – ١٤)

وهكذا نرى أن للقطع الناقص وضعين : الأول كما في شكل (٤–١٣) والآخر كما في شكل (٤–١٤) .

مثال (٤ – ٦)

أوجد طولي محوري القطع الناقص الذي معادلته :

$١٦س^٢ + ٢٥ص^٢ = ٤٠٠$ ، ثم أوجد تخالفه المركزي وإحداثيات بؤرتيه ورأسيه ومعادلتي دليليه .

الحـــل : $١٦س^٢ + ٢٥ ص^٢ = ٤٠٠ \quad \Leftarrow \quad \frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

وهي معادلة على الصورة :

$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ ، حيث أ = ٥ ، ب = ٤ .

$\therefore$ جـ $= \sqrt{أ^٢ - ب^٢} = \sqrt{٢٥ - ١٦} = ٣$

طول المحور الأكبر = ٢ أ = ١٠

طول المحور الأصغر = ٢ ب = ٨

التخالف المركزي ى $= \frac{جـ}{أ} = \frac{٣}{٥}$.

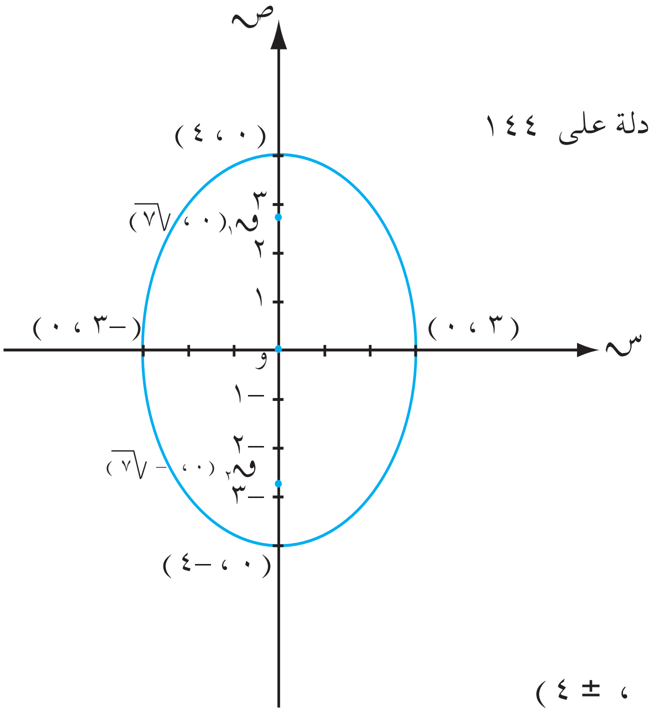
إحداثيات البؤرتين (± جـ ، ٠) هما النقطتان (± ٣ ، ٠) .

إحداثيات الرأسين (± أ ، ٠) هما النقطتان (± ٥ ، ٠) .

معادلتا دليليه : $س = \pm \frac{أ}{ى} \quad \Leftarrow \quad س = \pm \frac{٢٥}{٣}$.

مثال (٤ – ٧)

لتكن $١٦س^٢ + ٩ص^٢ = ١٤٤$ معادلة قطع ناقص ، أوجد طولي محوريه ، وتخالفه المركزي ، وإحداثيات بؤرتيه ورأسيه ، ثم ارسمه .



شكل (٤ – ١٥)

الحـــل :

∵ $١٦س^٢ + ٩ص^٢ = ١٤٤$ ، بقسمة طرفي المعادلة على ١٤٤

نحصل على $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

حيث أ = ٤ ، ب = ٣ ،

∴ جـ = $\sqrt{١٦ - ٩} = \sqrt{٧}$ ، فيكون :

طول المحور الأكبر = ٨

طول المحور الأصغر = ٦

التخالف المركزي ى = $\frac{\sqrt{٧}}{٤}$

البؤرتان هما (٠ ، $\pm \sqrt{٧}$) ، والرأسان هما (٠ ، ± ٤)

منحنى القطع الناقص موضح في [الشكل (٤ – ١٥)] .

مثال (٤ – ٨)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه (± ٥ ، ٠) ، وبؤرتاه (± ٤ ، ٠) .

الحـــل :

إحداثيات البؤرتين (± جـ ، ٠) = (± ٤ ، ٠) ، أي جـ = ٤ .

إحداثيات الرأسين (± أ ، ٠) = (± ٥ ، ٠) ، أي أ = ٥ .

الآن $جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$ ⟸ $ب^٢ = أ^٢ - جـ^٢ = ٢٥ - ١٦ = ٩$ ، وتكون معادلة القطع الناقص هي :

$\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$ أو $٩س^٢ + ٢٥ص^٢ = ٢٢٥$.

مثال (٤ – ٩)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٠ ، ± ٤) وتخالفه المركزي $\frac{١}{٣}$.

الحـــل :

إحداثيات البؤرتين (٠ ، ± ٤) ، أي جـ = ٤ التخالف المركزي ى = $\frac{جـ}{أ}$ ،

$\therefore$ أ $= \frac{جـ}{ى} = \frac{٤}{(\frac{١}{٣})} = ١٢$.

أيضاً $ب^٢ = أ^٢ - جـ^٢ = ١٤٤ - ١٦ = ١٢٨$.

معادلة القطع الناقص هي :

$$\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١ \quad \Leftarrow \quad \frac{س^٢}{١٢٨} + \frac{ص^٢}{١٤٤} = ١ \quad .$$

مثال (٤ - ١٠)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي محوراه هما محورا الإحداثيات ويمر القطع بالنقطتين (٦ ، ٢) ،(−٤ ، ٣) .

الحــــل :

بما أن محوري القطع هما محورا الإحداثيات ، فإن معادلته تكتب بإحدى الصورتين القياسيتين للقطع الناقص ولتكن :

$$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$$

وبما أن القطع يمر بالنقطة (٦ ، ٢) ؛ فهي تحقق معادلته ، أي أن :

$$\frac{٣٦}{أ^٢} + \frac{٤}{ب^٢} = ١ \quad \Leftarrow \quad \frac{١}{ب^٢} = \left(\frac{١}{٤} - \frac{٩}{أ^٢}\right) \quad .... (١)$$

وبما أن القطع يمر بالنقطة (٤ ، ٣) ؛ فهي تحقق معادلته ، أي أن :

$$\frac{١٦}{أ^٢} + \frac{٩}{ب^٢} = ١ \quad \Leftarrow \quad \frac{١}{ب^٢} = \left(\frac{١}{٩} - \frac{١٦}{٩أ^٢}\right) \quad .... (٢)$$

من (١) ، (٢)ينتج أن :

$$\frac{١}{أ^٢} = \frac{١}{٥٢} \quad ، \quad \frac{١}{ب^٢} = \frac{١}{١٣}$$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{س^٢}{٥٢} + \frac{ص^٢}{١٣} = ١$.

نلاحظ أن : $٥٢ > ١٣$ إذن المحور الأكبر للقطع يقع على محور السينات .

مثال (٤ - ١١)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (± ٥ ، ٠) ، وأحد دليليه هو المستقيم س = $\frac{٣٦}{٥}$.

الحــــل :

إحداثيات البؤرتين (± ٥ ، ٠) ، $\therefore$ جـ = ٥

معادلة الدليل س = $\frac{أ}{ى} = \frac{أ^٢}{جـ}$.

$\frac{أ^2}{جـ} = \frac{٣٦}{٥}$ $\Leftarrow$ $\frac{أ^2}{٥} = \frac{٣٦}{٥}$ $\Leftarrow$ $أ^2 = ٣٦$.

$ب^2 = أ^2 - جـ^2 = ٣٦ - ٢٥ = ١١$.

$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي :

$$\frac{س^2}{٣٦} + \frac{ص^2}{١١} = ١ \ .$$

مثال (٤ - ١٢)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $و_1$(٣ ، ١) ، $و_2$ (٣ ، ٩) ، وطول محوره الأكبر يساوي ١٠ .

الحـــل : $\because$ القطع في وضع غير قياسي لذا نستخدم التعريف :

لتكن د (س ، ص) ، نقطة على القطع :

$\therefore \quad |د و_1| + |د و_2| = ١٠$

$$\sqrt{(س - ٣)^2 + (ص - ١)^2} + \sqrt{(س - ٣)^2 + (ص - ٩)^2} = ١٠$$

$$\Leftarrow \sqrt{(س - ٣)^2 + (ص - ١)^2} = ١٠ - \sqrt{(س - ٣)^2 + (ص - ٩)^2}$$

بتربيع الطرفين نجد :

$$س^2 + ص^2 - ٦س - ٢ص + ١٠ = ١٠٠ - ٢٠\sqrt{(س - ٣)^2 + (ص - ٩)^2} + س^2 + ص^2 - ٦س - ١٨ص + ٩٠$$

$$١٦ص - ١٨٠ = -٢٠\sqrt{(س - ٣)^2 + (ص - ٩)^2} \Leftarrow ٤ص - ٤٥ = -٥\sqrt{(س - ٣)^2 + (ص - ٩)^2}$$

وبتربيع الطرفين مرة أخرى نحصل على :

$$١٦ص^2 - ٣٦٠ص + ٢٠٢٥ = ٢٥س^2 + ٢٥ص^2 - ١٥٠س - ٤٥٠ص + ٢٢٥٠$$

$\Leftarrow ٢٥س^2 + ٩ص^2 - ١٥٠س - ٩٠ص + ٢٢٥ = ٠$ وهي المعادلة المطلوبة .

مثال (٤ - ١٣)

يدور كوكب الأرض حول الشمس في مدار على شكل قطع ناقص تقع الشمس عند إحدى بؤرتيه . إذا علم أن أصغر بُعد وأكبر بُعد بينه وبين الشمس يحدثان عندما يكون كوكب الأرض عند رأسي القطع، وكانت أصغر مسافة ١٤٧٠٥٢٧٤٠كم، وأكبر مسافة ١٥٢١٣٩٠٠٠كم . فأوجد التخالف المركزي لمدار كوكب الأرض .

الحـــل :

$\because$ طول المحور الأكبر $= ٢أ$

$\Leftarrow ٢أ = ١٤٧٠٥٢٧٤٠ + ١٥٢١٣٩٠٠٠ = ٢٩٩١٩١٧٤٠$ كم

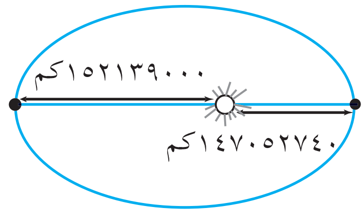
∴ أ = ١٤٩٥٩٥٨٧٠ كم

∵ بُعد الشمس عن المركز = جـ

∴ جـ = ١٤٩٥٩٥٨٧٠ − ١٤٧٠٥٢٧٤٠ = ٢٥٤٣١٣٠كم

∴ التخالف المركزي « ى » = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ = $\frac{٢٥٤٣١٣٠}{١٤٩٥٩٥٨٧٠}$ = ٠,٠١٧

[أنظر الشكل (٤ - ١٦)]



شكل (٤ – ١٦)

تمارين ومسائل (٤ –٣)

[١] أوجد طولي المحورين ، التخالف المركزي ، إحداثي البؤرتين والرأسين ومعادلتي الدليلين لكل مما يلي :

أ) $٩ س^{٢} + ٢٥ص^{٢} = ٢٢٥$.　　ب) $٩ س^{٢} + ١٦ص^{٢} = ١٤٤$.

جـ) $٢٥ س^{٢} + ١٦ص^{٢} = ٤٠٠$.　　د) $٤ س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ١$.

[٢] في كل مما يأتي أوجد معادلة القطع الناقص الذي يحقق الشروط المعطاه ، ثم أوجد معادلتي دليليه :

أ) الرأسان (± ٥ ، ٠) ، والبؤرتان (± ٤ ، ٠) . ب) الرأسان (٠ ، ± ٥) ، والبؤرتان (٠ ، ± ٣) .

جـ) البؤرتان (± ٢ ، ٠) ، والتخالف المركزي $\frac{١}{٢}$.

د) البؤرتان (٠ ، ± ٤) ، والتخالف المركزي $\frac{٤}{٥}$.

هـ) طول المحور الأكبر ١٠ وينطبق على محور السينات ، طول المحور الأصغر ٨ ، ومركزه نقطة الأصل.

و) محورا القطع هما محورا الإحداثيات ، والقطع يمر بالنقطتين (٤ ، ٣) ، (–١ ، ٤) .

ز) البؤرتان هما (± ٣ ، ٠) ، والقطع يمر بالنقطة (٤ ، ١) .

ح) التخالف المركزي $\frac{٣}{٤}$ والبؤرتان على محور السينات ،والمركز في نقطة الأصل،والقطع يمر بالنقطة (٦ ، ٤) .

[٣] أوجد معادلة المنحنى الذي ترسمه النقطة ﻫ التي تتحرك بحيث يكون مجموع بُعديها عن النقطتين (٣ ، ٠)،(٩ ، ٠) يساوي ١٢ .

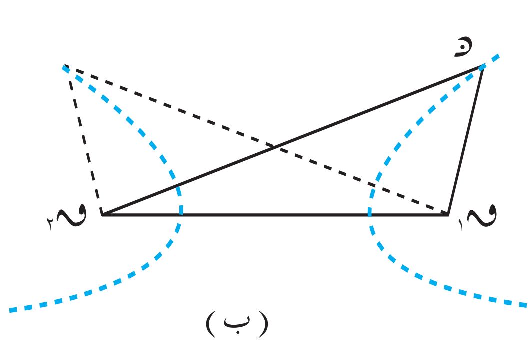
[٤] أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه النقطتان (± ٤ ، ٠) ودليلاه س = ± ٦ .

[٥] يدور كوكب بلوتو في مدار على شكل قطع ناقص تقع الشمس عند إحدى بؤرتيه . إذا علم أن أصغر بُعد وأكبر بُعد بينه وبين الشمس يحدثان عندما يكون الكوكب بلوتو عند رأسي القطع، وكانت أصغر مسافة ٢,٧ بليون ميل ، وأكبر مسافة ٤,٥ بليون ميل . فأوجد التخالف المركزي لمدار الكوكب بلوتو .

٤ – ٤ القطع الزائد

تأمل الشكل (٤ – ١٧ أ) : $و_1$ ، $و_2$ نقطتان ثابتتان ؛ النقطة د تتحرك في مستوى يحوي هاتين النقطتين بحيث $|د و_1| - |د و_2|$ (أو $|د و_2| - |د و_1|$) طولاً ثابتاً وليكن ٢أ .

إذن النقطة د ترسم منحنيا ذا فرعين : الفرع الأيسر يظهر من الإشارة الموجبة ، والفرع الأيمن يظهر من الإشارة السالبة ويسمّى قطعاً زائداً [الشكل (٤ – ١٧ ب)] .

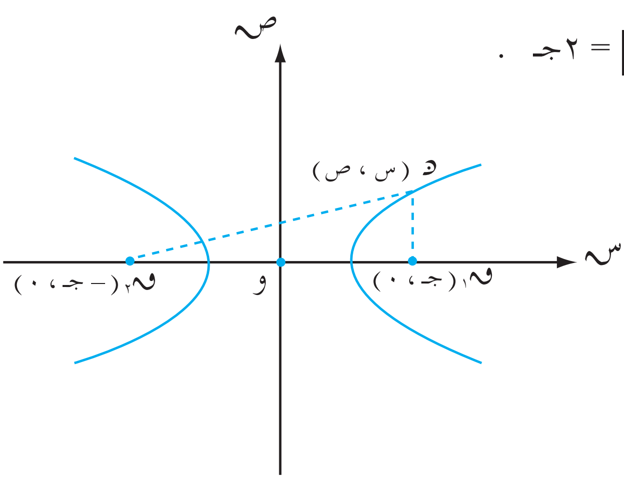


شكل (٤ – ١٧)

تعريف (٤ – ٥)

القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي الفرق بين بُعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوى يساوي طولاً ثابتاً . تسمّى النقطتان الثابتتان بؤرتي القطع الزائد .

معادلة القطع الزائد :



شكل (٤ – ١٨)

لتكن $و_1$ ، $و_2$ بؤرتي القطع الزائد، $|و_1 و_2| = ٢جـ$.

ومحور السينات ماراً بالنقطتين $و_1$، $و_2$ ،

ومحور الصادات المنصف العمودي للقطعة $و_1 و_2$ في و ، فتكون البؤرتان هما : $و_1$ (جـ ، ٠) ، $و_2$ (– جـ ، ٠) ، وإذا فرضنا أن النقطة المتحركة د (س ، ص) هي التي ترسم منحنى القطع، [أنظر الشكل (٤ – ١٨)] :

$$|د و_2| - |د و_1| = ٢أ$$

$$\therefore \sqrt{(س + جـ)^2 + ص^2} - \sqrt{(س - جـ)^2 + ص^2} = ٢أ$$

$$\therefore \sqrt{(س + جـ)^2 + ص^2} = \sqrt{(س - جـ)^2 + ص^2} + ٢أ$$

وبتربيع الطرفين نحصل على :

$$(\text{س} + \text{جـ})^{٢} + \text{ص}^{٢} = (\text{س} - \text{جـ})^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٤\text{أ}^{٢} + ٤\text{أ}\sqrt{(\text{س} - \text{جـ})^{٢} + \text{ص}^{٢}}$$

$$\therefore\ ٤\text{جـس} - ٤\text{أ}^{٢} = +٤\text{أ}\sqrt{(\text{س} - \text{جـ})^{٢} + \text{ص}^{٢}}$$

$$\left(\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}\,\text{س} - \text{أ}\right) = \sqrt{(\text{س} - \text{جـ})^{٢} + \text{ص}^{٢}}$$

وبتربيع الطرفين مرة أخرى نحصل على :

$$\frac{\text{جـ}^{٢}}{\text{أ}^{٢}}\,\text{س}^{٢} - ٢\text{جـس} + \text{أ}^{٢} = (\text{س} - \text{جـ})^{٢} + \text{ص}^{٢}$$

$$\therefore\ \left(\frac{\text{جـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{\text{أ}^{٢}}\right)\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = \text{جـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}$$

وبقسمة الطرفين على $(\text{جـ}^{٢} - \text{أ}^{٢})$:

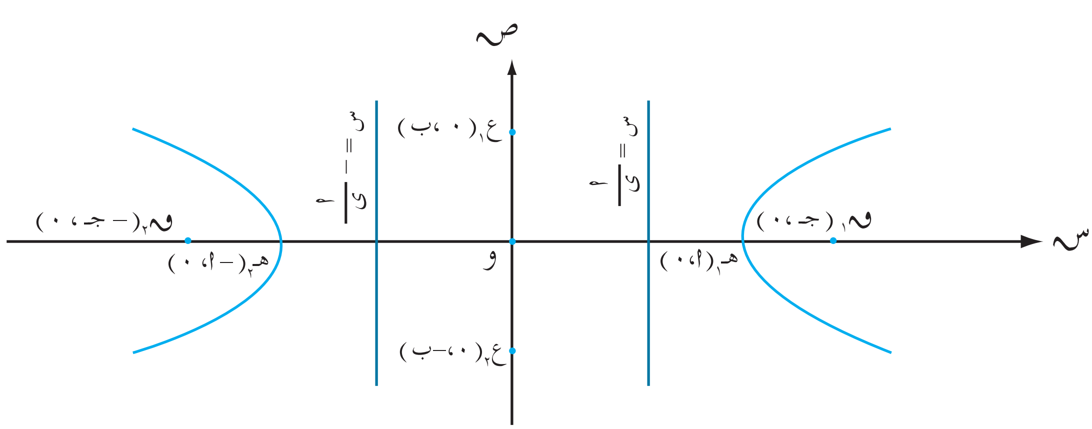
$$\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{جـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}} = ١$$

للتبسيط نضع : $\text{جـ}^{٢} - \text{أ}^{٢} = \text{ب}^{٢}$ ، حيث $\text{جـ} > \text{أ}$ ، فتكون معادلة القطع الزائد هي :

$$\boxed{\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١} \qquad \ldots\ldots\ldots (٤ - ٧)$$

تسمى المعادلة (٤ − ٧) بالصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد .

[انظر شكل (٤ − ١٩)] .



شكل (٤ − ١٩)

تعريف (٤ - ٦)

١- المستقيم المار بالبؤرتين $و_١$ ، $و_٢$ يُسمَّى **المحور القاطع (أو المحور البؤري)** .
٢- النقطتان $هـ_١$ (٩ ، ٠) ، $هـ_٢$ (-٩ ، ٠) ، (نقطتا تقاطع القطع مع محوره القاطع) تسميان **رأسي القطع** .و يُدعى الطول $هـ_١هـ_٢$ بطول المحور القاطع .
٣- المنصف العمودي للقطعة المستقيمة $و_١و_٢$ يسمَّى **المحور المرافق** . ويدعى الطول $ع_١ع_٢$ بطول المحور المرافق .
٤ - تسمَّى النقطة و ، (نقطة تقاطع هذين المحورين) **مركز القطع الزائد** .

ملاحظات :

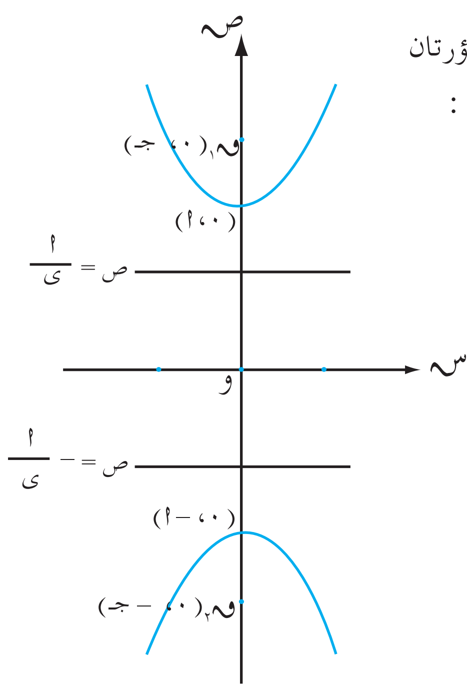
في معادلة القطع الزائد $\frac{س^٢}{٩^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$. [انظر شكل (٤ - ١٩)] تلاحظ أن :

١ - القطع الزائد متماثل بالنسبة لمحوري الإحداثيات .
٢ - طول المحور القاطع ٢٩ ، وطول المحور المرافق ٢ب .
٣ - التحالف المركزي $ى = \frac{جـ}{٩} = \sqrt{١ + \frac{ب^٢}{٩^٢}}$ حيث $ى > ١$.
٤ - بؤرتي القطع الزائد هما (± ٩ى ، ٠) = (± جـ ، ٠) .
٥ - معادلتي الدليلين هما : $س = ± \frac{٩}{ى} = ± \frac{٩^٢}{جـ}$.

وإذا أخذنا محور الصادات ماراً ببؤرتي القطع الزائد ، فعندئذ تكون البؤرتان $و_١$(٠، جـ) ،$و_٢$ (٠ ، -جـ) وتصبح معادلة القطع الزائد ، هي :

$$\boxed{\frac{ص^٢}{٩^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١} \quad \text{.........} (٤- ٨)$$

حيث $ب^٢ = جـ^٢ - ٩^٢$ ويكون شكل القطع كما في شكل (٤ - ٢٠) ، حيث محوره القاطع على محور الصادات ومحوره المرافق على محور السينات ورأساه النقطتين (٠ ، ± ٩) ومعادلتا الدليلين $ص = ± \frac{٩}{ى}$ ،



شكل (٤ - ٢٠)

وهكذا فهناك وضعان للقطع الزائد : الأول كما في شكل (٤ - ١٩) ، والآخر كما في شكل (٤- ٢٠) .

ولإيجاد معادلتي المستقيمين المقاربين نضع المعادلة

$\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ٠$ ؛ نحصل على :

$\Leftarrow$ ص $= \pm \frac{ب}{أ}$ س ، أو نضع :

$\frac{ص^2}{أ^2} - \frac{س^2}{ب^2} = ٠ \Leftarrow$ ص $= \pm \frac{أ}{ب}$ س .

فإذا أردنا مثلاً أن نجد معادلتي المستقيمين المقاربين للقطع الزائد $١٦س^2 - ٩ص^2 = ١٤٤$ ، نقسم الطرفين على ١٤٤ فنحصل على :

$\frac{س^2}{٩} - \frac{ص^2}{١٦} = ١$ والمستقيمان المقاربان هما : $\frac{س^2}{٩} - \frac{ص^2}{١٦} = ٠$ ، أي أن : ص $= \pm \frac{٤}{٣}$ س .

تلاحظ مما سبق أنه يمكن التعرف على القطع المخروطي من خلال التخالف المركزي فإذا كان :

١- ى = ١ فإن القطع قطعاً مكافئاً .
٢- ى $>$ ١ فإن القطع قطعاً ناقصاً .
٣- ى $<$ ١ فإن القطع قطعاً زائداً .

مثال (٤ - ١٤)

أوجد معادلة القطع المخروطي الذي رأساه (٠ ، ± ٦) وتخالفه المركزي $\frac{٥}{٣}$ ، ثم أوجد إحداثي البؤرتين ومعادلتي دليليه .

الحـــل :

$\because$ ى $= \frac{٥}{٣} < ١$

$\therefore$ القطع زائد ومعادلته على الشكل :

$\frac{ص^2}{أ^2} - \frac{س^2}{ب^2} = ١$

حيث أ = ٦ ، ى $= \frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٣}$ ومنه جـ = ١٠ ، $ب^2 = جـ^2 - أ^2 = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤$.

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هي $\frac{ص^2}{٣٦} - \frac{س^2}{٦٤} = ١$.

وواضح ان البؤرتين هما النقطتان (٠ ، ± ١٠) ومعادلتا الدليلين هما ص $= \pm \frac{أ}{ى} \Leftarrow$ ص $= \pm \frac{١٨}{٥}$.

مثال (٤ – ١٥)

حدّد محوري القطع الزائد $٩ س^{٢} - ١٦ ص^{٢} = ١٤٤$ ، ثم عيّن إحداثيات رأسيه ، بؤرتيه ، تخالفه المركزي ، وارسم القطع .

الحـــل :

بقسمة طرفي المعادلة على ١٤٤ نجد أن :

$\frac{س^{٢}}{١٦} - \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$ ، وبالتالي يكون

$ا = ٤$ ، $ب = ٣$ ، $جـ^{٢} = ا^{٢} + ب^{٢} = ٢٥$ ،

ومنه $جـ = ٥$.

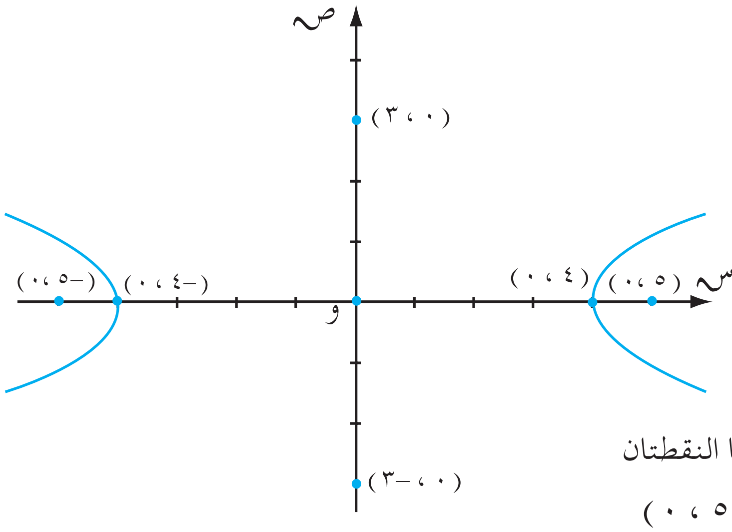
وعليه ينطبق المحور القاطع على محور السينات ،

والمحور المرافق على محور الصادات ؛ والرأسان هما النقطتان

(± ٤ ، ٠)، والبؤرتان هما النقطتان (± ٥ ، ٠)

والتخالف المركزي $ى = \frac{جـ}{ا} = \frac{٥}{٤}$.

والشكل (٤ – ٢١) يوضح القطع الزائد .



شكل (٤ – ٢١)

مثال (٤ – ١٦)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه (± ٥ ، ٠) وبؤرتاه (± ٧ ، ٠)،ثم أوجد معادلتي مستقيميه المقاربين.

الحـــل :

من المعطيات نجد أن : $ا = ٥$ ، $جـ = ٧$ $\Leftarrow$ $ب^{٢} = جـ^{٢} - ا^{٢} = ٤٩ - ٢٥ = ٢٤$.

بما أن الرأسين على محور السينات فإن معادلة القطع الزائد هي : $\frac{س^{٢}}{٢٥} - \frac{ص^{٢}}{٢٤} = ١$.

المستقيمان المقاربان هما : $ص = ± \frac{٢\sqrt{٦}}{٥} س$.

مثال (٤ – ١٧)

أوجد معادلة القطع الزائد إذا كانت بؤرتاه هما (± ٦ ، ٠) وأحد دليليه هو المستقيم $س = ٣$.

الحـــل :

من المعطيات : $جـ = ٦$ ، $س = \frac{ا^{٢}}{جـ} = ٣$.

$\therefore$ $ا^{٢} = ١٨$. $ب^{٢} = جـ^{٢} - ا^{٢} = ٣٦ - ١٨ = ١٨$.

المعادلة المطلوبة هي :

$\frac{س^{٢}}{١٨} - \frac{ص^{٢}}{١٨} = ١$ $\Leftarrow$ $س^{٢} - ص^{٢} = ١٨$.

تمارين ومسائل (٤-٤)

[١] أوجـد إحداثيات الرأسين ، البؤرتين ، ومعادلتي المستقيمين التقاربيين للقطوع الزائدة الآتية ،ثم ارسم الشكل البياني لكلٍ منها :

أ) $\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{٤} = ١$.　　ب) $١٦س^٢ - ٩ص^٢ = ١٤٤$.

جـ) $٢٥س^٢ - ١٦ص^٢ = ٤٠٠$.　　د) $٩ س^٢ - ٩ص^٢ = ٤$.

[٢] أوجد التخالف المركزي ومعادلتي الدليلين للقطوع الزائدة الآتية :

أ) $٤س^٢ - ٩ص^٢ = ٣٦$.　　ب) $٩ س^٢ - ص^٢ = -٩$.

جـ) $\frac{س^٢}{١٦} - \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$.　　د) $٢٥ س^٢ - ٨ص^٢ + ٢٠٠ = ٠$.

[٣] أوجد معادلة القطع الزائد في كل من الحالات التالية :

أ) البؤرتان (٠ ، ± ٦) ، الرأسان (٠ ، ± ٤) .　ب) الرأسان (± ٥ ، ٠) ، البؤرتان (± ٧ ، ٠).

جـ) البؤرتان (± ٦ ، ٠) ، التخالف المركزي $\frac{٣}{٢}$.

د) الرأسان (٠ ، ± ٧) ، التخالف المركزي $\frac{٤}{٣}$.

هـ) البؤرتان (± ٨ ، ٠) ، وطول المحور المرافق ٦ .

و) الرأسان (٠ ، ± ٤) ويمر بالنقطة (-٢ ، ٥) .

[٤] أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل ، تخالفه المركزي $\sqrt{٥}$ ويمـر بالنقطة (٣ ، ٢) .

[٥] أوجد معادلة القطع الزائد الذي مستقيماه المقاربان ص = ± ٢ س والبؤرتان هما (± ٦ ، ٠) .

[٦] أوجد معادلة القطع الزائد الذي دليلاه ص = ± ٤ ومستقيماه المقاربان ص = ± $\frac{٣}{٢}$ س .

[٧] أوجد معادلة المنحنى الذي ترسمه النقطة ﻫ التي تتحرك بحيث يكون الفـرق بين بعديهـا عـن النقطتين (٢ ، ٠) ، (١٠ ، ٠) يساوي ١ .

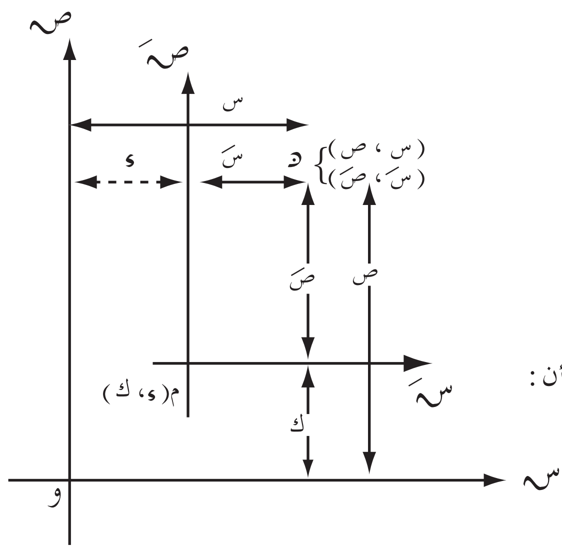
٤ – ٥ انسحـــاب المحـــاور الإحداثيـــة

إن انسحاب المحاور يساعد على إيجاد معادلات القطوع المخروطية التي محاورها توازي محوري الإحداثيات لكن مراكزها لا تكون نقطة الأصل .

كما أنه إذا أحسن اختيار نقطة الأصل الجديدة للمحاور ،وكان لدينا معادلة منحنى معين في نظام إحداثي غير مناسب ، فإنه يمكننا تغيير هذا النظام للحصول على صورة قياسية لمعادلة هذا المنحنى ، فسحب المحاور يساعد على تبسيط معادلة المنحنى والحصول على صورتها القياسية .

ليكن سه و صه مستوى الإحداثيات المتعامدة ، م نقطة في المستوى إحداثياها (ء ، ك) .

فإذا رسمنا من م المحورين م سَه ، م صَه موازيين للمحورين و سه ، و صه على الترتيب ، وأخذنا أي نقطة مثل د في المستوى ، وكان إحداثياها (س، ص) بالنسبة للمحورين الأصليين ،و إحداثياها (سَ ، صَ) بالنسبة للمحورين الجديدين فإننا نجد من الشكل(٤–٢٢) أن :



شكل (٤ – ٢٢)

س = سَ + ء ، ص = صَ + ك

أو سَ = س – ء ، صَ = ص – ك .... (٤–٩)

هاتان المعادلتان تسميان معادلتي الانسحاب .

لإيجاد معادلات القطوع التي مراكزها ليست نقطة الأصل ، نسحب المحاور الإحداثية لتحويل معادلات الدرجة الثانية ذات الصورة :

أ س^{٢} + جـ ص^{٢} + هـ س + ح ص + ط = ٠ .... (١)

إلى الصور القياسية التي مرت معنا سابقا .

كل قطع مخروطي له محور يوازي أحد محوري الإحداثيات تكون معادلته على صورة المعادلة (١) ، والعكس أيضا صحيح مع استثناءات بسيطة . فإذا كان :

١) أ ، جـ لهما نفس الإشارة ، فإن المعادلة تمثل قطعاً ناقصاً (دائرة وذلك عندما أ = جـ ، أو نقطة ، أو تكون مجموعة خالية) .

٢) أ ، جـ لهما إشارتان مختلفتان ، فإن المعادلة تمثل قطعاً زائداً أو مستقيمين متقاطعين .

٣) أحد العددين أ أو جـ يساوي صفراً ، فإن المعادلة تمثل قطعاً مكافئاً ، (أو مستقيمين متوازيين، أو مستقيما واحداً ، أو مجموعة خالية) .

مثال (٤ - ١٨)

بيّن نوع المنحنى الذي تمثّله المعادلات التالية :

أ) س^٢ + ٣ ص^٢ + ٨س + ١٢ص + ٥ = ٠ . ب) – ٣س^٢ + ص^٢ + ٦ س + ٤ص + ١ = ٠ .

جـ) – ٣س^٢ + ص^٢ + ٦ س + ٤ ص – ١ = ٠ . د) ٢ س^٢ + ٤س – ص + ٣ = ٠ .

الحـــل :

أ) بمقارنة المعادلة المعطاة مع المعادلة : ا س^٢ + جـ ص^٢ + هـ س + ح ص + ط = ٠ ، نجد أن ا ، جـ لهما الإشارة نفسها . وبالتالي فالمعادلة تمثل إما قطعاً ناقصاً ، أو دائرة ، أو نقطة ، أو مجموعة خالية . ولمعرفة ذلك نكتب المعادلة بالصورة : (س^٢ + ٨ س) + ٣ (ص^٢ + ٤ ص) = – ٥

وبإكمال المربع تأخذ المعادلة الأخيرة الصورة :

(س^٢ + ٨ س + ١٦) + ٣(ص^٢ + ٤ص + ٤) = – ٥ + ١٦ + ١٢ .

$\Leftarrow$ (س + ٤)^٢ + ٣ (ص + ٢)^٢ = ٢٣ .

$$\Leftarrow \quad \frac{(س + ٤)^٢}{٢٣} + \frac{(ص + ٢)^٢}{\frac{٢٣}{٣}} = ١ .$$

بوضع سَ = س + ٤ ، صَ = ص + ٢ ، أي نسحب المحاور للنقطة (–٤ ، –٢) فتأخذ

المعادلة الصورة: $\frac{سَ^٢}{٢٣} + \frac{صَ^٢}{\frac{٢٣}{٢}} = ١$ وهذه معادلة قطع ناقص .

ب) المعادلة المعطاة تمثل قطعاً زائداً أو مستقيمين متقاطعين لأن ا ، جـ لهما إشارتان مختلفتان . لمعرفة ذلك يمكن كتابة المعادلة بالشكل :

(ص^٢ + ٤ص) – ٣(س^٢ – ٢ س) = –١

$\Leftarrow$ (ص^٢ + ٤ص + ٤) –٣ (س^٢ – ٢ س + ١) = –١ + ٤ – ٣

$\Leftarrow$ (ص + ٢)^٢ –٣ (س – ١)^٢ = ٠

$\Leftarrow$ (ص + ٢)^٢ = ٣ (س – ١)^٢

$\Leftarrow$ ص + ٢ = ± $\sqrt{٣}$ (س – ١) $\Leftarrow$ صَ = ± $\sqrt{٣}$ سَ حيث صَ = ص + ٢ ، سَ = س – ١

$\therefore$ المعادلة تمثل مستقيمين متقاطعين .

جـ) $-٣\,س^{٢} + ص^{٢} + ٦\,س + ٤\,ص - ١ = ٠$

بإكمال المربع بالنسبة لكل من س و ص نحصل على المعادلة:

$\Leftarrow \quad (ص + ٢)^{٢} - ٣\,(س - ١)^{٢} = ١ + ٤ - ٣ = ٢$

$\Leftarrow \quad \dfrac{(ص + ٢)^{٢}}{٢} - \dfrac{(س - ١)^{٢}}{\frac{٢}{٣}} = ١ \qquad \Leftarrow \quad \dfrac{\acute{ص}^{٢}}{٢} - \dfrac{\acute{س}^{٢}}{\frac{٢}{٣}} = ١$

حيث $\acute{ص} = ص + ٢$ ، $\acute{س} = س - ١$ ، هما معادلتا الانسحاب .

$\therefore$ المعادلة تمثل قطعاً زائداً .

د) بما أن ($أ \neq ٠$ ، $جـ = ٠$) فإن المعادلة تمثل قطعاً مكافئاً ، أو مستقيمين متوازيين ، أو مستقيماً واحداً ، أو مجموعة خالية .

$\because \quad ٢\,س^{٢} + ٤\,س - ص + ٣ = ٠$

$\therefore \quad ٢\,(س^{٢} + ٢\,س + ١) = ص - ٣ + ٢$

$\Leftarrow \quad ٢\,(س + ١)^{٢} = ص - ١ \qquad \Leftarrow \quad (س + ١)^{٢} = \dfrac{١}{٢}\,(ص - ١)$

$\Leftarrow \quad \acute{س}^{٢} = \dfrac{١}{٢}\,\acute{ص}$

حيث $\acute{س} = س + ١$ ، $\acute{ص} = ص - ١$ ، هما معادلتا الانسحاب .

$\therefore$ المعادلة تمثل قطعاً مكافئاً .

مثال (٤ – ١٩)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه النقطة (–٢ ، ٣) وبؤرته (–٢ ، ٠) .

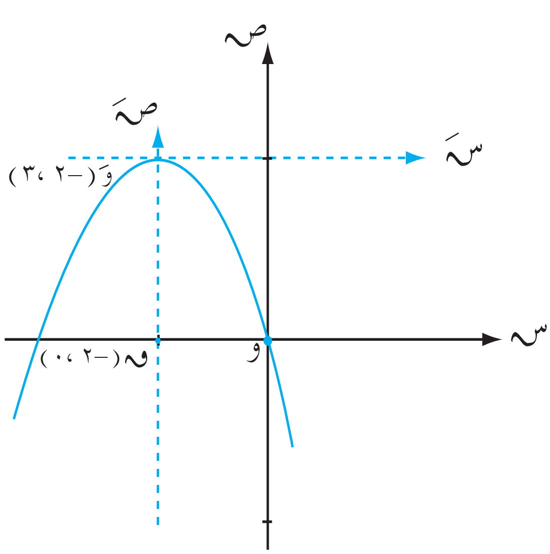
الحل : محور القطع يوازي المحور الصادي كما في الشكل (٤ – ٢٣) ، نسحب محوري الإحداثيات بحيث تكون نقطة الأصل الجديدة عند رأس القطع المكافئ (–٢ ، ٣)، وعندئذ يكون $\acute{س} = س + ٢$ ، $\acute{ص} = ص - ٣$.

في هذا النظام تكون بؤرة القطع في (٠ ، –٣) ، أي أن: $أ = ٣$ ، بالتالي فإن معادلته في النظام الجديد $\acute{س}$ و $\acute{ص}$ هي: $\acute{س}^{٢} = -١٢\,\acute{ص}$

وفي النظام س و ص (النظام القديم) هي :

$(س + ٢)^{٢} = -١٢\,(ص - ٣)$

أو $\quad س^{٢} + ٤\,س + ١٢\,ص - ٣٢ = ٠$.



شكل (٤ –٢٣)

مثال (٤ - ٢٠)

اثبت أن المعادلة ٤ $س^٢$ + ٩$ص^٢$ + ٨ س + ٣٦ص + ٤ = ٠ تمثل قطعاً ناقصاً ، ثم أوجد :

أ) تخالفه المركزي . ب) إحداثي رأسيه .

جـ) إحداثي بؤرتيه . د) معادلتي دليليه .

الحـــل :

٤ $س^٢$ + ٩$ص^٢$ + ٨ س + ٣٦ ص + ٤ = ٠ ، باكمال المربع لكل من س ، ص نجد أن :

٤ ($س^٢$ + ٢ س + ١) + ٩ ($ص^٢$ + ٤ص + ٤) = – ٤ + ٤ + ٣٦

∴ ٤ (س + ١ $)^٢$ + ٩ (ص + ٢ $)^٢$ = ٣٦ ، بقسمة طرفي المعادلة على ٣٦ نحصل على :

$\frac{(س + ١)^٢}{٩} + \frac{(ص + ٢)^٢}{٤} = ١$ ، بوضع سَ = س + ١ ، صَ = ص + ٢ [معادلتا الانسحاب]

نحصل على المعادلة القياسية $\frac{سَ^٢}{٩} + \frac{صَ^٢}{٤} = ١$

وهي معادلة قطع ناقص ، حيث ﺃ = ٣ ، ب = ٢ .

∴ جـ = $\sqrt{ﺃ^٢ - ب^٢} = \sqrt{٩ - ٤} = \sqrt{٥}$ ، وعليه فإن :

أ) تخالفه المركزي (ى) = $\frac{جـ}{ﺃ} = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$.

ب) إحداثيات رأس القطــع (سَ = ± ﺃ ، صَ = ٠) أي أن (سَ = ± ٣ ، صَ = ٠) .

ولكن سَ = س + ١ ⟸ ± ٣ = س + ١ ⟸ س = ٢ ، س = – ٤ ،

صَ = ص + ٢ ⟸ ٠ = ص + ٢ ⟸ ص = – ٢ .

∴ رأسا القطع هما (٢ ، –٢) ، (–٤ ، –٢) .

جـ) إحداثيات بؤرتي القطع (سَ = ± جـ ، صَ = ٠) . أي (سَ = ± $\sqrt{٥}$ ، صَ = ٠) .

ولكن سَ = ± $\sqrt{٥}$ = س + ١ ⟸ س = –١ ± $\sqrt{٥}$

بؤرتا القطع هما (–١ + $\sqrt{٥}$ ، – ٢) ، (–١ – $\sqrt{٥}$ ، –٢) .

د) معادلتا الدليلين سَ = ± $\frac{ﺃ}{ى}$ = ± $\frac{٩}{\sqrt{٥}}$.

سَ = س + ١ ⟸ ± $\frac{٩}{\sqrt{٥}}$ = س + ١

∴ الدليلان هما المستقيمان س = –١ ± $\frac{٩}{\sqrt{٥}}$.

تمارين ومسائل (٤ –٥)

[١] أوجد معادلة كل من القطوع المخروطية الآتية :

أ) قطع مكافئ رأسه (–٢ ، –٢) وبؤرته (٢ ، –٢) .

ب) قطع ناقص رأساه (٢ ، ٠) ، (–٨ ، ٠) وبؤرتاه (٠ ، ٠) (–٦ ، ٠) .

جـ) قطع زائد رأساه (٦ ، ٢) ، (٠ ، ٢) وبؤرتاه (٧ ، ٢) ، (– ١ ، ٢) .

د) قطع ناقص تخالفه المركزي $\frac{١}{٢}$ وبؤرتاه (٤ ، ٢) ، (٢ ، ٢) .

[٢] بين نوع المنحنى الذي تمثله كل من المعادلات الآتية :

أ) ص^{٢} + ٨ س – ٦ص +١ = ٠ .

ب) ٢٥ س^{٢} + ١٦ ص^{٢} – ٥٠ س – ٦٤ص – ٣١١ = ٠ .

جـ) ٣ س^{٢} – ٢ ص^{٢} + ٦ س – ٨ص – ١٧ = ٠ .

د) ٩ س^{٢} + ١٦ص^{٢} – ٣٦ س – ٣٢ ص – ٩٢ = ٠ .

هـ) ٤ س^{٢} – ٣ ص^{٢} + ٨ س + ١٢ ص – ٨ = ٠ .

[٣] بإجراء انسحاب مناسب للمحورين ؛ ماذا تمثل كل معادلة مما يلي ؟ أوجد إحداثيات الرأسين والبؤرتين وارسم منحنى القطع :

أ) ٢ س^{٢} + ٣ ص^{٢} – ٨ س – ٦ ص + ١١ = ٠ .

ب) س^{٢} + ٦ س – ٨ص + ١ = ٠ .

جـ) ٩ س^{٢} – ٤ ص^{٢} + ١٨ س + ١٦ص + ٢٩ = ٠ .

[٤] اثبت أن المعادلة ص^{٢} – ٤ص – ٤ س – ٨ = ٠ تمثل قطعاً مكافئاً . ثم أوجد إحداثي الرأس ، البؤرة ، ومعادلة دليله .

[٥] أثبت أن المعادلة ١٦ س^{٢} – ٣ص^{٢} – ٣٢ س – ١٢ ص – ٤٤ = ٠ تمثل قطعاً زائداً . أوجد طول محوريه ، تخالفه المركزي وإحداثيات مركزه ، رأسيه ، وبؤرتيه .

٤ – ٦ دوران المحاور الإحداثية

إذا دار المحوران سس و صص حول نقطة الأصل إلى وضع سَسَ و صَصَ كما في الشكل (٤–٢٤) ، فإن العلاقة بين الإحداثي (س ، ص) في النظام الأول والإحداثي (سَ ، صَ) في النظام الثاني لنقطة

د في المستوى يمكن توضيحها على النحو التالي :

لتكن هـ قياس دوران زاوية المحورين في اتجاه ضد حركة عقارب الساعة ، هـَ قياس الزاوية المحصورة بين المحور و سَ والقطعة المستقيمة و د .

فإذا كان ر يرمز لطول القطعة المستقيمة و د ، فإن :

س = ر جتا (هـَ + هـ) ، ص = ر جا (هـَ + هـ)

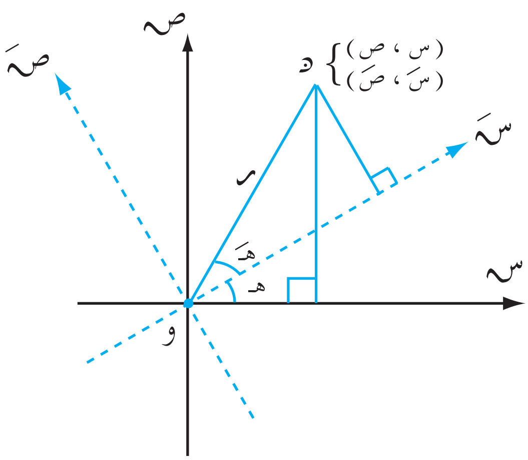
باستخدام صيغتي الجيب وجيب التمام لمجموع زاويتين نحصل على :

س = ر جتاهـَ جتاهـ − رجاهـَ جاهـ

ص = ر جتاهـَجاهـ + ر جاهـَ جتاهـ

ولكن سَ = ر جتاهـَ ، صَ = رجاهـَ ،

وبالتعويض في المعادلتين الأخيرتين نجد أن :



شكل (٤ – ٢٤)

س = سَ جتاهـ − صَ جاهـ
ص = سَ جاهـ + صَ جتاهـ

...... (٤-١٠)

هاتان المعادلتان تعطيان إحداثي د في النظام س و ص بدلالة إحداثيها في النظام سَ و صَ .

وتسميان معادلتي الدوران.

إذا كانت الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في متغيرين هي :

أ س^{٢} + ب س ص + جـ ص^{٢} + هـ س + ح ص + ط = ٠ .... (٢)

وهذه المعادلة لا تختلف عن المعادلة (١) بند (٤ – ٥) إلا بوجود الحد (ب س ص) . كل قطع مخروطي محوره لا يوازي محوري الإحــداثيات ، له معادلة على الصورة(٢)أعلاه .

لذلك إذا أردنا معرفة نوع القطع المخروطي فما علينا إلا أن نحاول التخلّص من هذا الحد والذي يسمى بالحد المستطيل.

إن دوران المحاور يساعدنا على ان ننقل المعادلة (٢) إلى معادلة من الدرجة الثانية لا تحوي الحد س ص . فإذا كان :

١) أ = جـ ، فإن زاوية الدوران هـ تساوي ٤٥° .

٢) أ ≠ جـ ، فإن زاوية الدوران هـ تُعطي بالعلاقة :

ظا ٢ هـ = $\frac{\text{ب}}{\text{أ} - \text{جـ}}$

..... (٤ – ١١)

وسنكتفي فقط في دراستنا هذه عندما تكون زاوية الدوارن شهيرة .

إن المعادلة (٢) تمثل :

١) قطعاً مكافئاً أو مستقيمين متوازيين أو منطبقين ، أو مجموعة خالية إذا كان

Δ = ب^{٢} – ٤ أ جـ = صفراً .

٢) قطعاً ناقصاً أو دائرة أو نقطة أو تكون مجموعة خالية إذا كان Δ سالباً .

٣) قطعاً زائداً او مستقيمين متقاطعين إذا كان Δ موجباً .

حيث Δ = ب^{٢} – ٤ أ جـ هو مميز معادلة الدرجة الثانية وهو لا يتغير بدوران المحاور . أيّ أنّه مقدار ثابت تحت دوران المحورين .

أخيراً يمكننا القول : إنه بالجمع بين انسحاب المحاور ودورانها نستطيع إيجاد معادلة قطع مخروطي في موقع ما في المستوى .

مثال (٤ – ٢١)

أوجد معادلة القطع الناقص ٢ س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ١ إذا دار المحوران زاوية ٤٥° .

الحـــل :

معادلتا الدوران هما :

$$س = سَ \text{ جتا } ٤٥° - صَ \text{ جا } ٤٥° = \frac{١}{\sqrt{٢}} (سَ - صَ) .$$

$$ص = سَ \text{ جا } ٤٥° + صَ \text{ جتا } ٤٥° = \frac{١}{\sqrt{٢}} (سَ + صَ) .$$

وبالتعويض عن س ، ص في المعادلة المفروضة نجد أن :

$$٢ \left[\frac{١}{\sqrt{٢}} (سَ - صَ) \right]^{٢} + ٤ \left[\frac{١}{\sqrt{٢}} (سَ + صَ) \right]^{٢} = ١$$

$$\Leftarrow (سَ - صَ)^{٢} + ٢ (سَ + صَ)^{٢} = ١$$

$$\Leftarrow ٣ سَ^{٢} + ٢ سَ صَ + ٣ صَ^{٢} - ١ = ٠ .$$

وهي معادلة القطع الناقص في النظام سَ و صَ .

مثال (٤ - ٢٢)

ماذا تمثّل كلّ من المعادلات التالية :

أ) $\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س ص} + \text{ص}^{٢} - ٨\text{س} + ٨\,\text{ص} = ٠$

ب) $\text{س ص} = ٥$

الحـــل :

أ) بما أن $\Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ جـ} = ٤ - ٤ \times ١ \times ١ = $ صفراً ، فالمعادلة تمثل إما قطعاً مكافئاً ، أو مستقيمين متوازيين أو منطبقين أو تكون مجموعة خالية . ولمعرفة ماذا تمثّل المعادلة لا بد من حذف الحد (س ص) بدوران المحاور بزاوية مناسبة .

وبما أن أ = جـ = ١ ، فان زاوية الدوران هـ = ٤٥° ومعادلتا الدوران هما :

$$\text{س} = \frac{\text{س}' - \text{ص}'}{\sqrt{٢}} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\text{س}' + \text{ص}'}{\sqrt{٢}}$$

وبالتعويض في المعادلة المفروضة تكون معادلة القطع المخروطي بالنسبة للمحورين الجديدين هي :

$$\left(\frac{\text{س}' - \text{ص}'}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} + ٢\left(\frac{\text{س}' - \text{ص}'}{\sqrt{٢}}\right)\left(\frac{\text{س}' + \text{ص}'}{\sqrt{٢}}\right) + \left(\frac{\text{س}' + \text{ص}'}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} - ٨\left(\frac{\text{س}' - \text{ص}'}{\sqrt{٢}}\right) + ٨\left(\frac{\text{س}' + \text{ص}'}{\sqrt{٢}}\right) = ٠ \;.$$

$\Leftarrow \quad ٢\,\text{س}'^{٢} + ٨\sqrt{٢}\,\text{ص}' = ٠$

$\Leftarrow \quad \text{س}'^{٢} = -٤\sqrt{٢}\,\text{ص}'$

وهذه معادلة قطع مكافئ .

ب) بما أن $\Delta = (١ - ٠) = ١ > ٠$ ، المعادلة تمثل إما قطعاً زائداً أو مستقيمين متقاطعين .

وبما أن أ = جـ = ٠ ، لذلك تكون هـ = ٤٥° .

∴ معادلتا الدوران هما : $\text{س} = \frac{\text{س}' - \text{ص}'}{\sqrt{٢}} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\text{س}' + \text{ص}'}{\sqrt{٢}}$

وبالتعويض في المعادلة المفروضة نجد أن :

$$\left(\frac{\text{س}' - \text{ص}'}{\sqrt{٢}}\right)\left(\frac{\text{س}' + \text{ص}'}{\sqrt{٢}}\right) = ٥$$

$\Leftarrow \quad (\text{س}' - \text{ص}')(\text{س}' + \text{ص}') = ١٠$

$\Leftarrow \quad \text{س}'^{٢} - \text{ص}'^{٢} = ١٠$

وهذه تمثل معادلة قطع زائد .

تمارين ومسائل (٤ – ٦)

[١] أوجد معادلة القطع الزائد الذي :

مركزه (٠ ، ٠) ، أ = ٤ ، ب = ٦ ، زاوية ميل المحور القاطع ٤٥° .

[٢] بإجراء دوران مناسب للمحاور الإحداثية، بيّن ماذا تمثل المعادلات التالية:

أ) $س^{٢} - س\,ص + ص^{٢} + ٩ = ٠$.

ب) $٣\,س^{٢} + ١٠\,س\,ص + ٣\,ص^{٢} - ٢\,س - ١٤\,ص - ٥ = ٠$.

جـ) $\sqrt{٣}\,س^{٢} - ٦\,س\,ص - \sqrt{٣}\,ص^{٢} = ٠$.

د) $٢\,س^{٢} - \sqrt{٣}\,س\,ص + ص^{٢} = ٨$.

هـ) $س^{٢} - ٢\sqrt{٣}\,س\,ص - ص^{٢} = ١$.

و) $س^{٢} - ٢\,س\,ص + ص^{٢} + ١ = ٠$.

ز) $(س + ص)^{٢} = ٨\,(س - ص)$.

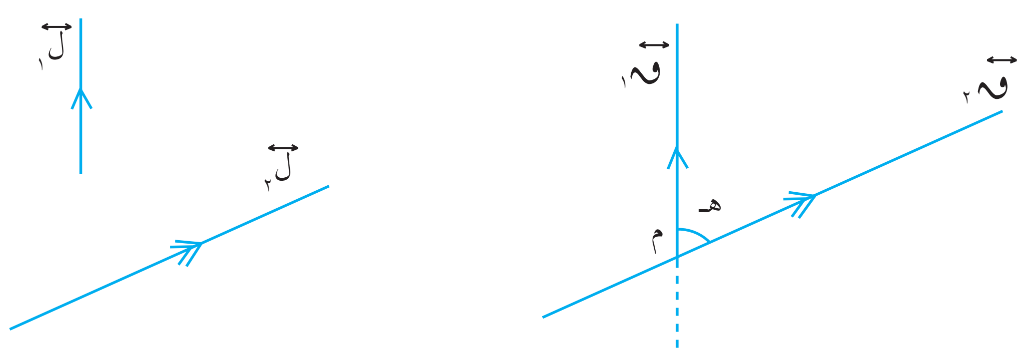
ح) $\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س} = ٢$

الوحدة الخامسة الهندسة الفضائية

٥ – ١ المستقيم العمودي على مستوى

الزاوية بين مستقيمين :

إن الزاوية بين أي مستقيمين ل١ ، ل٢ في الفضاء هي الزاوية بين المستقيمين ق١ ، ق٢ المرسومين من أي نقطة م في الفضاء والموازيين للمستقيمين ل١ ، ل٢ . [شكل (٥ – ١)] .



شكل (٥ – ١)

ومن الشكل يمكن أن نلاحظ أن :

١ – قياس الزاوية بين المستقيمين لا يتأثر بموقع النقطة م فيمكن أن تكون النقطة م على أحد المستقيمين .

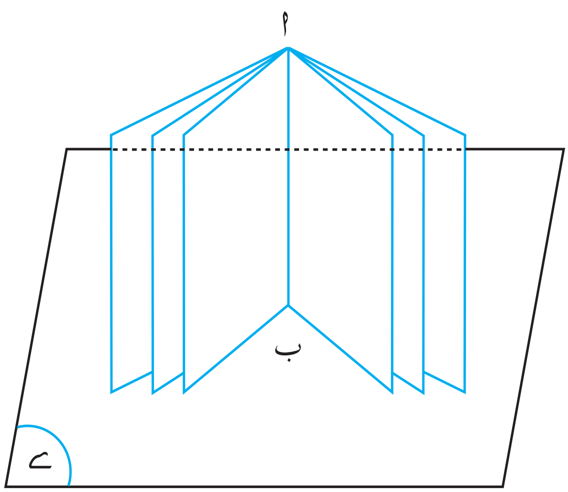
٢ – المستقيمين (غير المنطبقين) يصنعان زاويتين بينهما ، كلٌّ منهما تكمل الأخرى ؛ وتعتبر الزاوية بين المستقيمين هي الزاوية غير المنفرجة .

حقيقة (٥ – ١) :

« إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ عمودياً على جميع مستقيمات المستوى ے ، فإنه عمودي على المستوى ے .

من الواضح أن التحقُّق من تعامد مستقيم ومستوى بحسب هذه الحقيقة أمر شاق للغاية ، ولذا ينبغي أن نبحث عن شروط أيسر لضمان التعامد .

تأمل [الشكل (٥ – ٢)] .



شكل (٥ – ٢)

فالشكل عبارة عن كتاب مفتوح موضوع على طاولة بحيث ترتكز عليها أوراق الكتاب ، كلّ ورقة في الكتاب تمثل مستوياً يقطع مستوى الطاولة ے في مستقيم تمثّله الحافة السفلى للورقة . إذا كانت $\overline{اب}$ هي القطعة المستقيمة التي تلتقي عندها أوراق الكتاب [المستطيلات] فإن $\overline{اب}$ عمودية على جميع هذه المستقيمات ، وذلك لأن أوراق الكتاب على شكل مستطيلات إذا قمنا بتحريك أوراق الكتاب حول $\overline{اب}$ [نعتبر $\overline{اب}$ محوراً] ؛ إذن سيبقى $\overline{اب}$ عمودياً على كل مستقيم في ے ومارا بالنقطة ب .

هذا يعني أن تعامد $\overline{اب}$ والمستقيمين الممثلين بحافتي الغلافين السفليين يقتضى تعامد $\overline{اب}$ مع جميع المستقيمات المحتواة في ے وهذا يقودنا إلى عكس الحقيقة السابقة:

عكس حقيقه (٥ – ١) :

إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ عمودياً على مستوى ے ، فإن $\overleftrightarrow{ل}$ عمودي على جميع مستقيمات المستوى ے .

مبرهنة (٥ – ١)

المستقيم العمودي على مستقيمين غير متوازيين من المستوى ے عمودي على ے .

المعطيات : ق١ ⊂ ے ، ق٢ ⊂ ے ، ل ∩ ے = { م } .

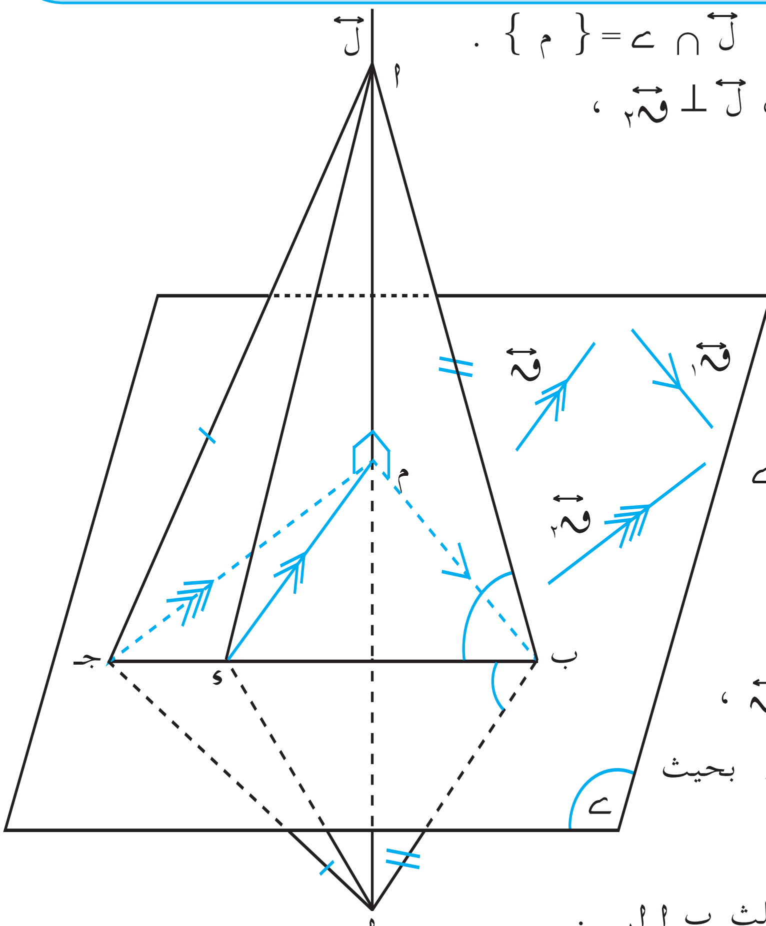
ق١ ∦ ق٢ ، ل ⊥ ق١ ، ل ⊥ ق٢ ،

شكل (٥ – ٣)

المطلوب : إثبات أن :

ل ⊥ ے .

فكرة البرهان : إثبات أن ل عمودي على أي مستقيم آخر في المستوى ے وليكن ق ⊂ ے .



شكل (٥ – ٣)

البرهان: نرسم م ب // ق١ ، م جـ // ق٢ ، م ء // ق ،

ثم نأخذ على ل النقطتين ا ، ا١ بحيث يكون | م ا | = | م ا١ | .

∴ ب م متوسط وارتفاع في المثلث ب ا ا١ .

∴ | ب ا | = | ب ا١ | وايضاً بالمثل تجد | جـ ا | = | جـ ا١ | ،

∴ Δ ا ب جـ ≅ Δ ا١ ب جـ (بثلاثة اضلاع) .

∴ ق (∢ ا ب جـ) = ق (∢ ا١ ب جـ) .

∴ Δ ا ء ب ≅ Δ ا١ ء ب (بضلعين وزاوية محصورة بينهما) .

∴ | ا ء | = | ا١ ء | .

∵ م منتصف ا ا١ . ∴ م ء ارتفاع في المثلث ا ا١ ء .

∴ م ء ⊥ ا م ∴ ل ⊥ م ء ، ∵ م ء // ق ،

∴ ل ⊥ ق ∴ ل ⊥ ے .

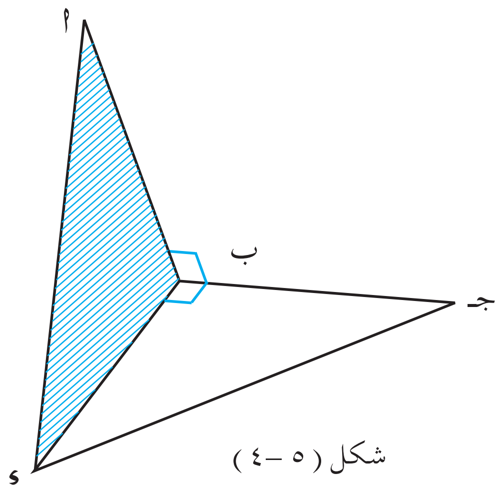
وهو المطلوب .

مثال (٥ – ١)

ب جـ ء مثلث قائم في ب ، أ نقطة خارج المستوى (ب جـ ء) ، $\overline{\text{ب أ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$. أثبت أن :

١) $\overline{\text{جـ ب}} \perp$ المستوى (أ ب ء) .

٢) $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{أ ء}}$.



شكل (٥ – ٤)

المعطيات : Δ ب جـ ء قائم في ب ، $\overline{\text{ب أ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

[شكل (٥ – ٤)] .

المطلوب : إثبات أن :

١) $\overline{\text{جـ ب}} \perp$ المستوى (أ ب ء)

٢) $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{أ ء}}$.

البرهان : ١) $\because$ Δ ب جـ ء قائم في ب ، $\therefore$ $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{ب ء}}$

$\because$ $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ (معطى) ، $\therefore$ $\overline{\text{جـ ب}}$ عمودي على مستويهما

$\therefore$ $\overline{\text{جـ ب}} \perp$ المستوى (أ ب ء) (وهو المطلوب أولاً) .

٢) $\because$ $\overline{\text{أ ء}} \subset$ المستوى (أ ب ء)

$\therefore$ $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{أ ء}}$

(وهو المطلوب ثانياً) .

مبرهنة (٥ – ٢)

المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين عمودي على الآخر .

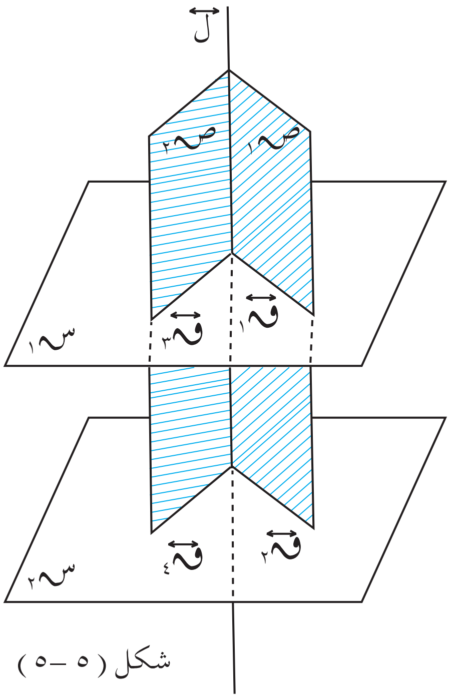
المعطيات : $\text{س}_1 \,//\, \text{س}_2$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp \text{س}_1$ [شكل (٥ – ٥)]

المطلوب : إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp \text{س}_2$.

البرهان : نرسم المستويين ص_1 ، ص_2 المتقاطعين في $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ بحيث ص_1 يقطع س_1 ، س_2 في $\overleftrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}_2}$ ،

ص_2 يقطع س_1 ، س_2 في $\overleftrightarrow{\text{ق}_3}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}_4}$.

$\because$ $\text{س}_1 \,//\, \text{س}_2$ ، ص_1 قاطع لهما في $\overleftrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}_2}$



شكل (٥ – ٥)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ق}_{١}$ // $\overleftrightarrow{ق}_{٣}$ ، $\because$ $\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ $س_{١}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{ق}_{١}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{ق}_{٣}$

بالمثل نجد أن :

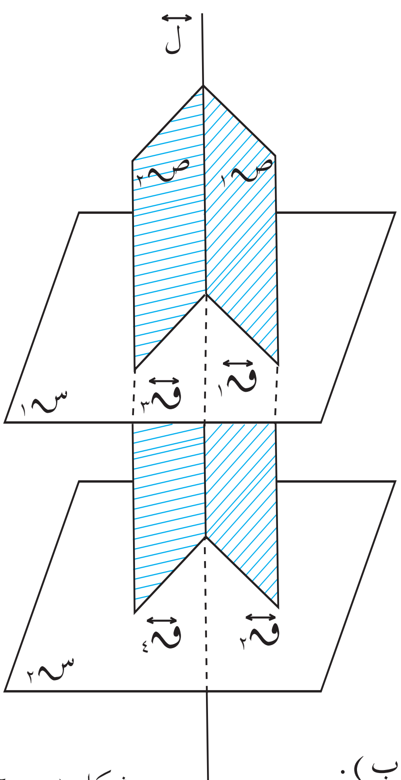
$\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{ق}_{٤}$

$\because$ $\overleftrightarrow{ق}_{٢}$ ، $\overleftrightarrow{ق}_{٤}$ متقاطعان في المستوى $س_{٢}$.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ $س_{٢}$ (وهو المطلوب) .

مبرهنة (٥ – ٣)

المستويان العموديان على مستقيم واحد متوازيان .



شكل (٥ –٦)

المعطيات : $\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ $س_{١}$ ، $\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ $س_{٢}$ [شكل (٥ – ٦)]

المطلوب : إثبات أن $س_{١}$ // $س_{٢}$.

البرهان : نرسم المستويين $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ المتقاطعين في $\overleftrightarrow{ل}$ بحيث $ص_{١}$ يقطع $س_{١}$ ، $س_{٢}$ في $\overleftrightarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftrightarrow{ق}_{٢}$ على التوالي ، $ص_{٢}$ يقطع $س_{١}$ ، $س_{٢}$ في $\overleftrightarrow{ق}_{٣}$ ، $\overleftrightarrow{ق}_{٤}$ على التوالي .

$\because$ $\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ $س_{١}$ ، $\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ $س_{٢}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{ق}_{٢}$.

$\because$ $\overleftrightarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftrightarrow{ق}_{٢}$ ، $\overleftrightarrow{ل}$ يجمعهم مستوى واحد هو $ص_{١}$ ،

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ق}_{١}$ // $\overleftrightarrow{ق}_{٢}$ ....(١) .

وبالمثل نجد $\overleftrightarrow{ق}_{٣}$ // $\overleftrightarrow{ق}_{٤}$ ....(٢) .

من (١) ، (٢) ينتج أن : $س_{١}$ // $س_{٢}$ (وهو المطلوب).

نتيجة (١) :

المستويات العمودية على مستقيم واحد متوازية .

مبرهنة (٥ – ٤)

المستوى العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر .

المعطيات : $\overleftrightarrow{ل}_{١} \,//\, \overleftrightarrow{ل}_{٢}$ ، $\overleftrightarrow{ل}_{١} \perp$ ے [شكل (٥ – ٧)]

المطلوب : إثبات أن $\overleftrightarrow{ل}_{٢} \perp$ ے .

البرهان : نرسم في المستوى ے مستقيمين غير متوازيين $\overleftrightarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftrightarrow{ق}_{٢}$.

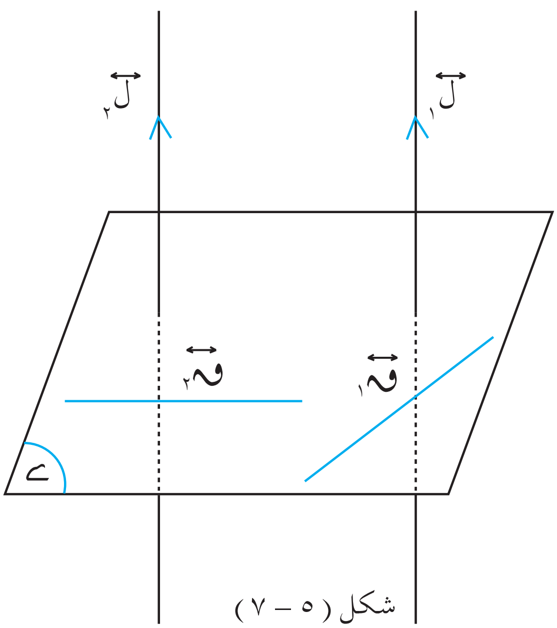
$\because$ $\overleftrightarrow{ل}_{١} \perp$ ے

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ل}_{١} \perp \overleftrightarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftrightarrow{ل}_{١} \perp \overleftrightarrow{ق}_{٢}$.

$\because$ $\overleftrightarrow{ل}_{١} \,//\, \overleftrightarrow{ل}_{٢}$ (معطى)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ل}_{٢} \perp \overleftrightarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftrightarrow{ل}_{٢} \perp \overleftrightarrow{ق}_{٢}$.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ل}_{٢} \perp$ ے (وهو المطلوب) .



شكل (٥ – ٧)

نتائج :

(٢) من نقطة ب لايمكن رسم سوى مستوى واحد عمودي على مستقيم مفروض $\overleftrightarrow{ل}$.

(٣) إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ مستقيماً عمودياً على ے ، ب $\in$ ے ، فإن جميع المستقيمات المارة بالنقطة ب وعمودية على $\overleftrightarrow{ل}$ تقع في ے .

(٤) جميع المستقيمات المرسومة من نقطة واحدة وعمودية على مستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ تقع في مستوى واحد عمودي على المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$.

(٥) من نقطة ب لايمكن رسم سوى مستقيم واحد عمودي على المستوى ے (نقطة ب قد تنتمي للمستوى ے وقد تقع خارجه) .

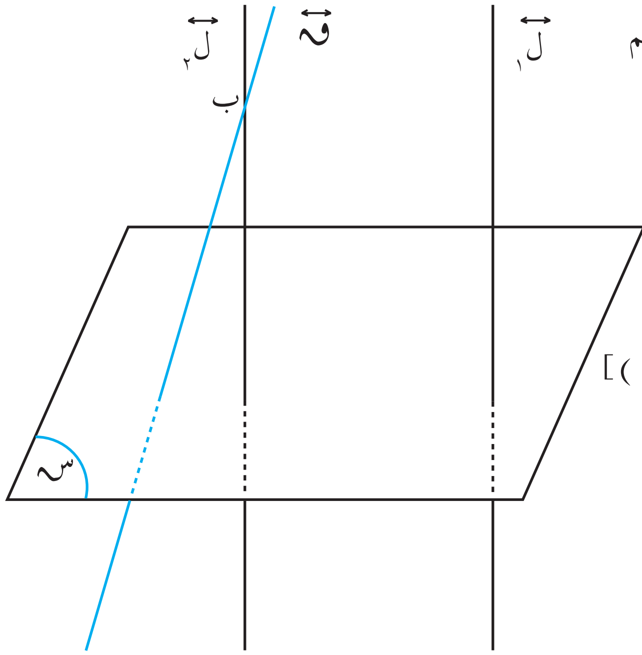
مبرهنة (٥ – ٥)

المستقيمان العموديان على مستوى واحد متوازيان .

المعطيات : $\overleftrightarrow{ل}_{١} \perp$ س ، $\overleftrightarrow{ل}_{٢} \perp$ س [شكل (٥ – ٨)]

المطلوب : إثبات أن $\overleftrightarrow{ل}_{١} \,//\, \overleftrightarrow{ل}_{٢}$.

البرهان : نفرض $\overleftrightarrow{ل}_{١} \not\parallel \overleftrightarrow{ل}_{٢}$



شكل (٥ – ٨)

ولنأخذ نقطة ب $\in \overleftrightarrow{ل}_2$ ونرسم منها المستقيم

$\overleftrightarrow{ق} // \overleftrightarrow{ل}_1$

$\because \overleftrightarrow{ل}_1 \perp$ س

$\therefore \overleftrightarrow{ق} \perp$ س [مبرهنة (٥ – ٤)]

$\because \overleftrightarrow{ل}_2 \perp$ س

$\therefore \overleftrightarrow{ق}$ منطبق على $\overleftrightarrow{ل}_2$ [نتيجة (٥ – ٤)]

$\because \overleftrightarrow{ق} // \overleftrightarrow{ل}_1$

$\therefore \overleftrightarrow{ل}_1 // \overleftrightarrow{ل}_2$ (وهو المطلوب) .

نتيجة (٦) :

المستقيمات العمودية على مستوى واحد متوازية

مثال (٥ – ٢)

إذا كان $\overleftrightarrow{ق}_1$ ، $\overleftrightarrow{ق}_2$ مستقيمين واقعين في ح ، ومتقاطعين في النقطة ب . والمستويان ك$_1$ ، ك$_2$ يمران بالنقطة ب ، بحيث $\overleftrightarrow{ق}_1 \perp$ ك$_1$ ، $\overleftrightarrow{ق}_2 \perp$ ك$_2$ [شكل (٥ – ٩)] .

أثبت أن الفاصل المشترك للمستويين ك$_1$ ، ك$_2$ عمودي على ح .

المعطيات : $\overleftrightarrow{ق}_1 \subset$ ح ، $\overleftrightarrow{ق}_2 \subset$ ح ، $\overleftrightarrow{ق}_1 \cap \overleftrightarrow{ق}_2 = \{$ب$\}$.

ك$_1 \cap$ ك$_2 = \overleftrightarrow{ل}$ ، ب $\in \overleftrightarrow{ل}$.

$\overleftrightarrow{ق}_1 \perp$ ك$_1$ ، $\overleftrightarrow{ق}_2 \perp$ ك$_2$.

المطلوب : إثبات أن : $\overleftrightarrow{ل} \perp$ ح .

البرهان : $\because \overleftrightarrow{ق}_1 \perp$ ك$_1$

$\therefore \overleftrightarrow{ق}_1 \perp \overleftrightarrow{ل}$

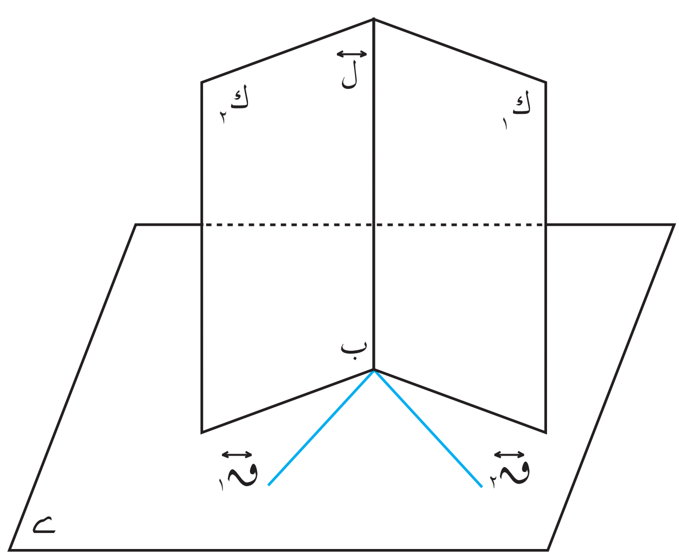
$\because \overleftrightarrow{ق}_2 \perp$ ك$_2$.

$\therefore \overleftrightarrow{ق}_2 \perp \overleftrightarrow{ل}$

$\because \overleftrightarrow{ق}_1$ ، $\overleftrightarrow{ق}_2$ يجمعهم ح .

$\therefore \overleftrightarrow{ل} \perp$ ح

وهو المطلوب .



شكل (٥ – ٩)

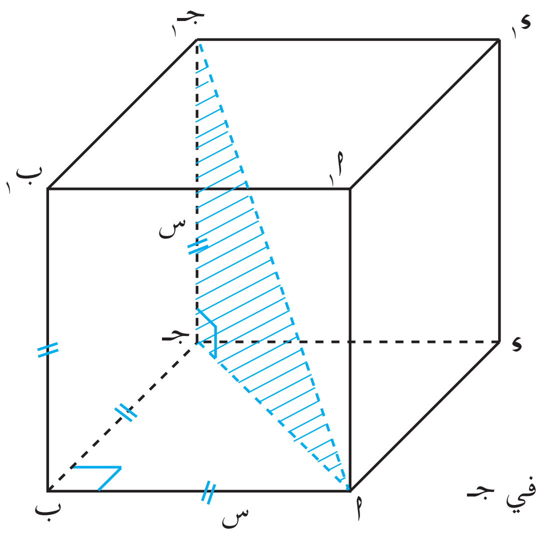
مثال (٥ – ٣)

يبيّن الشكل (٥ – ١٠) مكعباً أ ب جـ ء أ$_{١}$ ب$_{١}$ جـ$_{١}$ ء$_{١}$ طول حرفه (س) . أوجد | أ جـ$_{١}$ | .

المعطيات : أ ب جـ ء أ$_{١}$ ب$_{١}$ جـ$_{١}$ ء$_{١}$ مكعب ،

طول حرفه س .

المطلوب : إيجاد | أ جـ$_{١}$ | .



شكل (٥ – ١٠)

البرهان : ∵ $\overline{\text{جـ جـ}_{١}} \perp \overline{\text{ء جـ}}$

، $\overline{\text{جـ جـ}_{١}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ (لأن الأوجه مربعات)

∴ $\overline{\text{جـ جـ}_{١}} \perp$ المستوى (أ ب جـ ء)

∴ $\overline{\text{جـ}_{١}\text{جـ}} \perp \overline{\text{جـ أ}}$

نطبق مبرهنة فيثاغورث على Δ جـ$_{١}$ جـ أ القائم في جـ

∴ $|\text{أ جـ}_{١}|^{٢} = |\text{أ جـ}|^{٢} + |\text{جـ جـ}_{١}|^{٢}$ .... (١)

∵ $\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ نطبق مبرهنة فيثاغورث على Δ أ ب جـ

∴ $|\text{أ جـ}|^{٢} = |\text{أ ب}|^{٢} + |\text{ب جـ}|^{٢}$ ....(٢)

من (١) ، (٢) نحصل على :

$|\text{أ جـ}_{١}|^{٢} = |\text{أ ب}|^{٢} + |\text{ب جـ}|^{٢} + |\text{جـ}_{١}\text{ جـ}|^{٢}$

∴ $|\text{أ جـ}_{١}|^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{س}^{٢} + \text{س}^{٢}$.

∴ $|\text{أ جـ}_{١}|^{٢} = ٣\,\text{س}^{٢}$.

∴ $|\text{أ جـ}_{١}| = \sqrt{٣}\,\text{س}$ وحدة طولية .

(وهو المطلوب) .

مثال (٥ – ٤)

أ ب جـ مثلث قائم في ب ، أقيم العمود $\overline{\text{ء ب}}$ على مستواه . أثبت أن : $\overline{\text{أ ب}} \perp$ المستوى (ء ب جـ)

المعطيات : Δ أ ب جـ قائم في ب ، $\overline{\text{ء ب}} \perp$ المستوى (أ ب جـ) . [شكل (٥ – ١١)] .

المطلوب : إثبات أن $\overline{\text{أ ب}} \perp$ المستوى (ء ب جـ) .

البرهان : ∵ Δ أ ب جـ قائم في ب

∴ $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{بجـ}}$ ....(١)

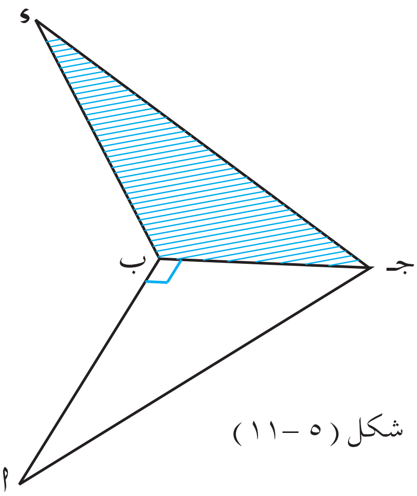
∵ $\overline{\text{ءب}} \perp$ المستوى (أ ب جـ)

∴ $\overline{\text{ءب}} \perp \overline{\text{أب}}$ ....(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$\overline{\text{أب}} \perp$ المستوى (ء ب جـ)

وهو المطلوب .



شكل (٥ – ١١)

تمارين ومسائل (٥ – ٢)

[١] أكمل العبارات التالية :

أ) المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين ....

ب) المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين ....

جـ) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp \text{ى}$ فإن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ عمودي على ....

د) المستوى العمودي على أحد مستقيمين متوازيين ....

هـ) المستويان العموديان على مستقيم واحد ....

و) المستقيمات العمودية على مستوى واحد ....

ز) إذا توازى مستقيمان ، وكان أحدهما عمودياً على مستوٍ ك فإن المستقيم الآخر ....

ح) جميع المستقيمات المرسومة من نقطة واحدة وعمودية على مستقيم مفروض تقع في ....

ط) يتعامد المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ والمستوى ى إذا كان ....

[٢] أثبت أن كل مستقيم من ثلاثة مستقيمات متعامدة عمودي على مستوى المستقيمين الآخرين .

[٣] $\text{ك}_١$ ، $\text{ك}_٢$ مستويان متوازيان فرضت النقطتان أ ، ب في المستوى $\text{ك}_١$ ، ثم رسم العمودان $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{بء}}$ على المستوى $\text{ك}_٢$. أثبت أن الشكل أ جـ ء ب مستطيل .

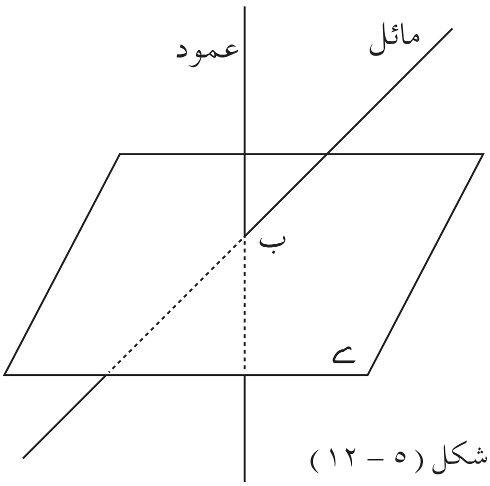
[٤] $\overleftrightarrow{\text{ل}_١}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}_٢}$ مستقيمان متوازيان ، أ نقطة خارج مستويهما ؛ أنزل العمود $\overline{\text{أب}}$ على $\overleftrightarrow{\text{ل}_١}$ ، ومن ب رسم $\overline{\text{بجـ}}$ عمودياً على $\overleftrightarrow{\text{ل}_٢}$ ، أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{ل}_٢} \perp \overleftrightarrow{\text{أجـ}}$.

[٥] ب ، جـ ، ء ثلاث نقاط على الدائرة م ، أقيم $\overline{\text{م أ}}$ عمودياً على مستوى الدائرة . أثبت أن $|\text{أب}| = |\text{أجـ}| = |\text{أء}|$.

[٦] ب جـ ء ، ب جـ أ مثلثان لايجمعهما مستوى واحد بحيث ق(∠ ء ب جـ) = ٩٠° ، $|\text{أب}| = |\text{ءب}|$ ، $|\text{أجـ}| = |\text{ءجـ}|$ ، اثبت أن $\overline{\text{بجـ}} \perp \overline{\text{أء}}$.

٥ – ٢ العمـــود والمـــائل

تعلم أنه من نقطة ب الواقعة في المستوى ے ، تستطيع أن ترسم مستقيماً وحيداً عمودياً على المستوى ے ، وكل مستقيم آخر يمر بالنقطة ب غير المستقيم العمودي يكون مائلاً على المستوى [شكل (٥ – ١٢)] .



شكل (٥ – ١٢)

تعريف (٥ – ٢)

المائل هو المستقيم القاطع لمستوى ، وليس عمودياً عليه

(مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

مبرهنة (٥ – ٦)

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مستقيمين متعامدين واقعين في المستوى س ، وكان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp$ س ؛ فإن $\overleftrightarrow{\text{ء جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$.

المعطيات : $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ واقعان في س ،

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp$ س [شكل (٥ – ١٣)]

المطلوب : إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{ء جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ ،

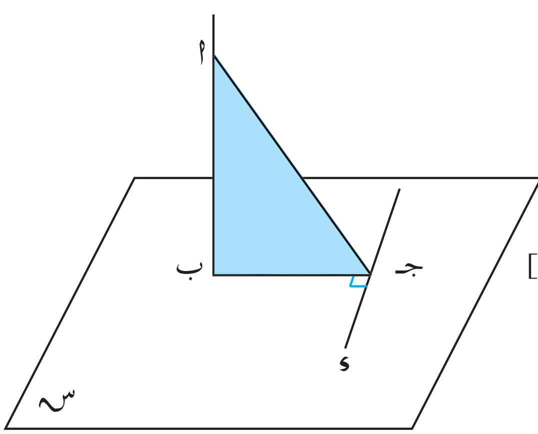
البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp$ س (معطى)

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{ء جـ}}$ .....(١) [حقيقة (٥ – ١)]

∵ $\overleftrightarrow{\text{ء جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ .....(٢) (معطى)

∴ $\overleftrightarrow{\text{ء جـ}} \perp$ المستوى (أ ب جـ) [مبرهنة (٥ – ١)]

∴ $\overleftrightarrow{\text{ء جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ [حقيقة (٥ – ١)] (وهو المطلوب) .



شكل (٥ – ١٣)

عكس المبرهنة (٥ – ٦) :

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مستقيمين متعامدين واقعين في المستوى س ، أ $\not\ni$ س ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ؛ فإن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp$ س .

تدريب (٥ – ١)

برهن عكس مبرهنة (٥ – ٦) .

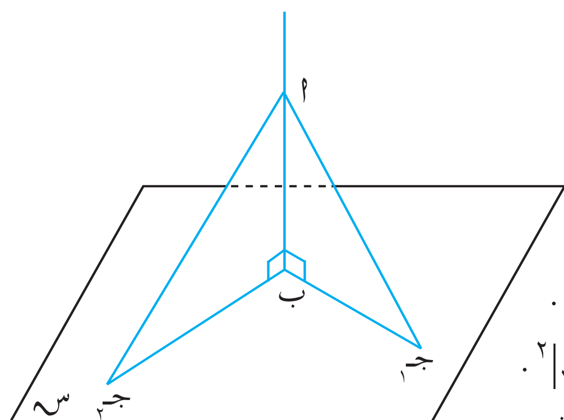
مبرهنة العمود والمائل

مبرهنة (٥ - ٧)

إذا كان أب↔ ⊥ س ، جـ١ ، جـ٢ نقطتين في س ، فإن :

١) | ب جـ١ | > | ب جـ٢ | ⟸ | ا جـ١ | > | ا جـ٢ | .

٢) | ب جـ١ | = | ب جـ٢ | ⟺ | ا جـ١ | = | ا جـ٢ | .



شكل (٥ - ١٤)

المعطيات : أب↔ ⊥ س ، ، جـ١ ∈ س ، جـ٢ ∈ س ،
| ب جـ١ | > | ب جـ٢ | [شكل (٥ - ١٤)]

المطلوب : إثبات أن | ا جـ١ | > | ا جـ٢ | .

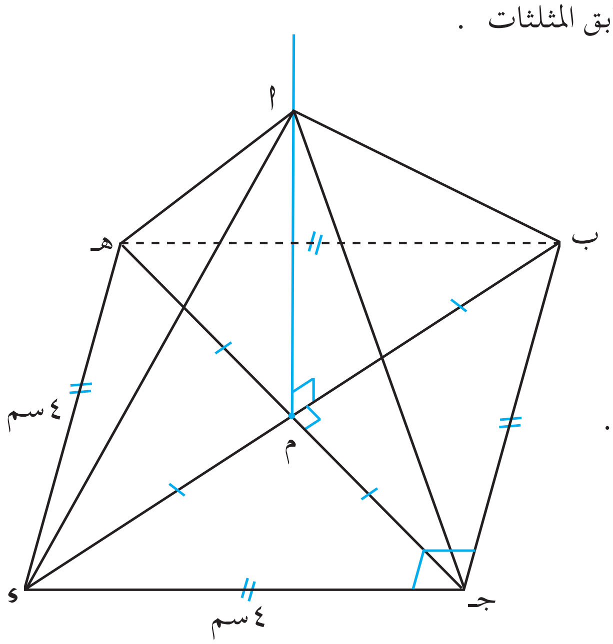
البرهان : ∵ | ب جـ١ | > | ب جـ٢ | (بالتربيع) .
∴ | ب جـ١ |² > | ب جـ٢ |² (نضيف | ا ب |²) .
∴ | ا ب |² + | ب جـ١ |² > | ا ب |² + | ب جـ٢ |² .
∴ | ا جـ١ |² > | ا جـ٢ |² (مبرهنة فيثاغورث) .
∴ | ا جـ١ | > | ا جـ٢ | . (وهو المطلوب) .

تدريب (٥ - ٢)

أثبت الفقرة (٢) في مبرهنة (٥ - ٧) باستخدام تطابق المثلثات .

مثال (٥ - ٥)

ب جـ ء هـ مربع طول ضلعه ٤ سم ، أقيم من مركزه م عمود على مستواه ، ا نقطة على هذا العمود [شكل (٥ - ١٥)] .



شكل (٥ - ١٥)

١) أثبت أن : | ا ب | = | ا جـ | = | ا ء | = | ا هـ | .

٢) إذا كان | ا م | = | ب م | ، أثبت أن | ا ب | = ٤ سم .

المعطيات : ب جـ ء هـ مربع ، | ب جـ | = ٤ سم ،
ا م ⊥ المستوى (ب جـ ء هـ) ،
| ا م | = | ب م | .

المطلوب : أثبات أن ١) | ا ب | = | ا جـ | = | ا ء | = | ا هـ | .

٢) $|$ أ ب $|$ = ٤ سم

البرهان : ١) ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ ⊥ المستوى (ب جـ ء هـ)

، ∵ $|$ م ب $|$ = $|$ م جـ $|$ = $|$ م ء $|$ = $|$ م هـ $|$ (خواص المربع)

∴ $|$ أ ب $|$ = $|$ أ جـ $|$ = $|$ أ ء $|$ = $|$ أ هـ $|$ [مبرهنة (٥ –٧)]

(وهو المطلوب أولاً)

٢) نوجد $|$ ب ء $|$ عن طريق تطبيق مبرهنة فيثاغورث على Δ ب جـ ء القائم في جـ .

∴ $|$ ب ء $|^٢$ = $|$ ب جـ $|^٢$ + $|$ جـ ء $|^٢$ ، ∵ $|$ ب جـ $|$ = $|$ جـ ء $|$ = ٤ سم

∴ $|$ ب ء $|^٢$ = (٤)^٢ + (٤)^٢ ، ∴ $|$ ب ء $|^٢$ = ٣٢ ، ∴ $|$ ب ء $|$ = ٤ $\sqrt{٢}$ سم

، ∵ $|$ م ب $|$ = $\frac{١}{٢}$ $|$ ب ء $|$ ، ∴ $|$ م ب $|$ = ٢ $\sqrt{٢}$ سم

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ ⊥ المستوى (ب جـ ء هـ) (معطى)

∴ $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ $\overline{\text{م ب}}$

وبتطبيق مبرهنة فيثاغورث على Δ أ م ب القائم في م .

∴ $|$ أ ب $|^٢$ = $|$ أ م $|^٢$ + $|$ م ب $|^٢$ ، ∵ $|$ أ م $|$ = $|$ م ب $|$ (معطى)

∵ $|$ م ب $|$ = ٢ $\sqrt{٢}$ سم (إثباتاً)

∴ $|$ أ ب $|^٢$ = (٢ $\sqrt{٢}$)^٢ + (٢ $\sqrt{٢}$)^٢ ⟸ $|$ أ ب $|^٢$ = ١٦

∴ $|$ أ ب $|$ = ٤ سم (وهو المطلوب ثانيا) .

مثال (٥ – ٦)

ب ، جـ ، ء ، هـ أربع نقاط ليست في مستوى واحد بحيث أن :

ق (∡ جـ ء هـ) = ق (∡ ب ء هـ) = ٩٠° ، س ، ص منتصفي $\overline{\text{ء جـ}}$ ، $\overline{\text{هـ جـ}}$ على الترتيب ؛ المستوى ك يحوي $\overline{\text{س ص}}$ وموازيا $\overline{\text{ب جـ}}$ وقاطعا $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ في $س_١$ ، $ص_١$ على الترتيب [شكل (٥–١٦)] .

أثـبـت أولاً : أن $\overline{\text{س ص}}$ ⊥ المستوى (ب جـ ء) .

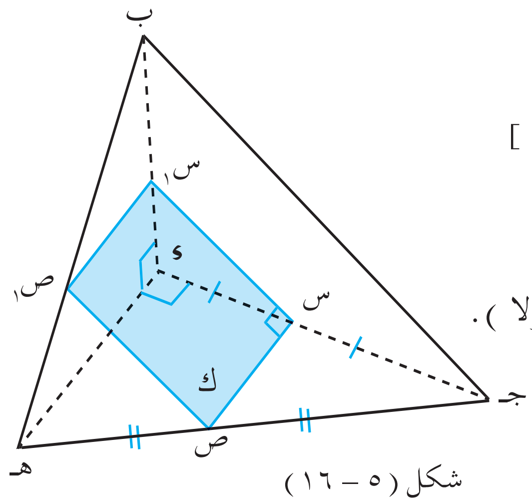
ثانياً : أن الشكل س ص $ص_١$ $س_١$ مستطيل .

المعطيات : ب جـ ء هـ رباعي سطوح ، ق(∡ جـ ء هـ) = ق (∡ ب ء هـ) = ٩٠°

$\overline{\text{ب جـ}}$ // ك ، $|$ جـ س $|$ = $|$ س ء $|$ ، $|$ جـ ص $|$ = $|$ ص هـ $|$.

المطلوب : إثبات أن أولاً : $\overline{\text{س ص}}$ ⊥ المستوى (ب جـ ء) .

ثانياً : الشكل س ص $ص_١$ $س_١$ مستطيل .



شكل (٥ – ١٦)

البرهان : ∵ ق (∢ جـ ء هـ) = ق (∢ ب ء هـ) = ٩٠°

∴ $\overline{\text{هـ ء}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{هـ ء}} \perp \overline{\text{ب ء}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{هـ ء}} \perp$ المستوى (ب جـ ء) [مبرهنة (٥ – ١)]

∵ س ، ص منتصفا $\overline{\text{ء جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$

∴ $\overline{\text{س ص}}$ $\perp$ المستوى (ب جـ ء) (هـ.ط أولا) .

∵ $\overline{\text{ب جـ}}$ // ك

∵ ك يقطع المستويين (ب جـ ء) ، (ب جـ هـ)

في $\overline{\text{س س}_١}$ ، $\overline{\text{ص ص}_١}$

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{س س}_١}$ // $\overline{\text{ص ص}_١}$ .... (١) (من مبرهنات التوازي)

∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س ص}} \subset$ ك ، ∴ $\overline{\text{ء هـ}}$ // ك

∵ ك يقطع المستوى (ب ء هـ) في $\overline{\text{س}_١\text{ص}_١}$ ، ∴ $\overline{\text{س}_١\text{ص}_١}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$

∴ $\overline{\text{س}_١\text{ص}_١}$ // $\overline{\text{س ص}}$ ....(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل س ص ص١ س١ متوازي أضلاع .

الآن نبرهن أن إحدى الزوايا قائمة .

∵ $\overline{\text{س ص}} \perp$ المستوى (ب جـ ء) ، ∴ $\overline{\text{س ص}} \perp \overline{\text{س س}_١}$

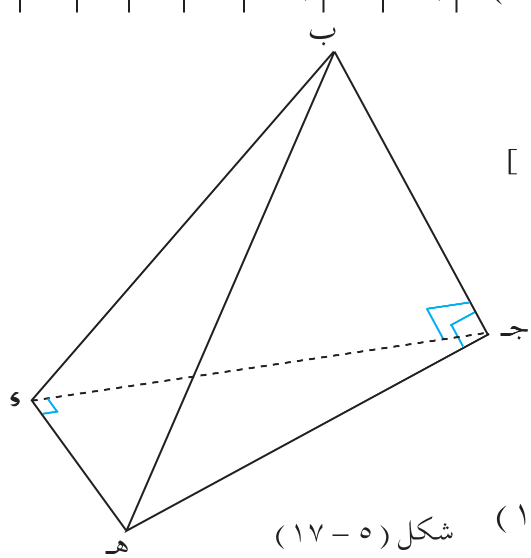
∴ ق (∢ س١ س ص) = ٩٠°

∴ الشكل س ص ص١ س١ مستطيل (وهو المطلوب ثانيا) .

مثال (٥ – ٧)

ب جـ ء هـ رباعي سطوح ، فيه $\overline{\text{ب جـ}} \perp$ المستوى (جـ ء هـ) ، $|\text{ب هـ}|^٢ = |\text{ب جـ}|^٢ + |\text{جـ ء}|^٢ + |\text{ء هـ}|^٢$ ،

أثبت أن : $\overline{\text{ء هـ}} \perp$ المستوى (ب جـ ء) .



شكل (٥ – ١٧)

المعطيات : ب جـ ء هـ رباعي سطوح .

$\overline{\text{ب جـ}} \perp$ المستوى (جـ ء هـ) [الشكل (٥–١٧)]

$|\text{ب هـ}|^٢ = |\text{ب جـ}|^٢ + |\text{جـ ء}|^٢ + |\text{ء هـ}|^٢$

المطلوب: إثبات أن $\overline{\text{ء هـ}} \perp$ المستوى (ب جـ ء)

البرهان : ∵ $\overline{\text{ب جـ}} \perp$ المستوى (جـ ء هـ)

∴ $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{جـ هـ}}$ [عكس حقيقة (٥ – ١)]

نطبق مبرهنة فيثاغورث على Δ ب جـ هـ

∴ $|\text{ب هـ}|^٢ = |\text{ب جـ}|^٢ + |\text{جـ هـ}|^٢$ .... (١)

∵ $|\text{ب هـ}|^2 = |\text{ب جـ}|^2 + |\text{جـ ء}|^2 + |\text{ء هـ}|^2$ (معطى) ....(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن $|\text{جـ هـ}|^2 = |\text{جـ ء}|^2 + |\text{ء هـ}|^2$

∴ Δ جـ ء هـ قائم في ء (عكس مبرهنة فيثاغورث)

∴ $\overline{\text{هـ ء}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ .... (٣)

∵ $\overline{\text{ب جـ}} \perp$ المستوى (جـ ء هـ)

∴ $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{هـ ء}}$ .... (٤)

من (٣) ، (٤) ينتج أن :

$\overline{\text{هـ ء}} \perp$ المستوى (ب جـ ء) [مبرهنة (٥ – ١)] (وهو المطلوب) .

مثال (٥ – ٨)

في الشكل (٥–١٨) $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}_2$ مستقيمان متوازيان في ح ، م $\notin$ ح ، $\overleftrightarrow{\text{م د}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ ، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}_2$

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1 \perp$ المستوى (م د هـ) .

المعطيات : $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1 \parallel \overleftrightarrow{\text{ل}}_2$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}_2$ واقعان في ح .

$\overline{\text{م د}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ ، $\overline{\text{د هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}_2$.

المطلوب : إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1 \perp$ المستوى (م د هـ)

البرهان : ∵ $\overline{\text{د هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}_2$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1 \parallel \overleftrightarrow{\text{ل}}_2$

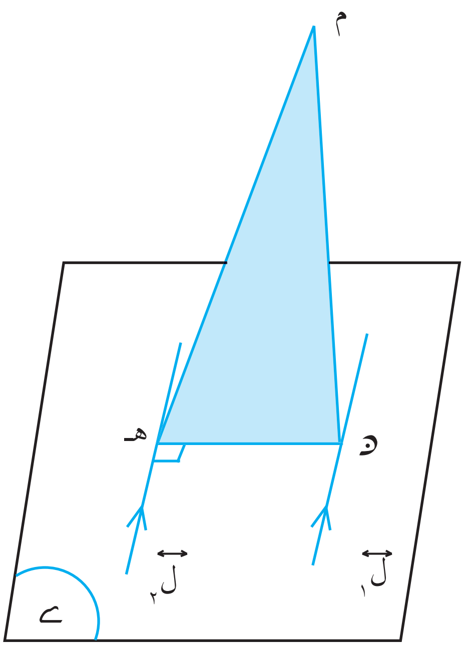
∴ $\overline{\text{د هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ ....(١)

∵ $\overline{\text{م د}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ ....(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$\overleftrightarrow{\text{ل}}_1 \perp$ المستوى (م د هـ) [مبرهنة (٥–١)]

(وهو المطلوب)



شكل (٥ – ١٨)

تمارين ومسائل (٥-٣)

[١] $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مستقيمان متعامدان في ح ، $\overline{\text{ب أ}} \perp$ ح ، حيث أ $\notin$ ح ؛ أثبت أن : $\overline{\text{جـ ء}} \perp \overline{\text{جـ أ}}$.

[٢] $\overline{\text{أ ب}} \perp$ ح ، ء$_1$ ، ء$_2$ نقطتان في ح ، $|\text{أ ء}_1| = |\text{أ ء}_2|$ ؛ أثبت أن : $|\text{ب ء}_1| = |\text{ب ء}_2|$.

[٣] أ ب جـ مثلث قائم في ب ، $\overline{\text{ء أ}} \perp$ المستوى (أ ب جـ) . أثبت أن :

أولاً : $|\text{ء جـ}|^2 = |\text{ء أ}|^2 + |\text{أ ب}|^2 + |\text{ب جـ}|^2$. ثانياً : $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{ء ب}}$.

[٤] أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ٦ سم ، أقمنا $\overline{\text{د م}}$ عموداً على مستواه من مركزه (م) ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $|\text{م د}| = ٤$ سم ؛

أولاً : أثبت أن $\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{د هـ}}$.

ثانياً : أثبت أن $|\text{د أ}| = |\text{د ب}|$.

ثالثاً : أوجد طول $\overline{\text{د هـ}}$ ، ثم أوجد مساحة كل من المثلثات د م هـ ، أ ب د ، أ ب م .

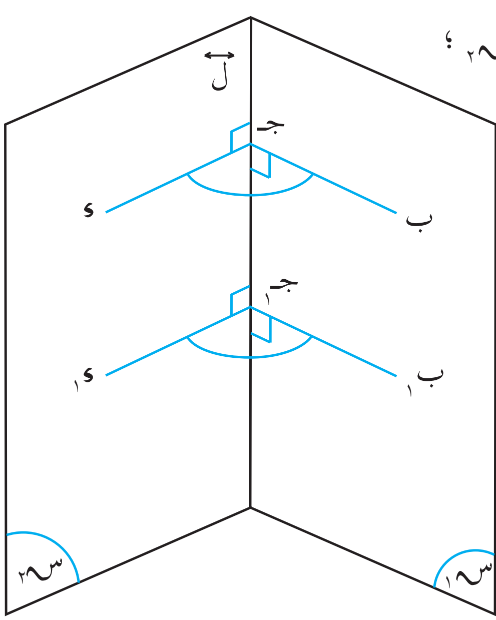
[٥] ب جـ ء مثلث قائم في جـ ؛ أقمنا من ب العمود $\overline{\text{أ ب}}$ على مستواه ؛ بحيث $|\text{أ ب}| = |\text{ء جـ}| = ٢\,|\text{ب جـ}|$

أثبت أن : $|\text{أ ء}| = ٣\,|\text{ب جـ}|$.

[٦] $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مستقيمان متعامدان في المستوى ح ، أ $\notin$ ح ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$. أثبت ان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp$ ح .

٥ – ٣ الزاوية الزوجيّة

تعرف أن هناك أربعة أوضاع نسبية للمستويين س$_1$ ، س$_2$ ؛ ومن هذه الأوضاع أن يكون المستويان متقاطعين في $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ [شكل (٥ – ١٩)] . والجزء من الفراغ المحدَّد بنصفي المستويين س$_1$ ، س$_2$ والمستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ تسمى بالزاوية الزوجية (الثنائية) .



شكل (٥ – ١٩)

تعريف (٥ – ٣)

الزاوية الزوجية هي اتحاد نصفي مستويين س$_1$ ، س$_2$ بجبهة مشتركة $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ؛ تسمّى الجبهة المشتركة بحرف الزاوية الزوجية ، ويسمّى كلّ من نصفي المستويين س$_1$ ، س$_2$ وجهي الزاوية الزوجية .

يرمز للزاوية الزوجية بين $س_١$ ، $س_٢$ بالرمز ∡($س_١$ $\overleftrightarrow{ل}$ $س_٢$) ، كما يرمز لها بالرمز ∡ل ، وإذا اخترنا النقطة جـ على المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ ورسمنا منها $\overline{ب جـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ل}$ ، بحيث $\overline{ب جـ}$ ⊂ $س_١$ ، ثم نرسم $\overline{ء جـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ل}$ ، بحيث $\overline{ء جـ}$ ⊂ $س_٢$ سنحصل على زاوية مستوية هي ∡(ب جـ ء) ؛ تسمّى هذه الزاوية بالزاوية الخطِّية للزاوية الزوجية ($س_١$ $\overleftrightarrow{ل}$ $س_٢$)، ويمكن اختيار النقطة جـ في أي موضع من $\overleftrightarrow{ل}$ ، فنجد أن : ق(∡ ب جـ ء)= ق(∡ $ب_١$ $جـ_١$ $ء_١$) .

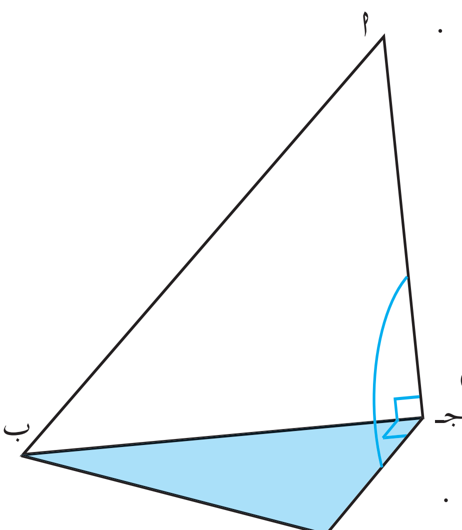
تعريف (٥ – ٤)

الزاوية الخطِّية هي زاوية مستوية مرسومة في وجهي الزاوية الزوجية بحيث يكون ضلعاها عموديين على حرف الزاوية الزوجية .

قياس الزاوية الزوجية هو قياس زاويتها الخطية .

مثال (٥ – ٩)

ب جـ ء مثلث قائم في جـ ، أ نقطة خارجة عن مستواه ، بحيث $\overline{أ جـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$. أثبت أن ∡(أ جـ ء) هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية بين المستويين (ب جـ ء) ، (أ ب جـ) .



شكل (٥ – ٢٠)

المعطيات : ب جـ ء مثلث قائم في جـ ، $\overline{أ جـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$
[شكل (٥–٢٠)] .

المطلوب : إثبات أن ∡(أ جـ ء) هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية بين المستويين (ب جـ ء) ، (أ ب جـ)

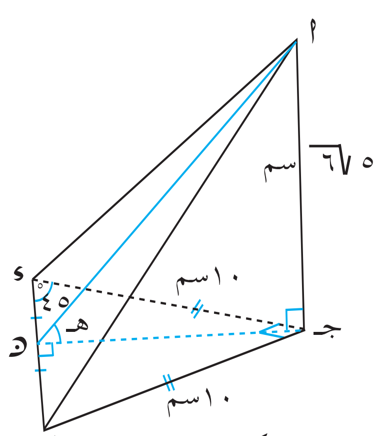
البرهان : ∵ المستوى (ب جـ ء) ∩ المستوى(أ ب جـ) = $\overline{ب جـ}$

∵ $\overline{ء جـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، ∵ $\overline{أ جـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ (معطى)

∴ ∡(أ جـ ء) هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية بين المستويين (ب جـ ء) ، (أ ب جـ) [تعريف (٥–٤)] .

مثال (٥ – ١٠)

ب جـ ء مثلث قائم في جـ ، |ب جـ| = |ء جـ| = ١٠ سم ، $\overline{أ جـ}$ ⊥ المستوى (ب جـ ء) . احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين (أ ب ء) ، (جـ ب ء) ، إذا علمت أن | أ جـ| = ٥ $\sqrt{٦}$ سم .



شكل (٥ – ٢١)

المعطيات : Δ ب جـ ء قائم في جـ .

|ب جـ| = |ء جـ| = ١٠ سم ،

$\overline{أ جـ}$ ⊥ المستوى (ب جـ ء)

|أ جـ| = ٥ $\sqrt{٦}$ سم [شكل (٥–٢١)]

المطلوب : حساب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين (أ ب ء) ، (جـ ب ء)

الحـــل : ننصف $\overline{\text{ب ء}}$ في النقطة د

∵ |ب جـ| = |ء جـ| (معطى)

∴ $\overline{\text{جـ د}} \perp \overline{\text{ب ء}}$ (خواص المثلث المتساوي الساقين)

∵ $\overline{\text{أ جـ}} \perp$ المستوى (ب جـ ء) (معطى)

∵ $\overline{\text{جـ د}} \perp \overline{\text{ء ب}}$ (استنتاجاً)

∴ $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ء ب}}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

∵ المستوى (أ ب ء) $\cap$ المستوى (جـ ب ء) = $\overline{\text{ب ء}}$

∴ ∡ (أ د جـ) هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية بين المستويين (أ ب ء) ، (جـ ب ء)

لنرمز لها بالرمز هـ .

∵ ب جـ ء Δ متساوي الساقين وقائم في جـ ، ∴ ق(∡ ب) = ق(∡ ء) = ٤٥° .

$$\text{جا}(\measuredangle\,\text{ء}) = \frac{|\text{د جـ}|}{|\text{ء جـ}|} \Longleftarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|\text{د جـ}|}{10} .$$

$$\therefore |\text{د جـ}| = \frac{10}{\sqrt{2}} \Longleftarrow |\text{د جـ}| = 5\sqrt{2} \ \text{سم} .$$

∵ |أ جـ| = $5\sqrt{6}$ سم

$$\because \text{ظا هـ} = \frac{|\text{أ جـ}|}{|\text{د جـ}|}$$

$$\therefore \text{ظا هـ} = \frac{5\sqrt{6}}{5\sqrt{2}}$$

$$\therefore \text{ظا هـ} = \sqrt{3}$$

∴ هـ = ٦٠° .

تعريف (٥ – ٥)

يتعامد مستويان إذا كانت زاويتهما الخطية قائمة .

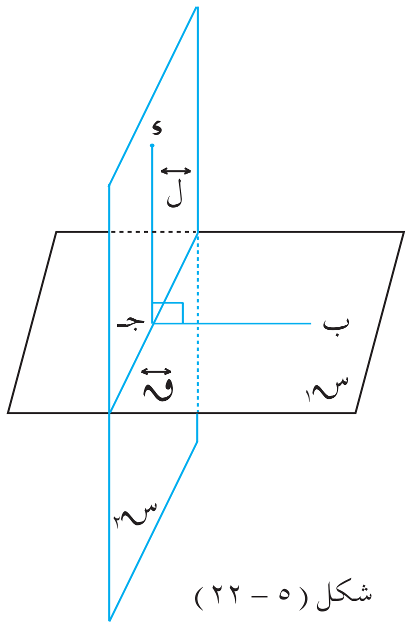
تأمل الشكل (٥ – ٢٢)

ق $\measuredangle$ (ب جـ ء) = ٩٠°

وهي زاوية خطية للزاوية الزوجية (س$_1$ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ س$_2$)

∴ ق [$\measuredangle$ (س$_1$ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ س$_2$)] = ٩٠°

∴ س$_1$ $\perp$ س$_2$.



شكل (٥ – ٢٢)

تعريف (٥ – ٦)

الزاويتان الزوجيتان المتطابقتان هما زاويتان قياسا زاويتيهما الخطيتين متساويان .

ملاحظة :

١) إذا تقاطع مستويان فإننا نحصل على أربع زوايا زوجية وكل زاويتين متقابلتين بالحرف متساويتان بالقياس وكل زاويتين متجاورتين متكاملتان .

٢) الزاوية الزوجية بين مستويين غير منطبقين هي الزاوية الأصغر بينهما .

مبرهنة (٥ – ٨)

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ مستقيما عموديا على مستوى ے ؛ فإن كل مستوى ك ماراً بالمستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يكون عموديا على ے .

المعطيات : $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ $\perp$ ے ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ $\subset$ ك ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ $\cap$ ے = { ب } .

ك $\cap$ ے = $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ [شكل (٥ – ٢٣)]

المطلوب : إثبات أن ے $\perp$ ك .

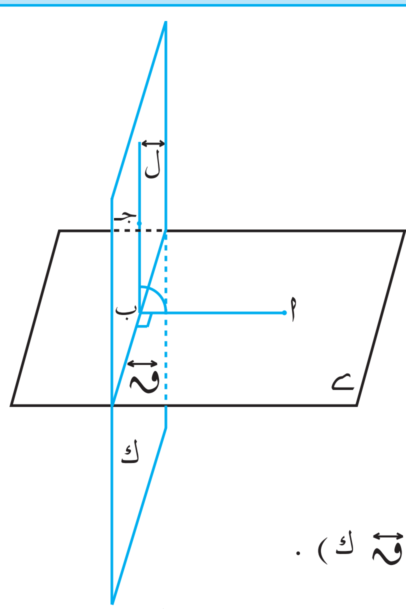
البرهان : نرسم في ے القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{\text{ق}}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ $\perp$ ے ، ∵ $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ $\subset$ ے

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ [عكس حقيقة (٥ – ١)]

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ (عملاً)

∴ $\measuredangle$ (أ ب جـ) هي الزاوية الخطية للزاوية الزوجية (ے $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ ك) .



شكل (٥ – ٢٣)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ل} \perp \overline{أ ب}$ [حقيقة (٥ – ١)]

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ أ ب جـ) = ٩٠°

$\therefore$ ق [$\measuredangle$ (ے $\widehat{ق}$ ك)] = ٩٠°

$\therefore$ ے $\perp$ ك   (وهو المطلوب) .

نتيجة (٧) :

إذا كان ك ، ے مستويين متعامدين ، فإن كل مستقيم عمودي على ے من نقطة ب $\in$ ك يقع في ك .

مبرهنة (٥ – ٩)

إذا تعامد كل من المستويين س١ ، س٢ مع مستوى ثالث ص، فإن الفاصل المشترك للمستويين س١ ، س٢ عمودي على المستوى ص .

المعطيات : س١ $\perp$ ص ، س٢ $\perp$ ص ،

س١ $\cap$ س٢ = $\overleftrightarrow{ل}$ [شكل (٥ – ٢٤)]

المطلوب : إثبات أن $\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ ص .

البرهان : نفرض أن $\overleftrightarrow{ل}$ $\not\perp$ ص

لنأخذ نقطة أ $\in$ $\overleftrightarrow{ل}$

نرسم منها $\overleftrightarrow{أ ب}$ $\perp$ ص

$\because$ أ $\in$ $\overleftrightarrow{ل}$ ، $\therefore$ أ $\in$ س١ ،

$\because$ س١ $\perp$ ص

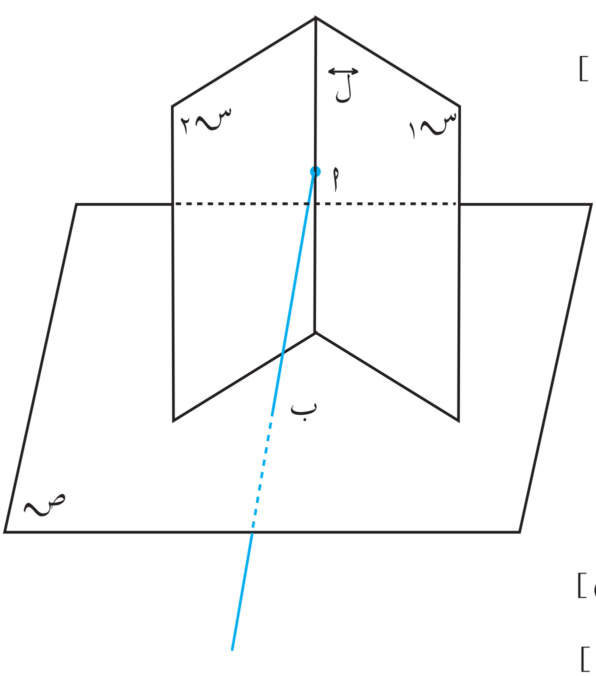
$\therefore$ $\overleftrightarrow{أ ب}$ $\subset$ س١   [نتيجة (٧)]

بالمثل نجد $\overleftrightarrow{أ ب}$ $\subset$ س٢   [نتيجة (٧)]

$\therefore$ $\overleftrightarrow{أ ب}$ هو الفاصل المشترك للمستويين س١ ، س٢

$\therefore$ $\overleftrightarrow{أ ب}$ منطبق على $\overleftrightarrow{ل}$

$\because$ $\overleftrightarrow{أ ب}$ $\perp$ ص ، $\therefore$ $\overleftrightarrow{ل}$ $\perp$ ص   (وهو المطلوب) .



شكل (٥ – ٢٤)

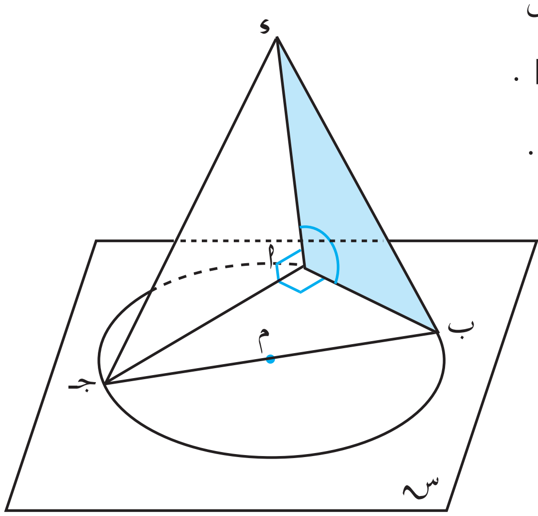
مثال (٥ – ١١)

م دائرة في المستوى س ، قطرها ب جـ ، ا نقطة على محيطها ، ء ∌ س ، رسم ء ا ⊥ ا جـ [شكل (٥ – ٢٥)] .

المطلوب: أولاً : حدِّد الزاوية الخطية للمستويين (ا جـ ء) ، س .

ثانياً : أثبت أن المستويين (ا ب ء) ، س متعامدان .

ثالثاً : أثبت أن المستويين (ا ب ء) ، (ا جـ ء) متعامدان .



شكل (٥ – ٢٥)

المعطيات : الدائرة (م) واقعة في المستوى س ، ء ∌ س

ء ا ⊥ ا جـ ، ب جـ قطر الدائرة (م)

ا نقطة على الدائرة (م) .

المطلوب : أولاً: حدِّد الزاوية الخطّية للمستويين (ا جـ ء) ، س .

ثانياً : أثبت أن (ا ب ء) ⊥ س .

ثالثاً : أثبت أن (ا ب ء) ⊥ (ا جـ ء) .

البرهـان : ∵ ق ∡ (ب ا جـ) = ٩٠° (محيطية في نصف دائرة)

∴ ب ا ⊥ ا جـ

∵ ء ا ⊥ ا جـ (معطى)

∵ (ا جـ ء) ∩ س = ا جـ

∴ ∡ ء ا ب هي الزاوية الخطية للمستويين (ا جـ ء) ، س (وهو المطلوب أولاً) .

∵ جـ ا ⊥ ا ء ، ∵ جـ ا ⊥ ا ب

∴ جـ ا ⊥ المستوى (ا ب ء) [مبرهنة (٥–١)]

∵ جـ ا ⊂ س

∴ (ا ب ء) ⊥ س [مبرهنة (٥–٨)] (وهو المطلوب ثانياً)

∵ جـ ا ⊂ (ا جـ ء)

∵ جـ ا ⊥ (ا ب ء) (إثباتاً)

∴ (ا جـ ء) ⊥ (ا ب ء) [مبرهنة (٥–٨)] (وهو المطلوب ثالثاً) .

تمارين ومسائل (٥-٤)

[١] أكمل ما يلي :

١) نقول عن زاويتين زوجيتين أنهما متساويتان بالقياس إذا كان .... .

٢) يتعامد مستويان إذا كانت زاويتهما الخطية .... .

٣) يتعامد مستويان إذا كان في أحدهما مستقيم عمودي على .... .

٤) إذا تعامد كل من المستويين ى$_١$ ، ى$_٢$ مع مستوى ثالث ك فإن الفاصل المشترك للمستويين ى$_١$ ، ى$_٢$ ....

٥) إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على الفاصل المشترك للمستويين كان هذا المستقيم .... .

٦) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp$ ى ، $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp \overleftrightarrow{\text{ق}}$ ، فإن $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ ، ى ....

٧) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ والمستوى ك عمودين على المستوى ى فإن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ .... ك أو $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ .... .

[٢] أثبت أنه إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp \overleftrightarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp$ ى ، فإن $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ // ى .

[٣] أثبت أنه إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp$ ى ، ك $\perp$ ى ، فإن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // ك .

[٤] إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ مستقيماً ليس عمودياً على مستوى ى ،فأثبت أنه لا يمكن رسم سوى مستوى واحد فقط مار بالمستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ وعمودي على ى .

[٥] ا ب جـ مثلث فيه ق($\measuredangle$ ا) = ٣٠° ، $\overleftrightarrow{\text{ء ب}} \perp$ المستوى (ا ب جـ) ، رسم $\overline{\text{ب و}} \perp \overline{\text{ا جـ}}$ بحيث كان | ب و | = ٥ سم :

أ) أوجد | ا ب | ،
ب) برهن أن $\overline{\text{ا جـ}} \perp \overline{\text{ء و}}$.

جـ) أوجد ق($\measuredangle$ ء و ب) إذا علمت أن : | ء ب | = ٥ $\sqrt{٣}$ سم .

[٦] $\overline{\text{ا ء}} \perp$ مستوى المثلث ا ب جـ القائم الزاوية في ب ، | ا جـ | = ٤ سم ، | ا ء | = ٢ سم ، ق($\measuredangle$ ب ا جـ) = ٦٠° :

أ) برهن أن الزاوية الخطية للمستويين (ا ب جـ) ، (ء ب جـ) هي زاوية ا ب ء ، ثم أوجد قياسها .

ب) برهن أن المستوى (ا ب ء) $\perp$ المستوى (ا ب جـ) .

جـ) حدِّد الزاوية الخطية بين المستويين (ء ا ب) ، (ء ا جـ) وأوجد قياسها .

٦ – ١ نهايات وإتصال الدوال المثلثية

تعرّفت في الصف الثاني الثانوي على مفهوم النهايات والاتصال لدوال كثيرات الحدود، الكسرية ، والجذرية ...الخ ، وهنا سوف تتعرف على مفهوم نهايات واتصال الدوال المثلثية .

أولاً : نهايات الدوال المثلثية :

تذكر أن :

إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow أ^+}$ د (س) = $\lim\limits_{س \leftarrow أ^-}$ د (س) = ل ، فإن : $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ د (س) = ل ، ل $\in$ ح موجودة عند النقطة س = أ .

فمثلاً : لكل س $\in$ ح مقدرة بالراديان نجد بالتعويض المباشر أن : $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ جا س = جا (٠) = ٠ ،

$\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ جتا س = جتا أ .

مثال (٦ – ١)

أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow \frac{\pi}{٣}}$ (جا س + جتا س) .

الحـــل :

$$\lim_{س \leftarrow \frac{\pi}{٣}} (\text{جا س} + \text{جتا س}) = \lim_{س \leftarrow \frac{\pi}{٣}} \text{جا س} + \lim_{س \leftarrow \frac{\pi}{٣}} \text{جتا س} = \text{جا } \frac{\pi}{٣} + \text{جتا } \frac{\pi}{٣}$$

$$= \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢} \, .$$

مبرهنة (٦ – ١)

إذا كانت س مقدرة بالراديان ، فإن : $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$

ولتوضيح المبرهنة نلاحظ بالتعويض المباشر عن س = ٠ أن : $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = \frac{٠}{٠}$ (عدم تعيين)

لكن الدالة معرفة في الجوار المحذوف للعدد صفر ، على النحو الموضّح في الجدول (٦ – ١) التالي عنـدما س $\leftarrow$ ٠ ، س $\neq$ ٠ .

جدول (٦ – ١)

س	١	٠,١	٠,٠١	← ٠ →	–٠,٠١	–٠,١	–١
$\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$	٠,٨٤١٤٧	٠,٩٩٨٣٣	٠,٩٩٩٩٨	← ١ →	٠,٩٩٩٩٨	٠,٩٩٨٣٣	٠,٨٤١٤٧

لذا نلاحظ من الجدول (٦ – ١) أن : $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ ← ١ عندما س ← ٠ .

نتيجة (١) :

١) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{جا س}} = ١$ ،   ٢) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ك س}}{\text{س}} = \text{ك}$ ،

٣) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$ ،   ٤) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{\text{د}}\text{س}}{\text{س}^{\text{د}}} = ١$.

مثال (٦ – ٢)

أوجد أ) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٥ س}}{\text{٦ س}}$.   ب) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}$ س ظتا س .

الحـــل :

أ) بفرض أن : ص = ٥س $\Leftarrow$ س = $\frac{\text{ص}}{٥}$ ، أي أن : عندما س ← ٠ ، فإن ص ← ٠ .

$\therefore \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٥ س}}{\text{٦ س}} = \underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ص}}{٦ \times \frac{\text{ص}}{٥}} = \frac{٥}{٦} \underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ص}}{\text{ص}} = \frac{٥}{٦} \times ١ = \frac{٥}{٦}$.

ب) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}$ س ظتا س $= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{ظا س}} = ١$.

تدريب (٦ – ١)

أوجد نهاية الدوال التالية وفق الشروط المرافقة لكل منها :

أ) د (س) = $\frac{\text{جا أ س}}{\text{ب س}}$ ، س ← ٠ ،

ب) د (س) = س قتا س ، س ← ٠ ،

جـ) د (س) = س جا $\frac{١}{\text{س}}$ ، س ← ± ∞ ،

د) د (س) = $\frac{\text{١ – جتا س}}{\text{س}}$ ، س ← ٠ .

مثال (٦ – ٣)

أوجد ما يأتي : أ) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{١ - \text{جتا } س}{س \text{ جا } س}$. ب) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا } ٢ س}{س^{٢} - \frac{\pi}{٢} س}$.

الحــــل :

أ) $$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{١ - \text{جتا } س}{س \text{ جا } س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{٢ \text{ جا}^{٢} \frac{س}{٢}}{س \text{ جا } س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\dfrac{٢ \text{ جا}^{٢} \frac{س}{٢}}{\left(\frac{س}{٢}\right)^{٢}} \times \left(\frac{س}{٢}\right)^{٢}}{\dfrac{\text{جا } س}{س} \times س^{٢}}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\dfrac{\text{جا}^{٢} \frac{س}{٢}}{\left(\frac{س}{٢}\right)^{٢}} \; \dfrac{١}{٢}}{\dfrac{\text{جا } س}{س}} = \frac{١}{٢}$$

ب) $$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } ٢ س}{س^{٢} - \frac{\pi}{٢} س} = \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــا}} \frac{٢ \text{ جا } س \text{ جتا } س}{س \left(س - \frac{\pi}{٢} \right)}$$

$$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــا}} \frac{٢ \text{ جا } س \times \text{جا} \left(\frac{\pi}{٢} - س \right)}{- س \left(\frac{\pi}{٢} - س \right)} = \frac{٢ \text{ جا } \frac{\pi}{٢} \times ١}{- \frac{\pi}{٢}} = \frac{-٤}{\pi} .$$

مبرهنة (٦ – ٢)

إذا كانت الدالة د محدودة على الفترة المحذوفة ف التي مركزها ب وكانت :

$$\underset{س \leftarrow ب}{\text{نهــا}} \text{ تا } (س) = ٠$$

فإنه يكون : $\underset{س \leftarrow ب}{\text{نهــا}} [\text{ د } (س) \times \text{ تا } (س)] = ٠$

فمثلاً : $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{٣}{س - ١} \text{ جا } ٢ س = ٠$ ، لأن :

دالة الجيب محدودة بالصورة $| \text{ جا } ٢ س | \leq ١$ ، $\forall$ س $\in$ ح .

والدالة : $\dfrac{٣}{س - ١} \leftarrow ٠$ عندما س $\leftarrow \infty$.

$\therefore$ $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{٣}{س - ١} \text{ جا } ٢ س = ٠$ [استناداً إلى المبرهنة (٦ - ٢)] .

ثانياً : اتصال الدوال المثلثية :

تذكَّــر أن :

١) الدالة د تكون متصلة عند النقطة س = ؟ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\text{س} \to \text{؟}}$ د (س) = د (؟) .

٢) إذا كانت الدالة د معرَّفة على فترة أو أكثر فالدالة د تكون متصلة إذا وفقط إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاط مجموعة تعريفها .

فمثلاً : $\lim\limits_{\text{س} \to \text{؟}}$ جتا س = جتا ؟ ، $\lim\limits_{\text{س} \to \text{؟}}$ جا س = جا ؟ ، والتساؤل هنا : هل نهاية كلٍّ من الدالتين جتا س ، جا س تساوي قيمتها لتكون متصلة عند النقطة ؟ ، وجميع النقاط لمجموعة تعريفها ؟

وللإجابة عن هذا التساؤل نستخدم علاقة الفرق بين دالتي جيب التمام بالصورة :

$$\text{جتا س} - \text{جتا ؟} = -٢ \ \text{جا} \ \frac{\text{س} + \text{؟}}{٢} \ \text{جا} \ \frac{\text{س} - \text{؟}}{٢}$$

وبأخذ النهاية للطرفين نجد أن :

$$\lim_{\text{س} \to \text{؟}} (\text{جتاس} - \text{جتا ؟}) = -٢ \lim_{\text{س} \to \text{؟}} \text{جا} \ \frac{\text{س} + \text{؟}}{٢} \times \lim_{\text{س} \to \text{؟}} \text{جا} \ \frac{\text{س} - \text{؟}}{٢}$$

عندئذٍ نلاحظ أن الطرف الأيسر يمثِّل جداء دالتين هما :

الأولى : محدودة بالصورة $\left| ٢ \ \text{جا} \ \frac{\text{س} + \text{؟}}{٢} \right| \leq ٢$ عندما س $\leftarrow$ ؟ .

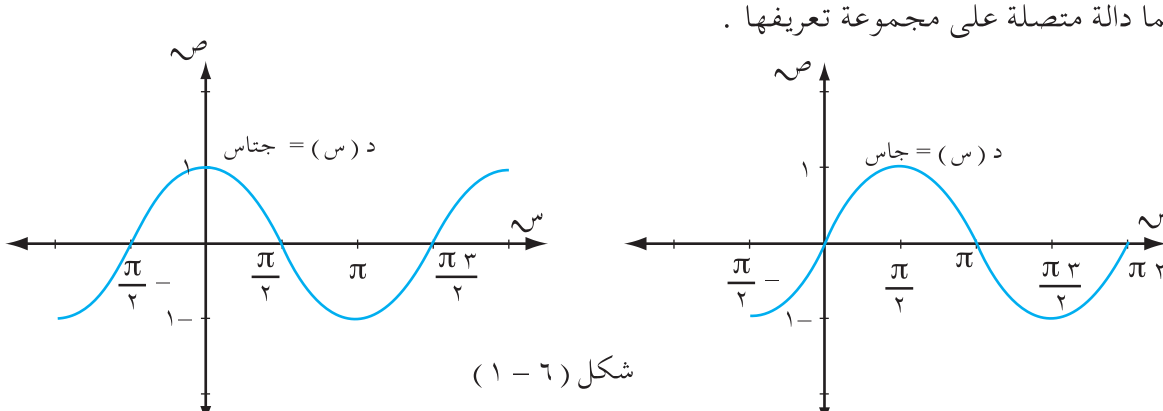
الثانية : $\left| \text{جا} \ \frac{\text{س} - \text{؟}}{٢} \right| \leftarrow ٠$ عندما س $\leftarrow$ ؟ ، [واستناداً إلى المبرهنة (٦ - ٢)]

فإن الطرف الأيسر $\leftarrow$ ٠

$\therefore$ $\lim\limits_{\text{س} \to \text{؟}}$ (جتا س – جتا ؟) = ٠ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\text{س} \to \text{؟}}$ جتا س = جتا ؟ ....(١)

وبالمثل يمكن إثبات أن : $\lim\limits_{\text{س} \to \text{؟}}$ جا س = جا ؟ ....(٢)

ومن (١) ، (٢) نستنتج أن نهاية كلٍّ من الدالتين جتا س ، جا س تساوي قيمتها ، وهذا ما يوضح أن كلاً منهما دالة متصلة على مجموعة تعريفها .



شكل (٦ – ١)

وكذلك يمكن إستنتاج أن :

د (س) = ظا س : دالة متصلة ، $س \neq (٢ ك + ١) \frac{\pi}{٢}$ ، $ك \in ص$.

د (س) = ظتا س : دالة متصلة ، $س \neq ك \pi$ ، $ك \in ص$.

مثال (٦ - ٤)

إذا كانت د (س) = $\frac{٣ س + جا ٢ س}{ظا ٣ س}$

إبحث اتصال الدالة د عند النقطة س = ٠ ، وإذا كانت غير متصلة أعد تعريفها لكي تكون متصلة (إن أمكن) .

الحـــل :

الدالة غير معرفة عند س = ٠

إذن الدالة غير متصلة عند س = ٠ ،

ولإعادة تعريف الدالة د لكي تكون متصلة عند س = ٠ نبحث عن وجود النهاية عند س ← ٠ .

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{٣ + ٢ \times \frac{جا ٢ س}{٢ س}}{٣ \times \frac{ظا ٣ س}{٣ س}} = \frac{٣ + ٢ \times ١}{٣ \times ١} = \frac{٥}{٣}$$

إذن يمكن إعادة التعريف لكي تكون الدالة د متصلة عند س = ٠ بالصورة :

$$د (س) = \begin{cases} \frac{٣ س + جا ٢ س}{ظا ٣ س} & \text{عندما } س \neq ٠ \\ \frac{٥}{٣} & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$$

تمارين ومسائل (٦ - ١)

[١] احسب نهايات الدوال التالية عندما يسعى متغيرها نحو القيمة المرافقة ، علماً بأنه مقدر بالراديان :

١) $\frac{جا ٢ س}{س}$ ، س ← ٠ .

٢) $\frac{ظا ٣ س}{جا ٥ س}$ ، س ← ٠ .

٣) $س^٢$ قتا ٥ $س^٢$ ، س ← ٠ .

٤) $\frac{جا^٢ ٥ س}{س ظا ٣ س}$ ، س ← ٠ .

٥) $\frac{١ - جتا^٣ س}{جا س}$ ، س ← ٠ .

٦) $\frac{س^٢ + ٣ جا^٢ س}{١ - جتا س}$ ، س ← ٠ .

٧) $\dfrac{\sqrt{\text{١ − جتا ٢ س}}}{\text{س}}$ ، س ← ٠ .

٨) (س + ١) جتا $\dfrac{\text{١}}{\text{س + ١}}$ ، س ← ∞ .

٩) $\dfrac{\text{جا } \pi \text{ س}}{\text{س}^{\text{٢}} \text{ − ١}}$ ، س ← ١ .

١٠) $\dfrac{\text{س − ١}}{\text{جا } \pi \text{ (س}^{\text{٢}} \text{ − ١)}}$ ، س ← ١ .

١١) $\dfrac{\text{جتا س}}{\text{٢ س} - \pi}$ ، س ← $\dfrac{\pi}{\text{٢}}$.

١٢) (س$^{\text{٢}}$ − ٢ س − ٣) ظا $\dfrac{\pi}{\text{٢}}$ س ، س ← ٣ .

١٣) $\dfrac{\text{جتا } \dfrac{\pi}{\text{س}}}{\text{س − ٢}}$ ، س ← ٢ .

١٤) $\dfrac{\text{١ + ٢ جتا ٢ س}}{\text{٤ جا}^{\text{٢}} \text{ س − ٣}}$ ، س ← $\dfrac{\pi}{\text{٣}}$.

١٥) (٣ س − ١) جا $\dfrac{\pi}{\text{س − ٢}}$ ، س ← ∞ .

١٦) $\dfrac{\text{جا (س} - \dfrac{\pi}{\text{٣}}\text{)}}{\text{١ − ٢ جتا س}}$ ، س ← $\dfrac{\pi}{\text{٣}}$.

١٧) $\dfrac{\text{٢ جتا}^{\text{٢}} \dfrac{\text{س}}{\text{٢}} \text{ − جا س}}{\text{س} - \dfrac{\pi}{\text{٢}}}$ ، س ← $\dfrac{\pi}{\text{٢}}$.

١٨) $\dfrac{\text{ظا ٣ س + ظتا س}}{\text{٤ س} - \pi}$ ، س ← $\dfrac{\pi}{\text{٤}}$.

١٩) $\dfrac{\text{جا (} \pi \text{ جتا س)}}{\text{(س} - \pi \text{)}^{\text{٢}}}$ ، س ← π .

[٢] ادرس اتصال كلٍّ من الدوال التالية عند القيمة المرافقة ، وإذا كانت غير متصلة أعد تعريفها – إن أمكن – لكي تكون متصلة :

أ) د (س) = $\dfrac{\text{جا ٣ س}}{\text{ظا ٢ س}}$ ، س = ٠ ،   ب) د (س) = $\dfrac{\text{س}}{\text{جا ٣ س − ظا س}}$ ، س = ٠ .

جـ) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{جا س − جتا س}}{\text{٤ س} - \pi} & \text{عند س} \neq \dfrac{\pi}{\text{٤}} \\ \text{٣} & \text{عند س} = \dfrac{\pi}{\text{٤}} \end{cases}$

[٣] أوجد قيمة أ التي تجعل الدالة التالية متصلة عند س = ٠

د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{١ − جتا ٢ س}}{\text{١ − جتا س}} & \text{عند س} \neq \text{٠} \\ \text{أ + ١} & \text{عند س = ٠} \end{cases}$

٦ – ٢ المشتقـــات

تعرّفت سابقاً على مشتقات بعض الدوال وقواعد الاشتقاق والمثال التالي يوضح ذلك :

مثال (٦ – ٥) أوجد $د'(س)$ لكل من الدوال التالية :

١) $د(س) = ٥س^{٤} - ٢س^{٢} + ٣س$ ،

٢) $د(س) = (س^{٢} + ٢)(٣س + س^{٣})$.

٣) $د(س) = \frac{س^{٢} - ٢}{س + ٤}$ ، $س \neq -٤$.

٤) $د(س) = \sqrt{س - ١}$ ،

الحـــل :

١) $د'(س) = ٥(س^{٤})' - ٢(س^{٢})' + ٣(س)' = ٥ \times ٤س^{٣} - ٢ \times ٢س + ٣ \times ١$

$= ٢٠س^{٣} - ٤س + ٣$.

٢) $د'(س) = (س^{٢} + ٢)'(٣س + س^{٣}) + (س^{٢} + ٢)(٣س + س^{٣})'$

$= ٢س(٣س + س^{٣}) + (س^{٢} + ٢)(٣ + ٣س^{٢}) = ٦س^{٢} + ٢س^{٤} + ٣س^{٤} + ٩س^{٢} + ٦$

$= ٥س^{٤} + ١٥س^{٢} + ٦$.

٣) $د'(س) = \frac{(س + ٤)(س^{٢} - ٢)' - (س^{٢} - ٢)(س + ٤)'}{(س + ٤)^{٢}} = \frac{(س + ٤)(٢س) - (س^{٢} - ٢)(١)}{(س + ٤)^{٢}}$

$= \frac{٢س^{٢} + ٨س - س^{٢} + ٢}{(س + ٤)^{٢}} = \frac{س^{٢} + ٨س + ٢}{(س + ٤)^{٢}}$ ، $س \neq -٤$.

٤) $د'(س) = \frac{(س - ١)'}{٢\sqrt{س - ١}} = \frac{١}{٢\sqrt{س - ١}}$.

تمارين ومسائل (٦ – ٢)

أوجد د َ(س) لكل من الدوال التالية :

١) د(س) = ب ، ب عدد ثابت .

٢) د(س) = $\sqrt{٥}$.

٣) د(س) = س + ٦ .

٤) د(س) = $س^{٢+ل}$ ، ل عدد ثابت .

٥) د(س) = $س^{٤} + ٢\, س^{٢} - ٤$.

٦) د(س) = $\frac{١}{س} + س^{٢} + ٨$.

٧) د(س) = $س^{-٢} - ٣\, س^{-٣} - ٤\, س^{-٤} + ٢$.

٨) د(س) = $(س^{٢} + ٢\, س)(٣\, س + ١)$.

٩) د(س) = $(٢\, س + ٣)(س^{٢} - ١)(٣\, س^{٣} + ٢)$.

١٠) د(س) = $\frac{س^{٢} - ٥}{٢\, س^{٢} + ١}$.

١١) د(س) = $\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}$ ، س > ٠ .

٦ – ٣ مشتقّة تركيب دالتين (قاعدة التسلسل)

إذا كانت $د(س) = (س^٣ + ٢س - ١)^٢$ ، فيمكن ايجاد مشتقتها باستخدام قاعدة الاشتقاق لحاصل ضرب دالتين :

$د(س) = (س^٣ + ٢س - ١)(س^٣ + ٢س - ١)$ ،

كما يمكن إيجاد مشتقتها بعد حاصل الضرب في صورة كثيرة حدود .

كل من الطريقتين السابقتين تحتاج إلى إجراء عمليات جبرية مطوّلة ، تزداد تعقيداً كلمّا كبرت قوة المقدار . الأمر الذي استدعى البحث عن قاعدة أخرى لإيجاد مشتقة مثل هذه الدوال ، وهذه تسمى قاعدة التسلسل ، المستندة إلى فكرة تركيب دالتين .

وبصورة عامة إذا كانت سـ ، عـ ، صـ فترات حقيقية مفتوحة بحيث أن :

$د : سـ \longrightarrow عـ$ ، $ع = د(س)$

$هـ : عـ \longrightarrow صـ$ ، $ص = هـ(ع)$

فإن :

$(هـ \circ د) : سـ \longrightarrow صـ$ ، $(هـ \circ د)(س) = هـ(د(س))$ ، $\forall\, س \in سـ$. أي أن التركيب $(هـ \circ د)$ هو محصلة تركيب الدالتين هـ ، د بالصورة : $ص = (هـ \circ د)(س) = هـ(د(س))$

فإن مشتقتها هي $\frac{ءص}{ءس} = (هـ \circ د)'(س) = هـَ(د(س))\ دَ(س)$.

مبرهنة (٦ – ٣)

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة س ، هـ دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة $ع = د(س)$ ، فإن : $(هـ \circ د)$ دالة قابلة للإشتقاق عند س ؛ ويُعبر عن ذلك رمزياً بالصورة :

$(هـ \circ د)'(س) = هـَ(ع)\ دَ(س) = هـَ(د(س))\ دَ(س)$.

مثال (٦ – ٦)

إذا كانت د(س) = س^{٢} + ١ ، هـ(س) = س^{٣} – ٢ س ، وكانت ر(س) = (هـ ○ د)(س) .

فأوجد رَ(٢) .

الحـــل :

∵ رَ(س) = (هـ ○ د)َ(س) = هـَ(د(س)) دَ(س) [مبرهنة (٦ – ٣)]

∴ هـَ(س) = ٣ س^{٢} – ٢ ، دَ(س) = ٢ س

أي أن هـَ(د(س)) = هـَ(س^{٢} + ١) = ٣ (س^{٢} + ١)^{٢} – ٢

عندئذٍ فإن :

رَ(س) = [٣ (س^{٢} + ١)^{٢} – ٢] × ٢ س = ٦ س (س^{٢} + ١)^{٢} – ٤ س ،

رَ(٢) = ٦ × ٢ (٤ + ١)^{٢} – ٤ × ٢ = ٢٩٢ .

صورة أخرى لقاعدة التسلسل :

إذا كانت ص = هـ(ع) ، ع = د(س) ، أي أن : ص = هـ(د(س))

فإن $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}}$ = هـَ(ع) ، $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$ = دَ(س)

ومنه فإن قاعدة التسلسل للإشتقاق هي :

قاعدة (٦ – ١) :

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = هـَ(ع) عَ = $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}}$ × $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$.

مثال (٦ – ٧)

إذا كانت ص = ع^{٢} ، ع = س^{٢} – ٢ . أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$.

الحـــل :

∵ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}}$ = ٢ ع ، $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$ = ٢ س

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}}$ × $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$ = ٢ ع × ٢ س = ٤ س ع .

وبالتعويض عن قيمة ع نجد أن :

$\frac{ءص}{ءس} = ٤ س (س^٢ - ٢)$.

مثال (٦ - ٨)

إذا كانت ص = $(٤ س^٣ + ٢ س^٢ + ٦)^٩$ ، فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$.

الحـــل :

نضع ع = $٤ س^٣ + ٢ س^٢ + ٦$ ⟸ ص = $ع^٩$

∵ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$.

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٩ ع^٨ ع' = ٩ (٤ س^٣ + ٢ س^٢ + ٦)^٨ (١٢ س^٢ + ٤ س)$.

$= ٣٦ س (٣ س + ١) (٤ س^٣ + ٢ س^٢ + ٦)^٨$

نتيجة (١) :

إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند س ، وكان ص = $[د (س)]^ن$ ، $\forall ن \in ح$ فإن :

$\frac{ءص}{ءس} = ن [د (س)]^{ن - ١} د' (س)$.

مثال (٦ - ٩)

أوجد مشتقة الدالتين التاليتين :

أ) ص = $(س^٤ + ٢ س - ٥)^{\frac{٢}{٥}}$ ، ب) ص = $\frac{٢}{(س^٢ + ٣)^٢}$.

الحـــل :

أ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢}{٥} (س^٤ + ٢ س - ٥)^{\frac{٢}{٥} - ١} \times (س^٤ + ٢ س - ٥)'$

$= \frac{٢}{٥} (س^٤ + ٢ س - ٥)^{\frac{-٣}{٥}} (٤ س^٣ + ٢) = \frac{٤ (٢ س^٣ + ١)}{٥ (س^٤ + ٢ س - ٥)^{\frac{٣}{٥}}}$.

ب) بوضع ع = $س^٢ + ٣$ ∴ ص = $\frac{٢}{ع^٢} = ٢ ع^{-٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = - ٤ ع^{-٣} ع' = (-٤ ع^{-٣}) (٢ س) = - ٨ س ع^{-٣} = - ٨ س \times \frac{١}{ع^٣} = \frac{- ٨ س}{(س^٢ + ٣)^٣}$.

مثال (٦ - ١٠)

إذا كانت ص = $\sqrt[3]{س^2 + ٥}$. أوجد صَ .

الحـــل :

ص = $(س^2 + ٥)^{\frac{1}{3}}$ ⟸ صَ = $\frac{1}{3}$ $(س^2 + ٥)^{\frac{-2}{3}}$ (٢ س) = $\frac{٢ س}{٣ \sqrt[3]{(س^2 + ٥)^2}}$.

مثال (٦ - ١١)

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ للدالة ص = $(س^2 + ٥)^7$ مستخدماً قاعدة التسلسل .

الحـــل :

نضع ع = $س^2 + ٥$ ⟸ ص = $ع^7$

∵ $\frac{ءع}{ءس}$ = ٢ س ، $\frac{ءص}{ءع}$ = ٧ $ع^6$ ،

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٧ $ع^6$ × ٢ س = ١٤ س $ع^6$ = ١٤ س $(س^2 + ٥)^6$.

تمارين ومسائل (٦ - ٣)

[١] أوجد (ﻫ ○ د)َ (س) لكل مما يلي :

أ) ﻫ (س) = $س^2$ − س ، د (س) = س + ١ ، عند س = −١

ب) ﻫ (س) = $س^2$ − ٤ ، د (س) = $\frac{١}{س}$ ، عند س = ١ .

جـ) ﻫ (س) = $س^2$ ، د (س) = $\sqrt{س}$ + ١ ، ∀ س ∈ $ح^+$.

د) ﻫ (س) = س ، د (س) = $(س - ١)^6$ ، ∀ س ∈ ح .

[٢] أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل من الدوال التالية :

أ) ص = ٣ع^{٢} + ٦ ع ، ع = س^{٢} + ٢ س .

ب) ص = (س^{٢} + ٣ س)^{٣} . جـ) ص = (س^{٥} + ١٠)^{١٢} .

[٣] إذا كانت ر (س) = ٢ س^{٢} − ٣ س + ٥ ، ع = ٣ س . فأوجد :

أ) رَ (ع) . ب) $\frac{ء}{ءس}$ (رَ (ع)) .

[٤] أوجد مشتقّة الدوال التالية :

أ) ص = $\sqrt{س^{٢} + س - ٢}$. ب) ص = $\left(\frac{١}{س^{٢} + س - ٢} \right)^{٦}$.

جـ) ص = (س^{٢} + ٢ س + ٦)$^{\frac{٣}{٢}}$. د) ص = $\left(\frac{س}{س + ١} \right)^{\frac{٣}{٤}}$.

هـ) د (س) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{(س^{٢} - ٢ س)^{٢}}}$. و) ص = $\sqrt{\frac{١ - س}{١ + س}}$.

٦ − ٤ مشتقّة الدالة الضمنية

تأمل الدالة ص = س^{٢} + ٣ س + ١ ، فإن مشتقتها هي صَ = ٢ س + ٣ ، وذلك كونها دالة صريحة .

أما بالنسبة للدالة : س^{٢} ص + ص^{٢} = ٥ س فهناك صعوبة في التعبير عن ص بدلالة س مباشرة ، لأن المتغير ص يمثل دالة غير معرَّفة بالنسبة لِـ س بالصورة ص = د(س) تسمى هذه الدالة غير الصريحة بالدالة الضمنية ، حيث نعيد تعريفها ضمنياً على النحو التالي :

س^{٢} [د (س)] + [د (س)]^{٢} = ٥ س .

لذلك فإن عملية الاشتقاق للدالة الضمنية يتطلّب إشتقاق كلٍّ من طرفي المعادلة وفقاً لقاعدة التسلسل بالنسبة لِـ س ، وتجميع المقادير التي تحوي $\frac{ءص}{ءس}$ بأحد أطراف المعادلة والأخرى بالطرف الآخر أي أن :

$$\frac{ء}{ءس} (س^{٢} ص) + \frac{ء}{ءس} (ص^{٢}) = \frac{ء}{ءس} (٥ س)$$

$$\Leftarrow \quad س^{٢} \times \frac{ءص}{ءس} + ص \times ٢ س + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٥$$

$$\Leftarrow \quad س^{٢} \frac{ءص}{ءس} + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٥ - ٢ س ص \quad \Leftarrow \quad (س^{٢} + ٢ ص) \frac{ءص}{ءس} = ٥ - ٢ س ص$$

$$\Leftarrow \quad \frac{ءص}{ءس} = \frac{٥ - ٢ س ص}{س^{٢} + ٢ ص} .$$

مثال (٦ – ١٢)

أوجد مشتقة كل مما يأتي :

أ) $\text{ص}^{٢} + \text{س ص} + \text{س}^{٢} = ٣\,\text{س}$ ، ب) $\text{س ص}^{٢} - \text{س}^{٢}\text{ص} = ٦$.

الحـــل :

أ) $٢\,\text{ص}\,\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} + \text{ص} + \text{س}\,\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} + ٢\,\text{س} = ٣ \Leftarrow (٢\,\text{ص} + \text{س})\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٣ - \text{ص} - ٢\,\text{س}$

$$\Leftarrow \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٣ - \text{ص} - ٢\,\text{س}}{٢\,\text{ص} + \text{س}} .$$

ب) $\text{ص}^{٢} + ٢\,\text{س ص}\,\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} - ٢\,\text{س ص} - \text{س}^{٢}\,\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٠$

$$\Leftarrow (٢\,\text{س ص} - \text{س}^{٢})\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٢\,\text{س ص} - \text{ص}^{٢} \Leftarrow \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٢\,\text{س ص} - \text{ص}^{٢}}{٢\,\text{س ص} - \text{س}^{٢}} .$$

مثال (٦ – ١٣)

أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ للدالة $\sqrt{\text{س} + \text{ص}} = \text{ص}^{٢} - ١$.

الحـــل :

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\sqrt{\text{س} + \text{ص}}\right) = \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\text{ص}^{٢} - ١\right) \Leftarrow \frac{١ + \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}}{٢\sqrt{\text{س} + \text{ص}}} = ٢\,\text{ص}\,\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$$

$$\Leftarrow ١ + \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٤\,\text{ص}\sqrt{\text{س} + \text{ص}}\,\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} \Leftarrow ١ = ٤\,\text{ص}\sqrt{\text{س} + \text{ص}}\,\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} - \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$$

$$\Leftarrow ١ = \left(٤\,\text{ص}\sqrt{\text{س} + \text{ص}} - ١\right)\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} \Leftarrow \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{١}{٤\,\text{ص}\sqrt{\text{س} + \text{ص}} - ١} .$$

مثال (٦ – ١٤)

أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ للدالة $\text{س ص}^{٢} - \text{ص} = \text{س} + ٤$.

الحـــل :

$$\text{س} \times ٢\,\text{ص}\,\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} + \text{ص}^{٢} \times ١ - \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ١ \Leftarrow ٢\,\text{س ص}\,\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} - \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ١ - \text{ص}^{٢}$$

$$\Leftarrow (٢\,\text{س ص} - ١)\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ١ - \text{ص}^{٢} \Leftarrow \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{١ - \text{ص}^{٢}}{٢\,\text{س ص} - ١} .$$

كما يمكن حل المثال السابق وغيره من الأمثلة لمشتقات الدوال الضمنية باستخدام القاعدة التالية :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-(\text{مشتقة المعادلة على أساس أن ص ثابت})}{\text{مشتقة المعادلة على اساس أن س ثابت}}$$

بشرط أن نضع كل الحدود في طرف واحد من المعادلة بالصورة $س ص^٢ - ص - س - ٤ = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-(ص^٢ - ١)}{س \times ٢ ص - ١} = \frac{١ - ص^٢}{٢ س ص - ١}$ وهي نفس النتيجة السابقة .

ملاحظة :

تعلم من دراستك السابقة أن معادلتي المماس والناظم (العمودي عليه) لمنحنى الدالة د عند نقطة معينة ولتكن (أ ، د(أ)) هما :

معادلة المماس:

$$\boxed{ص - د(أ) = دَ(أ)(س - أ)}$$

حيث دَ(أ) هو ميل المماس عند $س = أ$.

ومعادلة الناظم:

$$\boxed{ص - د(أ) = -\frac{١}{دَ(أ)}(س - أ) .}$$

مثال (٦ - ١٥)

إذا كانت الدالة ٤ س ص = ٢٥ ، وكان ميل المماس لمنحنى الدالة هو (-١) أوجد قيم س التي تحقّق ذلك .

الحـــل :

$\because ص = \frac{٢٥}{٤ س} \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٤ \times ٢٥}{١٦ س^٢} = \frac{-٢٥}{٤ س^٢}$ ، $\because \frac{ءص}{ءس} = -١$

$\therefore \frac{-٢٥}{٤ س^٢} = -١ \Leftarrow ٤س^٢ = ٢٥ \Leftarrow س^٢ = \frac{٢٥}{٤}$

$\Leftarrow س = \pm \frac{٥}{٢}$.

تدريب (٦ - ٢)

أوجد معادلة الناظم لمنحنى الدالة : ص^٢ - ٢س - ٤ص = ١ ، عند النقطة (-٢ ، ١) .

مثال (٦-١٦)

أوجد ميل المماس للمنحنى $\text{س} = \text{ص}^{٢} - ٤\text{ص}$ عند نقاط تقاطعه مع محور الصادات .

الحــــل :

نقاط التقاطع مع محور الصادات عندما $\text{س} = ٠$ ،

أي أن : $\text{ص}^{٢} - ٤\text{ص} = ٠ \quad \Leftarrow \quad \text{ص}(\text{ص} - ٤) = ٠$

اما $\text{ص} = ٠$ ، أو $\text{ص} = ٤$ ، إذن توجد نقطتان هما $(٠ ، ٠)$ ، $(٠ ، ٤)$ عندئذٍ يمكن إيجاد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (الميل) ضمنياً حيث $١ = ٢\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - ٤ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$$\Leftarrow \quad ١ = (٢\text{ص} - ٤)\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \quad \Leftarrow \quad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\text{ص} - ٤}$$

∴ ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطتان $(٠ ، ٠)$ ، $(٠ ، ٤)$ هما :

$$\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{(٠ ، ٠)} = \frac{-١}{٤} \quad ، \quad \left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{(٠ ، ٤)} = \frac{١}{٨ - ٤} = \frac{١}{٤} \; .$$

مثال (٦ - ١٧)

أوجـد نقاط المنحنى $(\text{ص} - ٤)^{٢} = \text{س} + ٢$ ، التي عندها المـمـاس يـوازي المستقيـم $٣\text{س} + ٦\text{ص} + ٢ = ٠$.

الحــــل :

$$\because \; ٣\text{س} + ٦\text{ص} + ٢ = ٠ \quad \Leftarrow \quad ٦\text{ص} = -٣\text{س} - ٢$$

$$\therefore \; \text{ص} = \frac{-٣}{٦}\text{س} - \frac{٢}{٦} \quad \Leftarrow \quad \text{ص}' = \frac{-٣}{٦} = -\frac{١}{٢} \quad \text{(ميل المستقيم) .}$$

$$\because \; ٢(\text{ص} - ٤)\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right) = ١$$

$$\therefore \; \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢(\text{ص} - ٤)} \quad \text{(ميل المماس للمنحنى)}$$

$$\because \; \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{١}{٢} \quad ، \quad \because \; \text{المماس يوازي المستقيم}$$

$$\therefore \; \frac{١}{٢(\text{ص} - ٤)} = -\frac{١}{٢} \quad \Leftarrow \quad -٢(\text{ص} - ٤) = ٢ \quad \Leftarrow \quad \text{ص} = ٣$$

لذا فإن : $(٣ - ٤)^{٢} = \text{س} + ٢ \quad \Leftarrow \quad \text{س} = -١$ ، إذن النقطة هي $(-١ ، ٣)$.

تمارين ومسائل (٦-٤)

[١] أوجد مشتقّة الدوال الآتية :

أ) $س^٢ ص = ٤س + ١$

ب) $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = ٢$

جـ) $س^٢ + \sqrt{س ص} = ٧$

د) $س^٢ + ص^٢ = س ص$

هـ) $٢س^٣ + ٤\sqrt{ص} = ص$

[٢] أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند النقاط الموضّحة أمام كلٍّ منها :

أ) $س^٢ + \frac{٢ س ص}{\pi} = ٣$ ، عند النقطة $(١ ، \pi)$.

ب) $٢ س^٣ + ٤س ص + س^٢ = ٧$ ، عند النقطة $(١ ، ١)$.

[٣] أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنى الدالة $س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٦ص + ٢ = ٠$

عند النقطة $(٣ ، -١)$.

٦ – ٥ مشتقّة الدالة اللوغاريتمية والأسيَّة

تذكر أن : ص = أ^س^ $\Leftrightarrow$ س = لو~أ~ ص ، $\forall$ ص $\in$ ح^+^ ، س $\in$ ح ، أ > ٠ ، أ $\neq$ ١ ،

وأن : لو~أ~ أ = ١ ، لو~أ~ ١ = ٠ ، لوهـ = ١ ، لو~هـ~ س = لو س ، لوهـ^س^ = س ، هـ^لو س^ = س ،

لو~أ~ س = $\frac{\text{لو س}}{\text{لو أ}}$ ، لو~ب~ أ = $\frac{1}{\text{لو}_{\text{أ}}\text{ ب}}$.

خواص اللوغاريتمات :

١) لو~أ~ (س~١~ س~٢~) = لو~أ~ س~١~ + لو~أ~ س~٢~ .   ٢) لو~أ~ ($\frac{\text{س}_1}{\text{س}_2}$) = لو~أ~ س~١~ – لو~أ~ س~٢~ .

٣) لو~أ~ س^د^ = د لو~أ~ س

أولاً : مشتقّة الدالة اللوغاريتمية :

قاعدة (٦ – ٢) :

إذا كانت ص = لو د (س) ، د (س) > ٠ ، فإن :

ص َ = [لو د (س)] َ = $\frac{\text{د َ(س)}}{\text{د (س)}}$.

مثال (٦ – ١٨) أوجد مشتقّة الدالتين التاليتين :

أ) ص = لو (س^٣^ + ٥) .   ب) ص = لو $\sqrt{\text{س} + 1}$.

الحـــل :

أ) ص َ = [لو (س^٣^ + ٥)] َ = $\frac{3\,\text{س}^2}{\text{س}^3 + 5}$.

ب) ص َ = [لو $\sqrt{\text{س} + 1}$] َ = $\frac{(\sqrt{\text{س} + 1})'}{\sqrt{\text{س} + 1}}$ = $\frac{1}{\sqrt{\text{س} + 1}}$ × $\frac{1}{2\sqrt{\text{س} + 1}}$ = $\frac{1}{2(\text{س} + 1)}$.

مثال (٦ - ١٩)

أوجد مشتقّة الدالتين التاليتين :

أ) $\text{ص} = \dfrac{\text{س}}{\text{س} + ١}$.   ب) $\text{ص} = \text{س}^{\text{س}}$.

الحــــل :

أ) باستخدام خواص اللوغاريتمات لايجاد مشتقة الدالة المعطاة نجد أن :

$$\text{ص} = \dfrac{\text{س}}{\text{س} + ١} \quad \Longleftarrow \quad \text{لو ص} = \text{لو} \dfrac{\text{س}}{\text{س} + ١} = \text{لو س} - \text{لو} (\text{س} + ١)$$

$$\therefore \quad \dfrac{١}{\text{ص}} \times \text{صَ} = \dfrac{١}{\text{س}} - \dfrac{١}{\text{س} + ١} \quad \Longleftarrow \quad \text{صَ} = \text{ص} \left(\dfrac{١}{\text{س}} - \dfrac{١}{\text{س} + ١} \right)$$

وبالتعويض عن $\text{ص} = \dfrac{\text{س}}{\text{س} + ١}$ نجد أن : $\text{صَ} = \dfrac{\text{س}}{\text{س} + ١} \left(\dfrac{١}{\text{س}} - \dfrac{١}{\text{س} + ١} \right)$

$$= \dfrac{١}{(\text{س} + ١)} - \dfrac{\text{س}}{(\text{س} + ١)^٢} = \dfrac{\text{س} + ١ - \text{س}}{(\text{س} + ١)^٢} = \dfrac{١}{(\text{س} + ١)^٢} \ .$$

ب) لكون الأساس والأس متغيرات في الدالة $\text{ص} = \text{س}^{\text{س}}$ لانستطيع تطبيق قواعد الاشتقاق ولذلك نقوم بأخذ لوغاريتم طرفي المعادلة : $\text{لو ص} = \text{لو س}^{\text{س}} = \text{س لو س}$ ،

وبتطبيق قاعدة الأشتقاق للدالة اللوغاريتمية نجد أن :

$$(\text{لو ص})َ = (\text{س لو س})َ$$

$$\Longleftarrow \quad \dfrac{١}{\text{ص}} \times \text{صَ} = \cancel{\text{س}} \times \dfrac{١}{\cancel{\text{س}}} + ١ \times \text{لو س} = ١ + \text{لو س}$$

$$\Longleftarrow \quad \text{صَ} = \text{ص} (١ + \text{لو س}) = \text{س}^{\text{س}} (١ + \text{لو س}) \ .$$

ثانياً : مشتقة الدالة الأسية :

لإيجاد مشتقة الدلة الأسية $\text{ص} = \text{أ}^{\text{س}}$ ، المعرفة من $\text{ح} \longrightarrow \text{ح}^+$ ، $\forall \text{أ} \in \text{ح}^+ / \{١\}$ يمكن كتابة الدالة بالصورة $\text{س} = \text{لو}_{\text{أ}} \text{ص}$ وباشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة لـ س نحصل على :

$$١ = \dfrac{١}{\text{ص}} \times \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \text{لو}_{\text{أ}} \text{هـ} \quad \Longleftarrow \quad \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص} \times \dfrac{١}{\text{لو}_{\text{أ}} \text{هـ}} = \text{ص} \ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{أ} \ .$$

لذلك فإن قاعدة الاشتقاق للدالة الأسية تُعطى بالقاعدة التالية :

قاعدة (٦ – ٣) :

$\frac{ء}{ء س}$ ($ا^{س}$) = $ا^{س}$ لو ا ، وإذا كان ا = هـ ، فإن :

$\frac{ء}{ء س}$ ($هـ^{س}$) = $هـ^{س}$ ، ∀ س ∈ ح .

نتيجة (٣) :

إذا كانت ص = $هـ^{ف}$ ، وكانت ف = د (س)، فإن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ف} \times \frac{ء ف}{ء س} = هـ^{ف} \frac{ء ف}{ء س}$.

مثال (٦ – ٢٠)

أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ للدوال التالية :

أ) ص = $٢^{٣س}$. ب) ص = $هـ^{\sqrt{س}}$. جـ) ص = $ا^{س}$ ، ا ∈ $ح^{+}$ / { ١ }.

الحـــل : بتطبيق قاعدة الاشتقاق للدالة الأسيّة نجد أن :

أ) صَ = $٢^{٣س}$ × (٣ س)َ × لو ٢ = $٢^{٣س}$ × ٣ × لو ٢ .

ب) صَ = $هـ^{\sqrt{س}}$ × ($\sqrt{س}$)َ × لو هـ = $هـ^{\sqrt{س}}$ × $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ × ١ = $هـ^{\sqrt{س}}$ × $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$.

جـ) صَ = $ا^{س}$ (س)َ × لو ا = $ا^{س}$ × ١ × لو ا = $ا^{س}$ لو ا .

مثال (٦ – ٢١)

أوجد مشتقة الدالة ص = $هـ^{لو س}$ + ٢ لو ($س^{٢}$ + ١) .

الحـــل :

∵ $هـ^{لو س}$ = س ⟸ ص = س + ٢ لو ($س^{٢}$ + ١) .

∴ صَ = ١ + ٢ × $\frac{٢ س}{س^{٢} + ١}$ = ١ + $\frac{٤ س}{س^{٢} + ١}$.

تمارين ومسائل (٦-٥)

[١] أوجد مشتقّة الدوال التالية :

١) $\text{د}(\text{س}) = \text{لو س}$

٢) $\text{ص} = \text{لو}(\text{س}^{٢} + ١)$

٣) $\text{ص} = \text{لو}(\text{س}^{٢} - ٢\text{س})$

٤) $\text{ص} = \text{س}^{٢}\,\text{لو س}$

٥) $\text{ص} = \text{لو}(٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)$

٦) $\text{ص} = \text{لو}\sqrt{٢\text{س}^{٢} + ٤\text{س}}$

٧) $\text{ص} = \text{لو}\sqrt{\text{س}}$

٨) $\text{ص} = \dfrac{\text{لو س}}{\text{س}}$.

[٢] أوجد مشتقّة الدوال التالية :

١) $\text{ص} = \text{لو}[(\text{س}+١)\,\text{أ}^{\text{س}}]$

٢) $\text{ص} = \text{لو}(٣\text{س}^{٢} + ٢)^{٥}$

٣) $\text{ص} = \text{لو}[(\text{س}^{٢} + ١) \times ١٠^{\frac{١}{\text{س}}}]$

٤) $\text{ص} = (١ - ٢\text{س})\,\text{لو}(١ - ٢\text{س})$.

[٣] أوجد مشتقّة الدوال التالية :

١) $\text{ص} = \text{لو}\left[\dfrac{\text{س}(\text{س}+١)}{(\text{س}+٢)^{٢}}\right]$

٢) $\text{ص} = \dfrac{\text{س}\sqrt{\text{س}+١}}{\sqrt{\text{س}+٣}}$.

٣) $\text{ص} = ٥^{\text{س}}$

٤) $\text{ص} = \text{هـ}^{\sqrt{٢\text{س}}}$

٥) $\text{ص} = \text{هـ}^{(٢\text{س}-٣)^{٢}}$

٦) $\text{ص} = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$

٧) $\text{ص} = \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{٢\text{س}}$.

[٤] إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ر}(\text{س}) = \text{لو س}$ أوجد :

أ) $(\text{د} \circ \text{ر})'(\text{س})$ ، ب) $(\text{ر} \circ \text{د})'(\text{س})$

[٥] أوجد مشتقّة الدوال التالية :

١) $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{٣} + \text{هـ}^{-٣\text{س}}$

٢) $\text{د}(\text{س}) = (١ + \sqrt{\text{س}})\,\text{هـ}^{\text{س}}$

٣) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{لو س}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ١}$

٤) $\text{د}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} + ١)^{٢\text{س}}$

٥) $\text{ص} = (\text{س}^{٢} + ١)\,\text{هـ}^{٤\text{س}}$.

٦) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}^{\text{هـ}}$.

٦ – ٦ مشتقّة الدوال المثلثية

بعد أن تعرفت على نهايات وإتصال الدوال المثلثية ، وبالاستناد إلى ذلك تستطيع استنتاج قواعد اشتقاق الدوال المثلثية .

فمثلاً : لتكن $\text{د}(\text{س}) = \text{جا س}$.

باستخدام تعريف المشتقة نجد أن :

$$\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\Delta \text{س} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \lim_{\Delta \text{س} \to 0} \frac{\text{جا}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{جا}(\text{س})}{\Delta \text{س}}$$

وباستخدام قاعدة التحويل للفرق بين جيبي الدالة إلى حاصل ضرب نحصل على :

$$\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\Delta \text{س} \to 0} \left[\frac{2\,\text{جتا}\,\dfrac{(\text{س} + \Delta \text{س} + \text{س})}{2}\ \text{جا}\,\dfrac{(\text{س} + \Delta \text{س} - \text{س})}{2}}{\Delta \text{س}} \right]$$

$$= \lim_{\Delta \text{س} \to 0} 2\,\text{جتا}\left(\text{س} + \tfrac{1}{2}\Delta \text{س}\right) \times \lim_{\Delta \text{س} \to 0} \frac{\text{جا}\ \tfrac{1}{2}\Delta \text{س}}{\Delta \text{س}} \quad .$$

وبوضع $\tfrac{1}{2}\Delta \text{س} = \text{هـ}$ $\Leftarrow$ $\Delta \text{س} = 2\,\text{هـ}$ نجد أنه عندما $\Delta \text{س} \to 0$ ، فإن :

$\text{هـ} \to 0$ وتصبح العلاقة بالصورة :

$$\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to 0} 2\,\text{جتا}(\text{س} + \text{هـ}) \times \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{جا هـ}}{2\,\text{هـ}} = \cancel{2}\,\text{جتا س} \times \frac{1}{\cancel{2}} = \text{جتا س} \quad .$$

وبالمثل إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{جتا س}$ ، فإن : $\text{د}'(\text{س}) = -\,\text{جا س}$

قاعدة (٦ – ٤) :

$\forall$ س $\in$ ح (س مقدرة بالراديان) .

١) $\dfrac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{جا س}) = \text{جتا س}$ ، ٢) $\dfrac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{جتا س}) = -\,\text{جا س}$

مثال (٦ – ٢٢)

أوجد $\text{د}'(\text{س})$ لكل من الدالتين التاليتين :

أ) $\text{د}(\text{س}) = 1 + \text{س جا س}$ ، ب) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{جتا س}}{\text{س}}$ ، س $\neq 0$.

الحـــل :

أ) $\text{د}'(\text{س}) = 0 + \text{س جتا س} + \text{جا س} \times 1 = \text{س جتا س} + \text{جا س}$.

ب) باستخدام قاعدة الاشتقاق للدالة الكسرية نجد أن :

$$دَ(س) = \frac{(جتا س)َ \times س - س َ جتاس (س)}{س^2} = \frac{- س جا س - جتا س}{س^2} \quad ، \quad س \neq ٠ \ .$$

مثال (٦ - ٢٣)

أوجد معادلتي المماس والناظم لمنحنى الدالة : $د(س) = ٢س + جا س$ ، عند النقطة $(\pi ، ٢\pi)$.

الحـــل :

$\because$ نقطة التماس هي : $(\pi ، ٢\pi)$ ، $دَ(س) = ٢ + جتا س$

$\therefore$ $دَ(\pi) = ٢ + جتا \pi = ٢ - ١ = ١$

وبالتعويض عن نقطة التماس المعطاة والميل في معادلة المماس نجد أن :

$ص - د(\pi) = دَ(\pi)(س - \pi) \Leftarrow ص - ٢\pi = ١ \times (س - \pi)$

$\Leftarrow ص - س - \pi = ٠$

وبالاستفادة من خاصية التعامد بين الناظم والمماس عند النقطة $(\pi ، ٢\pi)$ فإن معادلة الناظم هي :

$ص - د(\pi) = -\frac{١}{دَ(\pi)}(س - \pi) \Leftarrow ص - ٢\pi = -١ \times (س - \pi)$

$\Leftarrow ص + س - ٣\pi = ٠$.

مثال (٦ - ٢٤)

إذا كانت $د(س) = ظا س$ ، $س \neq \frac{\pi}{٢} + ك\pi$ ، $ك \in ص$.

فأثبت أن : $دَ(س) = قا^2 س$.

الحـــل :

$\because$ $ظا س = \frac{جا س}{جتا س}$ ، $جتا س \neq ٠$

وبتطبيق قاعدة الاشتقاق للدالة الكسرية نجد أن :

$$دَ(س) = (ظا س)َ = \frac{جتا^2 س + جا^2 س}{جتا^2 س} = \frac{١}{جتا^2 س} = قا^2 س = ١ + ظا^2 س$$

وهكذا بالطريقة نفسها يمكن إثبات صحة العلاقات التالية :

١) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\text{ظتا س}\right) = -\text{قتا}^{٢}\text{ س} = -\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{ س}} = -\left(١ + \text{ظتا}^{٢}\text{ س}\right)$

٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\text{قا س}\right) = \text{قا س ظا س}$.

٣) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\text{قتا س}\right) = -\text{قتا س ظتا س}$.

نتـائـج (٤) :

١) إذا كانت ص = جا أ س فإن صَ = أ جتا أ س

٢) إذا كانت ص = أ جا س فإن صَ = أ جتا س

٣) إذا كانت ص = جا [د (س)] فإن صَ = جتا [د (س)] دَ (س)

٤) إذا كانت $\text{ص} = \text{جا}^{\text{ن}}\text{ س}$ فإن $\text{صَ} = \text{ن جا}^{\text{ن}-١}\text{ س جتاس}$

٥) إذا كانت ص = أ جتا س فإن صَ = − أ جا س

٦) إذا كانت ص = جتا أ س فإن صَ = − أ جا أ س

٧) إذا كانت ص = جتا [د (س)] فإن صَ = − جا [د (س)] دَ (س)

٨) إذا كانت $\text{ص} = \text{جتا}^{\text{ن}}\text{ س}$ فإن $\text{صَ} = -\text{ن جتا}^{\text{ن}-١}\text{ س جا س}$.

مثال (٦ − ٢٥)

أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ لكل من الدوال التالية :

أ) $\text{ص} = \text{جا } \sqrt{\text{س}}$.

ب) $\text{ص} = \text{جا } \frac{١}{\text{س}}$ ،

جـ) $\text{ص} = ٣ \text{ جا هـ}^{\text{س}}$.

د) ص = جتا ٢ س .

هـ) ص = ٢ جا س جتا س .

و) $\text{ص} = \sqrt{١ + \text{جا س}}$.

ز) $\text{ص} = \text{جا}^{٥}\text{ ٣ س}$.

ح) $\text{ص} = \text{جتا}^{٣}\left(\text{أ س} + \text{ب}\right)$.

ط) $\text{ص جا س} + \text{س ص}^{٢} = \text{س}$.

ي) $\text{ص}^{٢} = \text{جتا}\left(\text{س} + \text{ص}\right)$.

الحــل :

أ) $\text{صَ} = \left(\text{جا } \sqrt{\text{س}}\right)' = \text{جتا } \sqrt{\text{س}} \times \left(\sqrt{\text{س}}\right)' = \text{جتا } \sqrt{\text{س}} \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} = \frac{\text{جتا } \sqrt{\text{س}}}{٢\sqrt{\text{س}}}$ ، $\text{س} > ٠$

ب) $\text{صَ} = \left(\text{جا } \frac{١}{\text{س}}\right)' = \text{جتا } \frac{١}{\text{س}} \times \left(\frac{١}{\text{س}}\right)' = \text{جتا } \frac{١}{\text{س}} \times \frac{-١}{\text{س}^{٢}} = -\frac{١}{\text{س}^{٢}} \text{ جتا } \frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq ٠$

جـ) $\text{ص}' = ٣\,(\text{جا هـ}^{\text{س}})' = ٣ \text{ جتا هـ}^{\text{س}} \times (\text{هـ}^{\text{س}})' = ٣ \text{ هـ}^{\text{س}} \text{ جتا هـ}^{\text{س}}$.

د) $\text{ص}' = (\text{جتا ٢ س})' = -\text{جا ٢ س} \times (\text{٢ س})' = -٢ \text{ جا ٢ س}$.

هـ) $\text{ص}' = ٢\,[\,(\text{جا س})' \text{ جتا س} + \text{جا س}\,(\text{جتاس})'\,] = ٢[\text{جتا}^{٢}\text{ س} - \text{جا}^{٢}\text{ س}\,] = ٢ \text{ جتا ٢ س}$.

و) $\text{ص}' = \dfrac{(١ + \text{جا س})'}{٢\sqrt{١ + \text{جا س}}} = \dfrac{\text{جتا س}}{٢\sqrt{١ + \text{جا س}}}$ ، $\text{جا س} \neq -١$.

ز) $\text{ص}' = ٥ \text{ جا}^{٤}\text{ ٣ س} \times \text{جتا ٣ س} \times ٣ = ١٥ \text{ جا}^{٤}\text{ ٣ س جتا ٣ س}$.

ح) $\text{ص}' = ٣ \text{ جتا}^{٢}(\text{أ س} + \text{ب})\,[\,-\text{جا}(\text{أ س} + \text{ب}) \times \text{أ}\,] = -٣ \text{ أ جتا}^{٢}(\text{أ س} + \text{ب}) \text{ جا}(\text{أ س} + \text{ب})$.

ط) $\text{ص جتا س} + \text{جا س} \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص}^{٢} + ٢ \text{ س ص} \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$

$\Leftarrow (\text{جا س} + ٢ \text{ س ص}) \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١ - \text{ص}^{٢} - \text{ص جتا س} \Leftarrow \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{١ - \text{ص}^{٢} - \text{ص جتا س}}{\text{جا س} + ٢ \text{ س ص}}$

ي) نضع $\text{ص}^{٢} - \text{جتا}(\text{س} + \text{ص}) = ٠$

$\therefore \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{-[\,٠ - (-\text{جا}(\text{س} + \text{ص}))\,]}{٢\text{ص} - [-\text{جا}(\text{س} + \text{ص})\,]} = \dfrac{-\text{جا}(\text{س} + \text{ص})}{٢\text{ص} + \text{جا}(\text{س} + \text{ص})}$.

مثال (٦ – ٢٦)

أوجد معادلتي المماس والناظم لكل من الدالتين التاليتين عند النقاط الموضحة أمام كل منها:

أ) $\text{د}(\text{س}) = ٣ \text{ ظتا س} + \sqrt{٢} \text{ قاس}$ ، عند النقطة $(\dfrac{\pi}{٤} ، ٥)$.

ب) $\text{جتا}^{٢}\text{ س} + \text{جا}^{٢}\text{ ص} = \dfrac{١}{٢}$ ، عند النقطة $(\dfrac{\pi}{٤} ، ٠)$.

الحل :

أ) $\because$ نقطة التماس $(\dfrac{\pi}{٤} ، ٥)$ .... (١)

$\text{د}'(\text{س}) = -٣ \text{ قتا}^{٢}\text{س} + \sqrt{٢} \text{ قاس ظاس}$

$\therefore \text{د}'(\dfrac{\pi}{٤}) = -٣ \text{ قتا}^{٢} \dfrac{\pi}{٤} + \sqrt{٢} \text{ قا} \dfrac{\pi}{٤} \text{ ظا} \dfrac{\pi}{٤}$

$= -٣ \times ٢ + \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times ١ = -٦ + ٢ = -٤$ .... (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

معادلة المماس هي :

$$ص - د(\frac{\pi}{٤}) = دَ(\frac{\pi}{٤})(س - \frac{\pi}{٤}) \Leftarrow ص - ٥ = -٤(س - \frac{\pi}{٤})$$

$$\Leftarrow ص + ٤س = \pi + ٥ \; .$$

ومعادلة الناظم هي :

$$ص - ٥ = \frac{١}{٤}(س - \frac{\pi}{٤}) \Leftarrow ١٦ص - ٤س = ٨٠ - \pi \; .$$

ب) $-٢جتا س جا س + ٢ جا ص جتا ص \frac{ءص}{ءس} = ٠ \Leftarrow -جا ٢س + جا ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$$\Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{جا ٢س}{جا ٢ص} \; .$$

$$\because \left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{(\frac{\pi}{٤}, ٠)} = \frac{جا ٢ \times \frac{\pi}{٤}}{جا ٢(٠)} = \frac{جا \frac{\pi}{٢}}{جا ٢(٠)} = \frac{١}{٠} \;(\text{غير معرّفة}).$$

$\therefore$ معادلة المماس هي : $س = \frac{\pi}{٤}$ ، ومعادلة الناظم هي : $ص = ٠$.

المشتقات ذات الرتب العليا :

تعلم أنه إذا كانت ص = د (س) قابلة للاشتقاق وكانت $\frac{ءص}{ءس}$ دالة في المتغير س وقابلة للاشتقاق أيضاً ،

فإن المشتقة الثانية تكتب بالصورة $\frac{ء}{ءس}(\frac{ءص}{ءس}) = \frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ هي أيضاً دالة في المتغير س، وهكذا بالنسبة للاشتقاق

ذي الرتب العليا $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ ، $\frac{ء^٤ص}{ءس^٤}$ ، . . . ، $\frac{ء^نص}{ءس^ن}$ ،أي باشتقاق الدالة ص (ن من المرات)، $ن \in ص^+$

لتدل على رتبة المشتقة ، وعن ذلك يُعبر رمزياً بصورة أخرى بالرمز صَ ، صً ، . . . ، $ص^{(ن)}$.

فمثلاً : الدالة $ص = س^٥$ نجد أن : $صَ = ٥س^٤$ ، $صً = ٥ \times ٤ س^٣$ ، $صً = ٥ \times ٤ \times ٣ س^٢$،

$ص^{(٤)} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ س$ ، $ص^{(٥)} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = \underline{|٥}$ ، $ص^{(٦)} = ٠$.

وعلى ذلك فإن $\forall ن \geq ٦$ نجد أن : $ص^{(ن)} = ٠$ ، ومن ذلك نستنتج بصورة عامة :

إذا كانت $ص = س^ن$ **فإن** : $ص^{(ن)} = \underline{|ن}$ ، $\forall ن \in ص^+$.

مثال (٦ – ٢٧)

إذا كانت ص = جا س + جتا س ، فأثبت أن :

أ) صً = – ص . ب) (صَ)^٢^ + ص^٢^ = ٢ .

الحـــل :

أ) صَ = جتا س – جا س

صً = – جا س – جتا س = – (جاس + جتاس) = – ص

ب) ∵ ص = جا س + جتا س ، ∴ ص^٢^ = جا^٢^ س + جتا^٢^ س + ٢ جا س جتا س = ١ + جا ٢ س ....(١)

∵ صَ = جتا س – جا س ، ∴ (صَ)^٢^ = جتا^٢^ س + جا^٢^س – ٢ جا س جتا س = ١ – جا ٢ س ....(٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

(صَ)^٢^ + ص^٢^ = (١ – جا ~~٢ س~~) + (١ + جا ~~٢ س~~) = ٢ .

مثال (٦ – ٢٨)

لتكن ص = هـ^أ س^ ، أ ثابت . أوجد ص^(ن)^ .

الحـــل :

صَ = أ هـ^أ س^

صً = أ × أ هـ^أ س^ = أ^٢^ هـ^أ س^

صًّ = أ × أ × أ هـ^أ س^ = أ^٣^ هـ^أ س^

.

.

.

ص^(ن)^ = $\underbrace{\text{أ × أ × أ × ... × أ}}_{\text{(ن مرة)}}$ هـ^أ س^ = أ^ن^ هـ^أ س^ .

مثال (٦ – ٢٩)

أوجد المشتقة النونية للدالة : ص = جاس

صَ = جتا س = جا (س + $\frac{\pi}{٢}$)

صً = – جا س = جا (س + $\frac{٢\pi}{٢}$)

صًّ = – جتاس = جا (س + $\frac{٣\pi}{٢}$)

.

.

.

ص^(ن)^ = جا (س + $\frac{ن\pi}{٢}$)

تمارين ومسائل (٦-٦)

[١] أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل من الدوال التالية :

أ) ص = س^{٣} قتاس

ب) ص = $\frac{\text{جتا س}}{\text{س}}$.

جـ) ص = س^{٢} قا $\sqrt{\text{س}}$

د) ص = $\frac{١}{\text{س}}$ + ٥ جتا^{٢}س

هـ) ص = $\frac{\text{٢ − جتا س}}{\text{٢ + جتا س}}$

و) ص = قتا س + قا س جتا س

ز) ص = ٢$^{\text{جا س}}$

[٢] أوجد معادلتي المماس والناظم لمنحنى الدوال التالية عند النقاط الموضّحة أمام كل منها :

أ) د(س) = جا س − جتا س ، س = $\frac{\pi}{٤}$ ،

ب) د(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{١ + جتا س}}$ ، س = $\frac{\pi}{٢}$ ،

جـ) د(س) = ٣ س + س ظا س ، س = $\frac{\pi}{٣}$ ،

د) ٢ س ص + π جا ص = ٢ π ، عندالنقطة (١ ، $\frac{\pi}{٢}$) .

[٣] أثبت أن :

أ) إذا كانت ص = جا ا س ، ا ثابتاً ، فإن: ص″ + ا^{٢} ص = ٠ .

ب) إذا كانت ص = ا جا ٣ س ، ا ثابت ، جا ٣ س ≠ ٠ ، فأوجد قيمة ا التي تحقّق المعادلة :
ص″ + ٢ص − ٤ جا ٣ س = ٠ .

جـ) إذا كانت س ص = جاس ، فإن : ٢ ص′ + ص + س ص″ = (١ − س) ص .

د) إذا كانت س = جاص ، فإن : ص″ = س قا^{٣} ص .

هـ) إذا كانت: ص^{٣} + ص = س^{٢} + ٥ س ، فإن: (١ + ٣ ص^{٢}) ص″ + ٦ ص (ص′)^{٢} = ٢ .

و) إذا كانت ص = هـ$^{\text{٣س}}$ ، فإن: ص″ − ٥ ص′ + ٦ ص = ٠ .

[٤] أوجد المشتقة النونية لكل من الدوال التالية :

١) ص = س هـ^{س}

٢) ص = س^{ن} + ب ، ب عدد ثابت ن ∈ ص$^{+}$ ،

٣) ص = $\frac{١}{س^{٢}}$ ، س ≠ ٠

٤) ص = $\frac{أ}{ب + جـ س}$ ، س ≠ $\frac{-ب}{جـ}$ ، جـ ≠ ٠ .

٥) ص = $\frac{١}{٤ س^{٢} - ٤ س + ١}$

٦) ص = س جتا س .

٧) ص = $\frac{١}{(أ س + ب)^{م}}$

٨) ص = جا^{٢}س

٩) ص = أ$^{ب س}$ ، أ > ١

١٠) ص = لو س .

[٥] إذا كانت د (س) = ١ + هـ^{س} ، تا(س) = لو س فأوجد :

أ) دً (س)

ب) تاً (س)

جـ) (د ∘ تا)ً (س)

د) (تا ∘ د)ً (س)

هـ) (تا ∘ د)ً (٠)

٦ – ٧ مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة

أولاً : مبرهنة رول :

ليس دائماً من السهل إيجاد قيم س التي تجعل المشتقة الأولى دَ(س) = ٠ ، لذا جاءت مبرهنة رول لتكون في مقدمة المبرهنات الهامة لإيضاح الشروط التي تتحدد بها مثل هذه القيم .

مبرهنة (٦ – ٤)

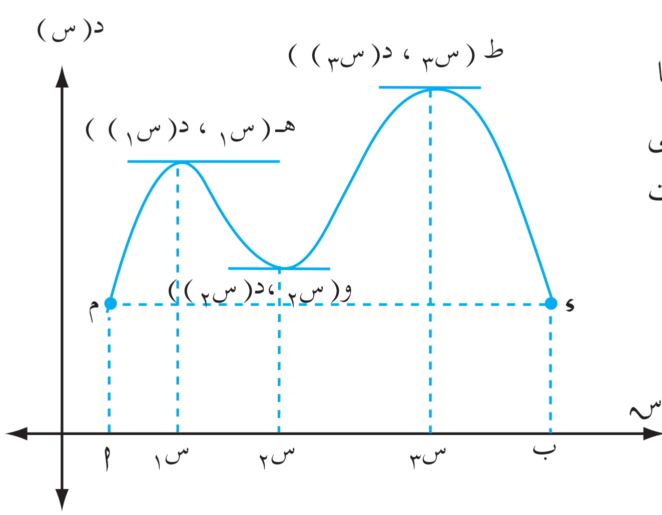
إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [ا ، ب] ، وقابلة للاشتقاق على الفترة] ا ، ب [، وكان د (ا) = د(ب) ؛ فإنه يوجد عدد واحد على الأقل جـ ∋] ا ، ب [بحيث يكون دَ(جـ) = ٠ .

المعنى الهندسي لمبرهنة رول :

من الشكل (٦–٢) لبيان منحنى دالة د (افتراضية) المتصلة على الفترة [ا ، ب] والقابلة للاشتقاق على الفترة] ا ، ب [تلاحظ ما يلي :

د(ا) = د(ب) وبين العددين س = ا ، س = ب يوجد ثلاثة أعداد هي : $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ يناظرها ثلاث نقاط على الترتيب هـ ، و ، ط على منحنى الدالة ، المماس عند كل منها موازياً لمحور السينات من جهة ، والقاطع $\overline{مء}$ من جهة أخرى .

وهذا يعني بين النقطتين م ، ء اللتين يتساوى إحداثيهما الصادي ، توجد نقطة واحدة على الأقل على المنحنى يكون عندها المماس موازياً للقاطع $\overline{مء}$ ، لذلك فإن المماس للمنحنى عند النقطة هـ($س_١$ ، د ($س_١$)) يساوي ميل القاطع $\overline{مء}$



الشكل (٦ – ٢)

أي أن :

$$د َ(س_١) = ميل \overline{م ء} = \frac{د (ب) - د (أ)}{ب - أ} = ٠ \qquad [د(أ) = د (ب)]$$

وبالمثل $د َ(س_٢) = د َ(س_٣) = ٠$.

مثال (٦ - ٣٠)

بيّن فيما إذا كانت الدالة $د(س) = ٣ س - س^٣$ تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [-١ ، ٢] وفي حالة استيفاء الدالة الشروط أوجد قيم جـ التي تعيّنها المبرهنة .

الحـــل :

نتأكد من تحقق الشروط الثلاثة لمبرهنة رول وذلك على النحو التالي :

١) الدالة د متصلة ∀ س ∈ ح . أي أنها متصلة على الفترة [-١ ، ٢] لأنها كثيرة حدود .

٢) ∵ $د َ(س) = ٣ - ٣ س^٢$ ∀ س ∈ ح

∴ الدالة د قابلة للاشتقاق على الفترة] -١ ، ٢ [لأنها كثيرة حدود .

٣) ∵ $د (-١) = ٣ × (-١) - (-١)^٣ = -٢$ ، ∵ $د (٢) = ٣ × ٢ - (٢)^٣ = -٢$

∴ د (-١) = د (٢) .

إذن الدالة د تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [-١ ، ٢] .

وبالتالي فإنه يوجد عدد واحد على الأقل جـ ∈] -١ ، ٢ [، بحيث أن : د َ(جـ) = ٠

∵ $د َ(جـ) = ٣ - ٣ب^٢$ ، ∴ $٣ - ٣ب^٢ = ٠$

⟸ $جـ^٢ = ١$ ⟸ جـ = ± ١

∴ جـ = ١ تحقق المبرهنة لأن ١ ∈] -١ ، ٢ [،

أما جـ = - ١ (مرفوضة لأن -١ ∉] -١ ، ٢ [ ) .

مثال (٦ - ٣١)

بيّن أنّ لمنحنى الدالة د(س) = ٤ جا ٢س مماساً أفقياً واحداً على الأقـل على الفترة [٠ ، π] ، ثم أوجد قيم س التي ينشأ عندها مثل هذا المماس .

الحــــل :

إذا حقَّقت الدالة د المعطاة شروط مبرهنة رول على الفترة [٠ ، π] يكون لمنحنى الدالة المعطاة مماس أفقي واحد على الأقل .

وبتطبيق شروط مبرهنة رول نجد أن :

الدالة د متصلة $\forall$ س $\in$ ح ، أي أنها متصلة على الفترة [٠ ، π] ، وقابلة للاشتقاق على الفترة] ٠ ، π [.

$\because$ د(٠) = ٤ جا (٢ × ٠) = ٠ ، د(π) = ٤ جا ٢ π = ٠ $\therefore$ د(٠) = د(π) = ٠

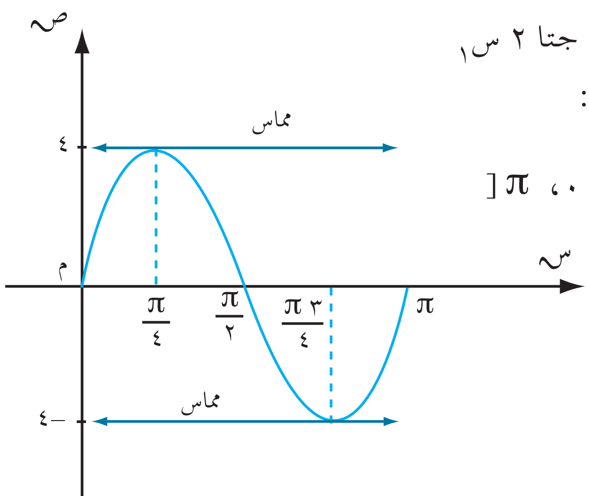
إذن تحقق الدالة د شروط مبرهنة رول وبذلك يكون للدالة مماساً أفقياً واحداً على الأقل عند س$_١$ $\in$] ٠ ، π [بحيث يكون دَ(س$_١$) = ٠

$\because$ دَ(س) = ٨ جتا ٢ س $\Leftarrow$ دَ(س$_١$) = ٨ جتا ٢ س$_١$

$\therefore$ ٨جتا ٢ س$_١$ = ٠ ، وبحل هذه المعادلة نجد أن :

أما س$_١$ = $\frac{\pi}{٤}$ $\in$] ٠ ، π [، أو س$_١$ = $\frac{٣\pi}{٤}$ $\in$] ٠ ، π [

$\therefore$ لمنحنى الدالة د مماسان أفقيان على النحو الموضح في الشكل (٦ – ٣) ينشآن عند س = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$.



الشكل (٦ – ٣)

ملاحظة :

عندما د (ا) $\neq$ د (ب) فإن مبرهنة القيمة المتوسطة توضح ذلك على النحو التالي :

ثانياً : مبرهنة القيمة المتوسطة :

مبرهنة (٦ – ٥)

إذا كانت الدالة د متصلة على [ا ، ب] ، وقابلة للاشتقاق على] ا ، ب [؛ فإنه يوجد على الأقل عدداً واحداً جـ $\in$] ا ، ب [، بحيث يكون : دَ(جـ) = $\frac{\text{د}(\text{ب}) - \text{د}(\text{ا})}{\text{ب} - \text{ا}}$.

المعنى الهندسي لمبرهنة القيمة المتوسطة :

من الشكل (٦–٤) لبيان منحنى دالة د (افتراضية) المتصلة على الفترة [ا ، ب] ، والقابلة للاشتقاق على الفترة] ا ، ب [تلاحظ ما يلي :

* يوجد بين العددين س = ا ، س = ب العددان س$_١$ ، س$_٢$ يناظرهما النقطتان هـ ، و على منحنى الدالة د عندئذٍ فإن :

المماس عند كل منهما موازياً للقاطع $\overline{م ء}$.

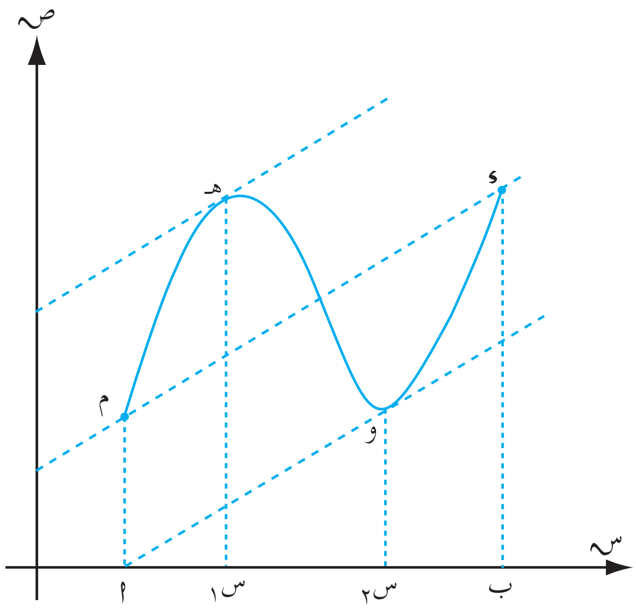
وهذا يعني ان بين النقطتين م ، ء يوجد نقطة واحدة على الأقل ، على المنحنى يكون المماس عندها موازياً للقاطع $\overline{م ء}$.

* بما أن ميل المماس عند نقطة يساوي مشتقة الدالة عند هذه النقطة ، فإن مشتقة الدالة د عند النقطة هـ (س$_١$ ، د(س$_١$)) يساوي ميل القاطع $\overline{م ء}$.

أي أن : دَ(س$_١$) = ميل $\overline{م ء}$ = $\frac{د (ب) - د (أ)}{ب - أ}$ ،

وبالمثل نجد عند النقطة و (س$_٢$ ، د(س$_٢$)) أن :

دَ(س$_٢$) = $\frac{د (ب) - د (أ)}{ب - أ}$.



الشكل (٦ - ٤)

مثال (٦ - ٣٢)

بيِّن فيما إذا كانت الدالة د (س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ ؛ تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [٠ ، ٨] ، وإذا تحققت ، أوجد قيم جـ التي تعيّنها المبرهنة .

الحـــل :

∵ الدالة د متصـلة ∀ س ∈ ح ، أي أنها متصلة على الفترة [٠ ، ٨] ،

دَ(س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{\frac{-٢}{٣}}$ قابلة للاشتقاق ∀ س ∈ ح* ،

∵ ٠ ∉] ٠ ، ٨ [، فإن الدالة د قابلة للاشتقاق على الفترة] ٠ ، ٨ [

وبذلك فإن الدالة د تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [٠ ، ٨] عندئذٍ يوجد عدد واحد على الأقل جـ ∈] ٠ ، ٨ [بحيث يكون :

دَ(جـ) = $\frac{د (٨) - د (٠)}{٨ - ٠}$ ،أي أن : $\frac{١}{٣}$ جـ$^{\frac{-٢}{٣}}$ = $\frac{٢}{٨}$ = $\frac{١}{٤}$ ⟸ جـ$^{\frac{-٢}{٣}}$ = $\frac{٣}{٤}$.

⟸ جـ$^{\frac{٢}{٣}}$ = $\frac{٤}{٣}$ ⟸ جـ^٢ = ($\frac{٤}{٣}$)^٣ = $\frac{٦٤}{٢٧}$ ⟸ جـ = ± $\frac{٨}{٣\sqrt{٣}}$.

∴ جـ = $\frac{٨}{٣\sqrt{٣}}$ ∈] ٠ ، ٨ [، أما جـ = $\frac{-٨}{٣\sqrt{٣}}$ (مرفوضة لأن $\frac{-٨}{٣\sqrt{٣}}$ ∉] ٠ ، ٨ [ ) .

تمارين ومسائل (٦ – ٧)

[١] أ) إذا كانت د(س) = $س^٣$ + ١ ، أوجد قيم جـ الناتجة عن مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة د ، حيث د : [–٢ ، ٤] ⟵ ح .

ب) بيّن فيما إذا كانت ر(س) = $\sqrt{س - ١}$ تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [١ ، ٣] ، وإذا تحققت ، فأوجد قيم جـ الناتجة عن المبرهنة .

[٢] بين أن الدالة هـ(س) = $س^٣$ – ٤ س + ٢ تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [–٢ ، ٢] ، ثم أوجد قيمة (قيم) (جـ) التي تعيّنها المبرهنة .

[٣] طبق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالتين التاليتين وفق الفترة المرافقة لكل منهما ، وإذا تحققت الشروط أوجد قيم جـ التي تعيّنها المبرهنة :

أ) د(س) = $س^{\frac{٤}{٣}}$ ، ∀ س ∈ [–١ ، ١] .

ب) د(س) = $س^٣$ – $س^٢$ ، ∀ س ∈ [–٣ ، ٢] .

[٤] إذا كانت الدالة د(س) = س + $\frac{١}{س}$ تحقق شروط رول ∀ س ∈ [–٢ ، ب] . أوجد قيمة ب ، ثم قيمة جـ التي تعينها المبرهنة .

٦ – ٨ القيم القصوى

أولاً : تزايد الدوال وتناقصها :

تذكر أن :

إذا كانت الدالة د : [أ ، ب] ⟵ ح ، ∀ $س_١$ ، $س_٢$ ∈ [أ ، ب] ، فإن الدالة :

١ – تزايدية إذا كان $س_١ < س_٢$ ⟸ د($س_١$) < د($س_٢$)

٢ – تناقصية إذا كان $س_١ < س_٢$ ⟸ د($س_١$) > د($س_٢$)

٣ – ثابتة إذا كان $س_١ < س_٢$ ⟸ د($س_١$) = د($س_٢$)

وفي هذا البند نبحث تزايد وتناقص الدوال من خلال المشتقة بناءً على المبرهنة التالية :

مبرهنة (٦ – ٦)

لتكن الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] وقابلة للإشتقاق على الفترة] أ ، ب [وكان :

١) دَ(س) > ٠ ، ∀ س ∈] أ ، ب [، فإن الدالة تزايدية على الفترة [أ ، ب] .

٢) دَ(س) < ٠ ، ∀ س ∈] أ ، ب [، فإن الدالة تناقصية على الفترة [أ ، ب] .

٣) دَ(س) = ٠ ، ∀ س ∈] أ ، ب [، فإن الدالة ثابتة على الفترة [أ ، ب] .

البرهان : بما أن الدالة تحقق شرطي مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [أ ، ب] .

إذن $\forall$ $س_١$ ، $س_٢$ $\in$ [أ ، ب] الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [$س_١$ ، $س_٢$] .

عندئذ يوجد على الأقل عدد جـ $\in$] $س_١$ ، $س_٢$ [، بحيث يكون :

$$د َ(جـ) = \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

عندما دَ(س) > ٠ ، $\forall$ س $\in$] $س_١$ ، $س_٢$ [

$$\therefore \quad \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١} > ٠ \quad \Leftarrow \quad د(س_٢) > د(س_١)$$

إذن الدالة تزايدية على الفترة [أ ، ب] .

تعريف (٦ – ١)

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف ، ب $\in$ ف ، فإن للدالة عند س = ب نقطة حرجة إذا كانت دَ(ب) = ٠ أو دَ(ب) غير موجودة .

مثال (٦ – ٣٣)

إذا كانت د(س) = $٣س^٢ - س^٣$ ، $\forall$ س $\in$ ح . أوجد فترات تزايد الدالة وتناقصها.

الحـــل :

١) د : دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على ح ، دَ(س) = ٦ س – $٣ س^٢$.

٢) نبحث عن النقاط التي تجعل دَ(س) = ٠ وذلك بوضع دَ(س) = ٠ $\Leftarrow$ ٦ س – $٣س^٢$ = ٠

$\Leftarrow$ ٣ س (٢ – س) = ٠ أي عند : س = ٠ ، س = ٢ توجد للدالة نقطتان حرجتان .

٣) نبحث عن إشارة دَ(س) في كل من الفترات] – ∞ ، ٠ [،] ٠ ، ٢ [،] ٢ ، ∞ [كما يلي:

والجدول (٦–٢) يوضح ذلك حيث الرمز (↗) يدل على تزايد الدالة والرمز (↘) يدل على تناقصها .

- $\forall$ س $\in$] – ∞ ، ٠ [، دَ(س) < ٠ ؛ لذا فإن الدالة د تناقصية على الفترة] – ∞ ، ٠] .
- $\forall$ س $\in$] ٠ ، ٢ [، دَ(س) > ٠ ؛ لذا فإن الدالة د تزايدية على الفترة [٠ ، ٢] .
- $\forall$ س $\in$] ٢ ، ∞ [، دَ(س) < ٠ ، لذا فإن الدالة د تناقصية على الفترة [٢ ، ∞ [.

س	+∞		٢		٠		−∞
دَ(س)		−	٠	+	٠	−	
د(س)		↘	٤	↗	٠	↘	

جدول (٦–٢)

مثال (٦ – ٣٤)

حدد فترات تزايد وتناقص الدالة د(س) = س^{٣} + س^{٢} − س .

الحــــل :

د(س) = س^{٣} + س^{٢} − س متصلة وقابلة للاشتقاق على ح لأنها كثيرة حدود .

دَ(س) = ٣ س^{٢} + ٢ س − ١

بوضع دَ(س) = ٠ ⟸ ٣س^{٢} + ٢س − ١ = ٠

⟸ (٣ س − ١)(س + ١) = ٠

إما س = −١ ، أو س = $\frac{١}{٣}$

لمعرفة فترات التزايد والتناقص نكوّن الجدول (٦ – ٣) التالي :

س	+∞		$\frac{١}{٣}$		−١		−∞
دَ(س)		+	٠	−	٠	+	
د(س)		↗	$\frac{−٥}{٢٧}$	↘	١	↗	

جدول (٦–٣)

من الجدول (٦ – ٣) نلاحظ أن :

※ الدالة تزايدية على الفترة]−∞ ، −١[∪]$\frac{١}{٣}$ ، ∞[.

※ الدالة تناقصية على الفترة]−١ ، $\frac{١}{٣}$[.

تدريب (٦ – ٣)

بين أن الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ تناقصية على الفترة]٠ ، ٣[.

مثال (٦ - ٣٥)

بين أن الدالة د (س) = س + جاس تزايدية على الفترة] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [.

الحـــل :

د : دالة متصلة على] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [وقابلة للاشتقاق على [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ،

دَ(س) = ١ + جتا س ؛ وبوضع دَ(س) = ٠ $\Leftarrow$ جتا س = −١

∴ س = π $\notin$ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

∴ ليس للدالة نقطة حرجة في الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، لذا نبحث عن إشارة دَ(س) فنجد أن :

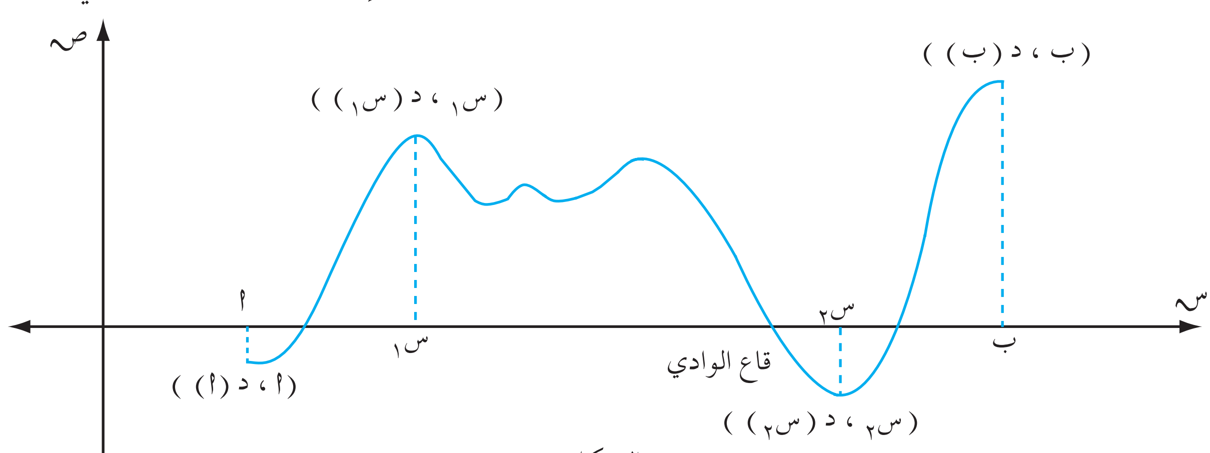
جتا س > ٠ ، $\forall$ س $\in$ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] $\Leftarrow$ ١ + جتا س > ٠ أي أن :

دَ(س) > ٠ ، $\forall$ س $\in$ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] .

∴ الدالة د تزايدية على الفترة] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [.

ثانياً : القيم القصوى :

إذا تذكرت سلاسل الجبال في منطقتك أو مناطق أخرى قمت بزيارتها ، فإنك لا شك قد لاحظت أنها تبدو على شكل منحنى، لها قمم شاهقة الارتفاع ،تنحدر بأوديتها نحو أدنى نقطة في أسفلها [انظر الشكل (٦–٥)] نموذج لدالة افتراضية . لتكن د(س) تمثل تلك السلاسل على الفترة [أ ، ب] عندئذٍ يلاحظ من الشكل ما يلي :



الشكل (٦ – ٥)

١) يوجد للدالة د قيمة عظمى محلية عند $س_١$ هي : د($س_١$) وذلك لأنها أكبر من القيم التي حولها .

٢) للدالة د قيمة عظمى محلية عند ب وهي : د(ب) وذلك لأنها أكبر من القيم التي حولها ، مع ملاحظة أن د(ب) أكبر قيم الدالة على الفترة [أ ، ب] لذلك تسمى بالقيمة العظمى المطلقة .

٣) للدالة د قيمة صغرى محلية عند أ وهي : د (أ) وذلك لأنها أصغر من القيم التي حولها .

٤) للدالة د قيمة صغرى محلية عند $س_٢$ وهي : د($س_٢$) وذلك لأنها أصغر من القيم التي حولها مع ملاحظة أن د ($س_٢$) هي أصغر قيم الدالة على الفترة [ﺃ ، ب] لذلك تسمَّى بالقيمة الصغرى المطلقة .

فمثلاً : يلاحظ من الشكل (٦–٦) لبيان الدالة د (الافتراضية) أن :

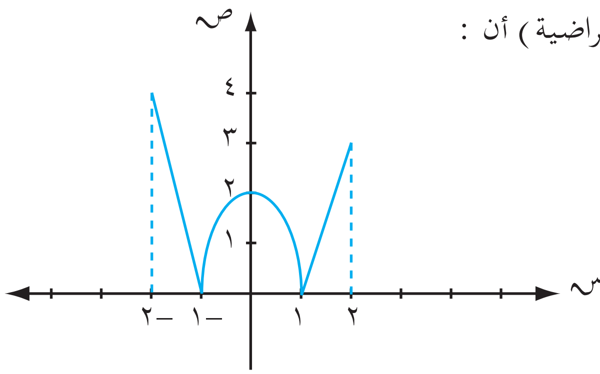
النقطة (–٢ ، ٤) عظمى مطلقـة

النقطة (–١ ، ٠) صغرى مطلقة

النقطة (٠ ، ٢) عظمى محلية

النقطة (١ ، ٠) صغرى مطلقة

النقطة (٢ ، ٣) عظمى محلية .



الشكل (٦ – ٦)

وعلى ذلك يمكـن إيجاد القيم القصـوى (عظمى أو صغرى) المحلية والمطلقة باستخدام اختبار المشتقة الأولى تبعاً لشروط المبرهنات التالية :

مبرهنة (٦ – ٧)

إذا كانت د دالة متصلة عند النقطة الحرجة س = ب ؛ فإن :

١) د (ب) قيمة عظمى محلية للدالة د إذا كانت دَ (س) ≥ ٠ يسار العدد ب ، دَ(س) ≤ ٠ يمين العدد ب .

٢) د (ب) قيمة صغرى محلية للدالة د إذا كانت دَ(س) ≤ ٠ يسار العدد ب ، دَ(س) ≥ ٠ يمين العدد ب .

مبرهنة (٦ – ٨)

إذا كان للدالة د قيمـــة قصـــوى محلية عند س = ب فإن :

دَ (ب) = ٠ ، أو دَ (ب) غير موجودة .

عكس مبرهنة (٦ – ٨) :

إذا كانت دَ(ب) = ٠ ، أو غيـر موجودة ، فإنه ليس بالضرورة أن تكون د (ب) قيمة قصوى محليـــة للدالة د .

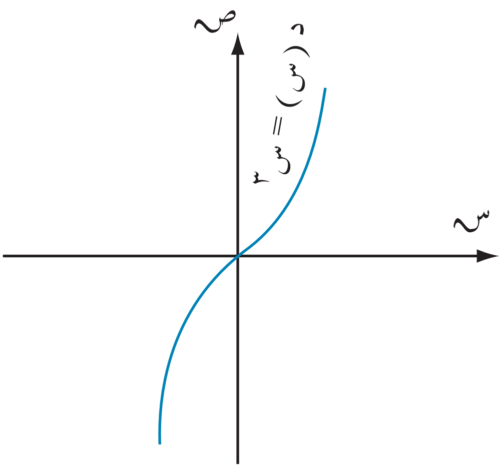
فمثلاً :

د (س) = $س^{٣}$ ⟸ دَ(س) = $٣س^{٢}$ ≥ ٠ ∀ س ∈ ح

إذن الدالة د تزايدية ، ولا يوجد لها نقاط تكون عندها قيم عظمى أو صغرى محلية بالرغم من أن دَ(٠) = ٠ ، لكن النقطة (٠ ، ٠) ليست قصوى .

لأن المشتقة لاتغير إشارتها جوار س = ٠

[انظر الشكل (٦ – ٧)] .

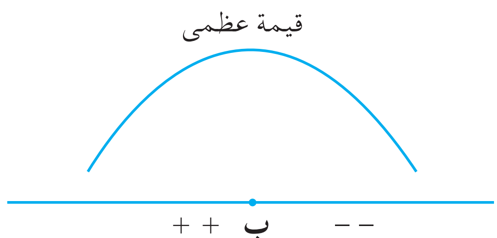


الشكل (٦ – ٧)

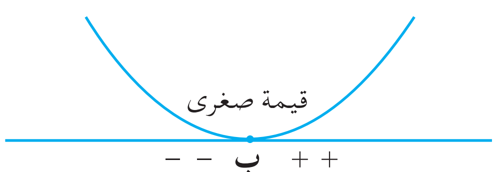
ملاحظة :

القيم القصوى تتحدد بشكل عام لأي دالة متصلة عند س = ب كما يلي :

١) للدالة قيمة عظمى محلية إذا تحولت إشارة المشتقة الأولى من موجب إلى سالب [انظر الشكل (٦–٨)]
ويكون للدالة قيمة صغرى محلية .
إذا تحولت إشارة المشتقة الأولى من سالب إلى موجب [انظر الشكل (٦– ٩)] .



الشكل (٦ – ٨)



الشكل (٦ – ٩)

٢) كل قيمة قصوى مطلقة تكون محلية والعكس غير صحيح فيما عدا الحالة التي تكون عندها القيم القصوى المحلية وحيدة .

٣) عند أطراف الفترة الواقعة في المجال يوجد دائماً قيم قصوى .

٤) كل نقطة لقيم قصوى تكون حرجة ولكن ليس بالضرورة أن تكون النقاط الحرجة قيماً قصوى .

وعلى ذلك يمكن تعيين القيم القصوى المطلقة طبقاً لشروط مبرهنة القيمة القصوى المطلقة التالية :

مبرهنة (٦ – ٩)

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [ا ، ب] فإنها تبلغ قيمتها القصوى المطلقة (العظمى أو الصغرى) عند أعداد تنتمي إلى الفترة [ا ، ب] .

وعليه يمكن إيجاد القيم القصوى للدالة د باتباع الخطوات التالية :

١) تحقق من أن الدالة متصلة على الفترة المغلقة [ا ، ب] .

٢) أوجد النقاط الحرجة للدالة في الفترة] أ ، ب [.

٣) أوجد قيم الدالة عند جميع النقاط الحرجة التي حصلت عليها بالإضافة إلى د (أ) ، د (جـ) .

٤) حدِّد أكبر قيمة للدالة من بين القيم التي حصلت عليها لتكون هي القيمة العظمى المطلقة للدالة وأصغر قيمة لتكون هي القيمة الصغرى المطلقة للدالة .

مثال (٦ -٣٦)

إذا كانت د(س) = $س^٣ - ٢س^٢ + س$. أوجد القيم القصوى للدالة على الفترة [-١ ، ٢] موضحاً نوعها .

الحـــل :

١) الدالة د متصلة ∀ س ∋ ح ؛ لذا فهي متصلة على [-١ ، ٢] .

٢) نبحث عن النقـاط الحرجة للدالة د ، حيث

$دَ(س) = ٣س^٢ - ٤س + ١$ ، وذلك

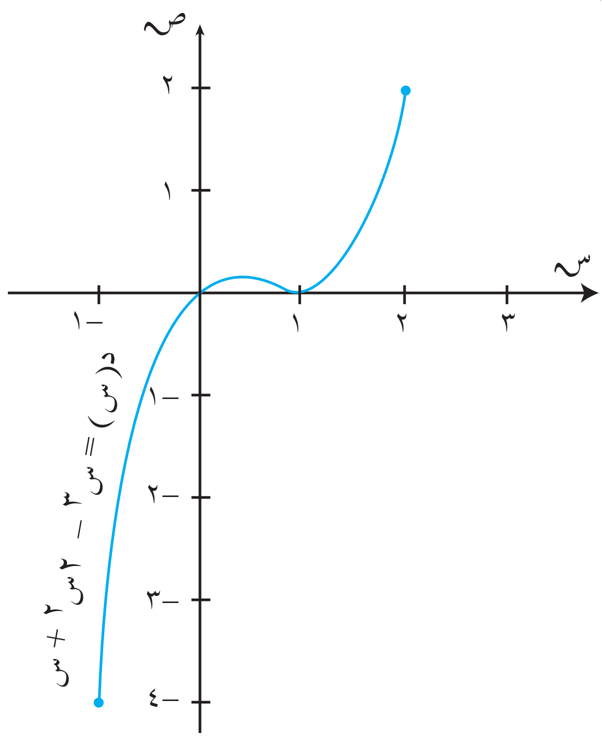
بوضع دَ(س) = ٠ ،

∴ $٣ س^٢ - ٤س + ١ = ٠$

⟸ (٣ س - ١) (س - ١) = ٠

إما س = $\frac{١}{٣}$ أو س = ١ ،

د $(\frac{١}{٣}) = \frac{٤}{٢٧}$ ، د (١) = ٠ ،



الشكل (٦ - ١٠)

نبحث الأن عن النقاط الحرجة عند اطراف الفترة [-١ ، ٢] فنجد أن:

د (-١) = -٤ ، د (٢) = ٢ .

إذن للدالة د نقاط حرجة عند قيم س التي تساوي -١ ، $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٢

والجدول (٦ - ٤) التالي يوضح القيم القصوى

س	٢		١		$\frac{١}{٣}$		-١
دَ(س)		+	٠	-	٠	+	٠
د (س)	٢	↗	٠	↘	$\frac{٤}{٢٧}$	↗	-٤

جدول (٦-٤)

من الجدول (٦ – ٤) تلاحظ أن :

١ – للدالة د قيمة عظمى مطلقة عند س = ٢ ، وهي د (٢) = ٢ ، أي أن النقطة (٢ ، ٢) عظمى مطلقة .

٢ – للدالة د قيمة صغرى مطلقة عند س = –١ ، وهي د (–١) = –٤ ، أي أن النقطة (–١ ، –٤) صغرى مطلقة .

٣ – للدالة د قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{١}{٣}$ ، وهي د ($\frac{١}{٣}$) = $\frac{٤}{٢٧}$ ، أي أن النقطة ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٤}{٢٧}$) عظمى محلية .

٤ – للدالة د قيمة صغرى محلية عند س = ١ ، وهي د (١) = ٠ ؛ أي أن النقطة (١ ، ٠) صغرى محلية .

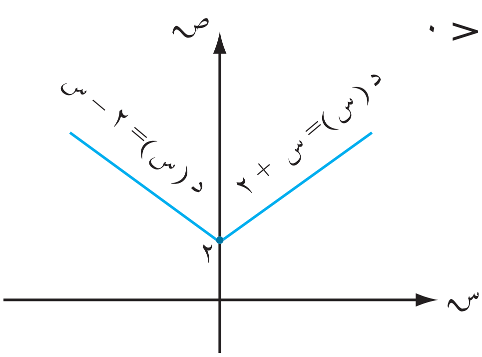
مثال (٦ – ٣٧)

أثبت أن للدالة د (س) = | س | + ٢ نقطة حرجة عند س = ٠ موضحاً نوعها .

الحـــل :

باستخدام تعريف المقياس نعيد تعريف الدالة بالصورة :

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س + ٢ ، س} \geq ٠ \\ \text{٢ – س ، س} \leq ٠ \end{cases} \quad \text{، دَ(س)} = \begin{cases} \text{١ ، س} > ٠ \\ \text{–١ ، س} < ٠ \end{cases}$$



الشكل (٦ – ١١)

∵ دَ (٠^+) = ١ ، دَ (٠^-) = –١

∴ دَ (٠) غير موجودة ، لأن دَ (٠^+) ≠ دَ (٠^-) .

أي عند س = ٠ يوجد للدالة د نقطة حرجة .

ولإيضاح نوع النقطة الحرجة يمكن دراسة الدالة عندما

س > ٠ ، س < ٠ كما يلي :

$$∵ \text{دَ(س)} = \begin{cases} \text{–١} < ٠ \text{ ، عندما س} < ٠ \\ \text{١} > ٠ \text{ ، عندما س} > ٠ \end{cases}$$

∴ الدالة تتناقص قبل الصفر وتتزايد بعده وهذا يعني أن النقطة (٠ ، ٢) صغرى مطلقة .

تدريب (٦ – ٤)

أوجد القيم القصوى للدالة :

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ \text{ ، } –١ \leq \text{س} < ٢ \\ \text{٦ – س ، } ٢ \leq \text{س} \leq ٣ \end{cases}$$

على الفترة [–١ ، ٣] موضحاً نوعها .

ملاحظة :

يمكن التعرف على نوع القيم القصوى المحلية باختبار المشتقة الثانية إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق حتى المرتبة الثانية تبعاً لشروط المبرهنة التالية :

مبرهنة (٦ – ١٠)

لتكن النقطة ب في مجال الدالة د ، $د'(ب) = ٠$ ، وكان :

١) $د''(ب) > ٠$ فإن للدالة د عند س = ب قيمة عظمى محلية هي : د (ب) .

٢) $د''(ب) < ٠$ فإن للدالة د عند س = ب قيمة صغرى محلية هي : د (ب) .

مثال (٦ – ٣٨)

أوجد النقاط الحرجة التي عندها قيم قصوى محلية للدالة $د(س) = س^٤ - ٢ س^٢$ ، $\forall$ س $\in$ ح باستخدام اختبار المشتقة الثانية .

الحــــل :

الدالة د متصلة وقابلة للاشتقاق على ح لأنها كثيرة حدود .

$\because$ $د'(س) = ٤ س^٣ - ٤ س$

بوضع $د'(س) = ٠$ $\therefore$ $٤ س^٣ - ٤ س = ٠$ $\Leftarrow$ $٤ س (س^٢ - ١) = ٠$

إما س = ٠ ، أو س = ± ١

إذن للدالة د ثلاث نقاط حرجة عند قيم س التي تساوي −١ ، ٠ ، ١

$\because$ $د''(س) = ١٢ س^٢ - ٤$

والجدول التالي يوضح اختبار المشتقة الثانية للنقاط الحرجة :

س	+∞	١	٠	−١	−∞
$د'(س)$		٠	٠	٠	
$د''(س)$		+	−	+	
$د(س)$		−١	٠	−١	
		صغرى محلية	عظمى محلية	صغرى محلية	

جدول (٦ – ٥)

تلاحظ من الجدول (٦ – ٥) أنه ليس للدالة قيم قصوى مطلقة .

مثال (٦ – ٣٩)

ابحث عن القيم القصــوى المحليــة للدالة $ص = س + \frac{١}{س}$ في مجــال تعريفهــا وبين نوعهـا (عظمى أم صغرى) .

الحـــل :

الدالة د متصلة وقابلة للاشتقاق على ح* ، دَ(س) = ١ – $\frac{١}{س^٢}$ وعندما دَ(س) = ٠ ، فإن :
س = ١ ، س = –١

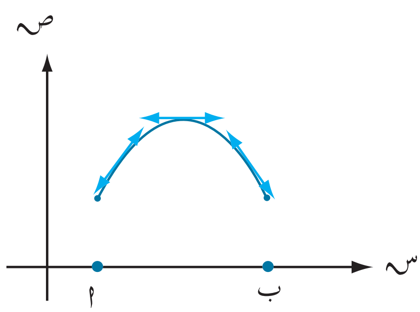
∵ دً(س) = $\frac{٢}{س^٣}$ نجد أن : دً(١) = ٢ > ٠ ، دً(–١) = –٢ < ٠ .

لذلك فإن للدالة د قيمة عظمى محلية عند س = –١ وهي : د(–١) = –٢ ، وقيمة صغرى محلية عند س = ١ وهي : د(١) = ٢ .

ملاحظة :

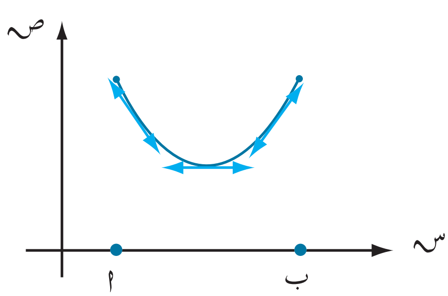
من المثال السابق نلاحظ أن قيمة الدالة عند نقطة القيمة العظمى أصغر من قيمتها عند نقطة القيمة الصغرى . مما يوضّح عدم وجود علاقة بين قيم الدالة ونقاط القيم القصوى .

ثالثاً : فترات التقعر ونقاط الانعطاف :



الشكل (٦ – ١٢ أ)

نلاحظ أن المنحنى في الشكل (٦ – ١٢ أ) يقع تحت المماسات المرسومة عند جميع النقاط (س ، د(س)) ∀ س ∈] أ ، ب [، وفي هذه الحالة المنحنى مقعراً للأسفل .



الشكل (٦ – ١٢ ب)

بينما في الشكل (٦ – ١٢ ب) يقع المنحنى فوق المماسات المرسومة عند جميع النقاط (س ، د(س)) ∀ س ∈] أ ، ب [، وفي هذه الحالة المنحنى مقعراً للأعلى .

ولتحديد الفترات التي عندها بيان الدالة مقعراً نحو الأعلى ، أو نحو الأسفل نستعين بالمبرهنة التالية :

مبرهنة (٦ – ١١)

إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق الثاني على الفترة ف ⊂ ح ، فإن :
١) منحنى الدالة د مقعراً للأعلى إذا كانت دً(س) > ٠ .
٢) منحنى الدالة د مقعراً للأسفل إذا كانت دً(س) < ٠ .

تعريف (٦ – ٢)

يقال للنقطة (ب ، د (ب)) نقطة انعطاف لبيان الدالة د إذا تحقق ما يلي :

١) دً(ب) = ٠ ، أو دً(ب) غير موجودة .

٢) دً(س) تغير إشارتها جوار العدد ب .

مثال (٦ – ٤٠)

أوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف للدالة د (س) = ٦س^{٣} – س^{٤} .

الحـــــل :

دَ(س) = ١٨س^{٢} – ٤س^{٣} ، دً(س) = ٣٦ س – ١٢ س^{٢}

نضع دً(س) = ٠ ⟸ ٣٦ س – ١٢س^{٢} = ٠

⟸ ١٢س (٣ – س) = ٠

إما س = ٠ ، أو س = ٣ .

نبحث عن إشارة دً (س) ، وفق الجدول التالي :

س	+ ∞		٣		٠		– ∞
دً (س)		–	٠	+	٠	–	
د (س)		مقعر للأسفل	٨١	مقعر للأعلى	٠	مقعر للأسفل	

جدول (٦– ٦)

من الجدول (٦– ٦) نلاحظ أن :

١) في الفترة] ٠ ، ٣ [منحنى الدالة مقعراً نحو الأعلى .

٢) في الفترة] – ∞ ، ٠ [∪] ٣ ، ∞ [منحنى الدالة مقعراً نحو الأسفل .

٣) النقطتين (٠ ، ٠) ، (٣ ، ٨١) نقاط انعطاف .

رابعاً : تطبيقات على القيم القصوى :

في الكثير من المسائل الحياتية نحتاج عادة إلى معرفة أكبر قيمة أو أصغر قيمة ككميات متغيِّرة ونقوم عند حلها بتحويلها من مسائل لفظية إلى معادلات أو دوال لإيجاد القيم المطلوبة .

وحل المسائل التطبيقية على القيم القصوى يمكن اتباع الخطوات التالية :

١) اقرأ المسألة وحدّد المتغيرات ، وارسم شكلاً تخطيطياً للمسألة .
٢) حدّد المتغير المطلوب إيجاد قيمته القصوى وكتابة المعادلة التي تربط هذا المتغير بالمتغيرات الأخرى .
٣) كتابة المتغير المطلوب إيجاد قيمته القصوى كدالة في متغير واحد بدلالة البيانات المعطاة في المسألة .
٤) حدد مجال الدالة الناتجة (إن أمكن) .
٥) استخدم المعلومات التي سبق دراستها في تحديد القيمة القصوى المطلوبة .

مثال (٦ - ٤١)

يُراد صنع مستطيل من سلك طوله ٢٠ سم ، أوجد بُعدي هذا المستطيل بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن .

الحل :

نفرض أن عرض المستطيل = س سم ∴ طول المستطيل = (١٠ − س) سم

فتكون : مساحة المستطيل = (١٠ − س) × س = ١٠ س − س^{٢}

ولإيجاد النقطة الحرجة نجد أن :

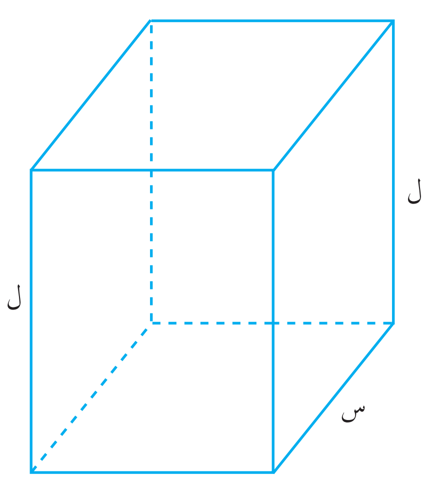
د َ(س) = ١٠ − ٢ س = ٠ ⟸ س = ٥

وبالتالي فإن : د (٥) = ٢٥ ، د (٠) = ٠ ، د (١٠) = ٠

∴ طول المستطيل = ٥ سم ، وعرضه = ٥ سم لكي تكون مساحة المستطيل أكبر ما يمكن .

مثال (٦ - ٤٢)

متوازي مستطيلات قاعدته مربع طول ضلعه = س سم ، ومجموع أطوال أحرفه تساوي ٣٠٠ سم . أثبت أن حجمه يساوي س٢ (٧٥−٢س) ، ثم أوجد أبعاد متوازي المستطيلات عندما يكون حجمه أكبر ما يمكن .



الشكل (٦ − ١٣)

الحل :

نفرض أن حجم متوازي المستطيلات ح = س^{٢} ل ......(١)

[انظر الشكل (٦− ١٣)] .

وللتعبير عن ل بدلالة س نستخدم المعادلة :

$٣٠٠ = ٤ل + ٨$ س . أي أن $٧٥ = $ ل $+ ٢$ س

$\therefore$ ل $= ٧٥ - ٢$ س ....(٢)

وبالتعويض عن (٢) في (١) لكل س $\in$] ٠ ، $\frac{٧٥}{٢}$ [نجد أن :

ح = س^{٢} (٧٥−٢س) = ٧٥س^{٢} − ٢س^{٣} ،

حَ = ١٥٠س − ٦س^{٢} ، وبوضع حَ = ٠ نجد أن :

٦ س (٢٥ − س) = ٠ $\Leftarrow$ س = ٢٥ ، أو س = ٠ (مرفوضة لأن ح $>$ ٠) .

حً = ١٥٠ − ١٢س ، وعند س = ٢٥ فإن :

حً = ١٥٠ − ١٢ × ٢٥ = −١٥٠ . أي أن الحجم يكون أكبر ما يمكن عندما س = ٢٥ .

ل = ٧٥ − ٢ × ٢٥ = ٢٥ سم .

إذن فإن أكبر حجم لمتوازي المستطيلات هو عندما يتحول إلى مكعب طول حرفه : ٢٥ سم .

تمارين ومسائل (٦−٨)

[١] حدِّد فترات التزايد والتناقص لكل من الدوال التالية :

أ) د(س) = س^{٢} − ٤ س + ٢ ، $\forall$ س $\in$] ٠ ، ٤ [.

ب) هـ(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ١ ، س $\in$ ح .

جـ) ر(س) = $\frac{س}{س − ٢}$ ، $\forall$ س $\in$ ح / $\{٢\}$.

د) و(س) = جا^{٢} س ، $\forall$ س $\in$] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [.

هـ) ص = س |س| .

[٢] أثبت أن د :] ٠ ، $\frac{\pi}{٤}$ [$\longrightarrow$ ح حيث د(س) = جاس + جتاس دالة متزايدة على مجموعة تعريفها .

[٣] احسب كلاًّ من ل ، م بحيث تكون د(س) = س^{٢} + ل س + م لها قيمة صغرى = ٣ عندما س = ١ .

[٤] احسب القيم القصوى المطلقة للدالة ص = $\begin{cases} (س + ٣)^{٢} & ، س \leq ٠ \\ (س − ٣)^{٢} & ، س \geq ٠ \end{cases}$ على الفترة] −٢ ، ٢ [.

[٥] عددان مجموعهما ١٦ ، أوجد العددين إذا كان مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن .

[٦] أوجد القيم القصوى لكل من الدوال التالية :

أ) $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٤\,\text{س} + ٦$.　　　ب) $\text{ص} = \text{س}\,(\text{س} - ١)^{٢}$.

جـ) $\text{ص} = \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - ١}$ ، $\text{س} \neq ١$.　　　د) $\text{ص} = \text{س}\,|\text{س} - ٤|$.

[٧] إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ١$. أوجد فترات التقعّر لمنحنى الدالة للأعلى وللأسفل ، ونقاط الانعطاف .

[٨] استخـــدم المشـتقــة الثانيــة فـي إيجاد القيــم القصــوى ونقاط الانعطاف لمنحنــى الدالة $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٢}$ موضحاً فترات التقعّر نحو الأعلى والأسفل لمنحنى الدالة .

[٩] إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٨\,\text{س}$.أوجد فترات التقعّر للأعلى وللأسفل ونقاط الانقلاب .

[١٠] أوجد قيم كلٍّ من ا ، ب بحيث تكون النقطة (١ ، ٣) نقطة انعطاف للمنحنى $\text{ص} = \text{ا}\,\text{س}^{٣} + \text{ب}\,\text{س}^{٢}$.

[١١] ارسم شكلاً لبيان منحنى الدالة د في الفترة [١ ، ٣] بدلالة المعلومات التالية :

$\text{د}(١) = ٠$ ، $\text{د}(٣) = ٤$ ، $\text{د}'(\text{س}) > ٠$ ، $\forall\, \text{س} \in [١ ، ٣]$ ، $\text{د}''(\text{س}) < ٠$ ، $\forall\, \text{س} \in [١ ، ٣]$

[١٢] ارسم منحنى الدالة $\text{د}(\text{س}) = \text{جا}\,٣\,\text{س}$ في الفترة $[\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,]$.

٦ – ٩ دراسة تغيّر الدالة

الفروع اللانهائية :

تعريف (٦ – ٣)

نقول أن للدالة د فرعاً لانهائياً إذا كان من الممكن أن يسعى أحد المتغيرين إلى اللانهاية (الموجبة ، أو السالبة) ، أي إذا حوت مجموعة تعريف هذه الدالة أو مداها فترة من الشكل $[\text{ا} ، \infty[$ أو من الشكل $]-\infty ، \text{ا}]$.

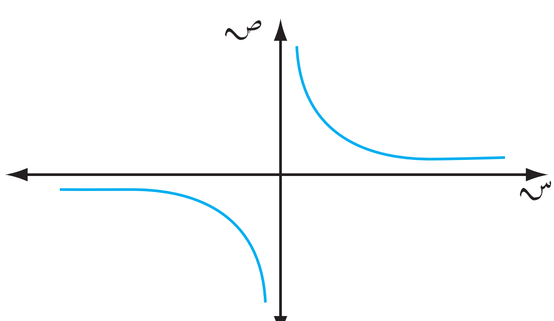
فمثلاً : إذا كانت الدالة $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{س}}$ تلاحظ أن :

$\text{م.ت} = \text{ح}^{*} =]-\infty ، ٠[\cup]٠ ، \infty[$.

أي أن مجموعة تعريفها تحتوي على فرعان لانهائيان .

$\because \lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}} \text{د}(\text{س}) = +\infty$ ،

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^{-}} \text{د}(\text{س}) = -\infty$ ، أي أن مدى الدالة يحتوي أيضاً على فرعان لانهائيان . وبالتالي فإن للدالة د أربعة فروع لانهائية كما في الشكل (٦ – ١٤) .



الشكل (٦ – ١٤)

إما إذا كانت الدالة د (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ ، فإن مجموعة تعريفها] −٢ ، ٢ [ومداها أيضاً] ٠ ، ٢ [، وبالتالي فإن هذه الدالة ليس لها فروع لانهائية .

المستقيمات المقاربة :

إذا رمزنا لبيان الدالة ص = د (س) بالرمز ك ، وكانت مجموعة تعريفها من الشكل] ٲ ، ∞ [، أو] −∞ ، ٲ [ورمزنا لبيان المستقيم الذي معادلته ص = ٲ س + ب بالرمز ل ، نقول أن :

ص = ٲ س + ب مستقيماً مقارباً إذا كان | ك − ل | ← ٠ عندما س ← ± ∞ .

أي أن : $\lim\limits_{س \to \pm\infty}$ د (س) − ص = ٠ .

يمكن تصنيف المستقيمات المقاربة على النحو التالي :

١ − المستقيم المقارب الأفقي (الموازي لمحور السينات) :

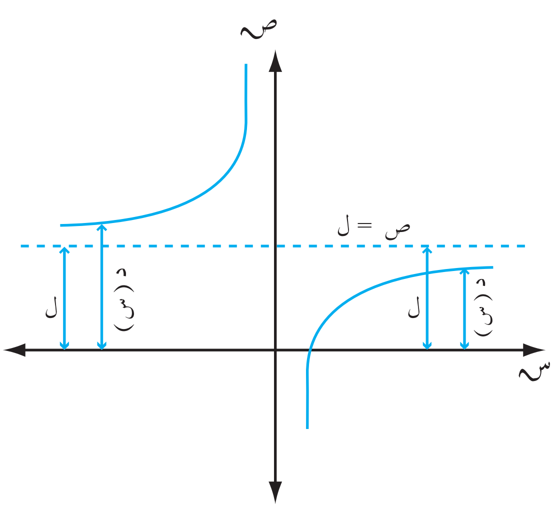
تعريف (٦ − ٤)

إذا كانت مجموعة تعريف الدالة ص = د (س) من الشكل] ٲ ، ∞ [، أو] −∞ ، ٲ [، وكانت $\lim\limits_{س \to \pm\infty}$ د (س) = ل ∈ ح ؛ فإن المستقيم ص = ل مستقيم مقارب أفقي موازي لمحور السينات .

ملاحظات على التعريف :

١) البعد بين أي نقطة على منحنى الدالة والمستقيم المقارب هو | د (س) − ل | .

٢) عندما د (س) − ل > ٠ يكون منحنى الدالة أسفل المستقيم المقارب ، وعندما د (س) − ل < ٠ يكون منحنى الدالة أعلى المستقيم المقارب ، كما في الشكل (٦ − ١٥) .



الشكل (٦ − ١٥)

٢ – المستقيم المقارب الرأسي (الموازي لمحور الصادات) :

تعريف (٦ – ٥)

إذا كانت مجموعة تعريف الدالة ص = د (س) ، من الشكل ح / {جـ} ، وكانت :

$\underset{س \leftarrow جـ}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ± ∞ ، فإن المستقيم س = جـ مستقيم مقارب رأسي موازي لمحور الصادات .

ملاحظات على التعريف :

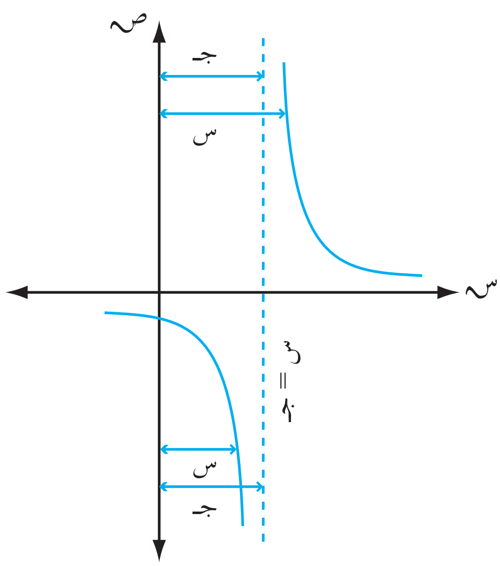
١) عندما تكون م . ت = ح لايوجد للدالة د مستقيمات مقاربة رأسية .

٢) عندما تكون م . ت = ح / { جـ }

وكانت $\underset{س \leftarrow جـ}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ± ∞ ،

فإن س = جـ مستقيم مقارب رأسي .

٣) عندما س – جـ > ٠ يكون منحنى الدالة يسار المستقيم المقارب ، وعندما س – جـ < ٠ يكون منحنى الدالة يمين المستقيم المقارب كما هو موضح في الشكل (٦ – ١٦) .



الشكل (٦ – ١٦)

٣ – المستقيم المقارب المائل :

تعريف (٦ – ٦)

إذا كانت مجموعة تعريف الدالة ص = د (س) من الشكل [ا ، ∞ [، أو] – ∞ ، ا] ،

وكانت $\underset{س \leftarrow \pm\infty}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ± ∞ فيكون المستقيم ص = ا س + ب مستقيماً مقارباً مائلاً إذا وجدت

كل من ا ، ب حيث ا = ($\underset{س \leftarrow \pm\infty}{\text{نهـــا}} \frac{د (س)}{س}$) ∈ ح ، ب = ($\underset{س \leftarrow \pm\infty}{\text{نهـــا}}$ [د (س) – ا س]) ∈ ح .

ملاحظة على التعريف :

إذا كانت د (س) = $\frac{هـ (س)}{ر (س)}$ حيث الدالتان هـ ، ر كثيرتا حدود ، ر (س) ≠ ٠ ، ودرجة الدالة هـ تزيد عن درجة الدالة ر بدرجة واحدة ولايمكن تحويل الدالة د إلى كثيرة حدود .

وكان د (س) ← ± ∞ عندما س ← ± ∞ ، فإن للدالة مستقيم مقارب مائل .

مثال (٦ - ٤٣)

بيّن أن لكل من الدالتين التاليتين :

أ) $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢}$ مستقيمات مقاربة موازية للمحورين الإحداثيين.

ب) $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س} - ٢}$ مستقيم مقارب مائل .

الحـــل :

أ) $\because \text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢}$ ، $\text{م} . \text{ت} = \text{ح} \, / \, \{٢\}$ ،

$$\lim_{\text{س} \to \pm\infty} \frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢} = ١$$

$\therefore$ للدالة مستقيم مقارب أفقي معادلته : $\text{ص} = ١$.

$$\lim_{\text{س} \to ٢^{+}} \frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢} = +\infty \quad ، \quad \lim_{\text{س} \to ٢^{-}} \frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢} = -\infty$$

$\therefore$ للدالة مستقيم مقارب رأسي معادلته : $\text{س} = ٢$.

ب) $\because \lim_{\text{س} \to \pm\infty} \frac{\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س} - ٢} = \pm\infty$ ، من الممكن إيجاد مستقيم مقارب مائل معادلته : $\text{ص} = \text{أ}\,\text{س} + \text{ب}$

حيث $\text{أ} = \lim_{\text{س} \to \pm\infty} \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \to \pm\infty} \frac{\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}} = ١$

$$\text{ب} = \lim_{\text{س} \to \pm\infty} \left(\text{د}(\text{س}) - \text{أ}\,\text{س} \right) = \lim_{\text{س} \to \pm\infty} \left(\frac{\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س} - ٢} - \text{س} \right)$$

$$= \lim_{\text{س} \to \pm\infty} \frac{\text{س}^{٢} + ٣ - \text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \pm\infty} \frac{٢\,\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢} = ٢$$

$\therefore$ للدالة مستقيم مقارب مائل معادلته : $\text{ص} = \text{س} + ٢$.

عند دراسة تغيرات الدوال نتبع الخطوات التالية :

١ – إيجاد مجموعة التعريف .
٢ – إيجاد الفروع اللانهائية والمقاربات (إن وجدت) .
٣ – إيجاد القيم القصوى (العظمى والصغرى) والاطراد .
٤ – إيجاد نقاط الانعطاف وفترات التقعر .
٥ – إيجاد النقاط المساعدة .
٦ – نكون جدولاً يلخص النقاط السابقة .
٧ – نرسم بيان الدالة .

مثال (٦ – ٤٤)

ادرس تغيرات الدالة $د(س) = س^{٣} - ٣س$ ، وارسم بيانها .

الحــــل :

١) $\because$ $د(س) = س^{٣} - ٣س$ $\qquad \therefore$ $م.ت = ح$.

٢) الفروع اللانهائية :

$\lim\limits_{س \to -\infty} (س^{٣} - ٣س) = -\infty$ ، $\lim\limits_{س \to +\infty} (س^{٣} - ٣س) = +\infty$ ، وبالتالي للدالة فرعان لانهائيان ، ولا توجد مستقيمات مقاربة لأنها كثيرة حدود .

٣) $\because$ $د'(س) = ٣س^{٢} - ٣$

نضع $د'(س) = ٠ \Leftarrow ٣س^{٢} - ٣ = ٠$.

$\Leftarrow س = \pm ١$

$د(١) = ١ - ٣ = -٢ \Leftarrow (١ ، -٢)$ نقطة قصوى ،

$د(-١) = -١ + ٣ = ٢ \Leftarrow (-١ ، ٢)$ نقطة قصوى .

جدول (٦ – ٧)

$-\infty$		-١		١		$+\infty$	س
	+	٠	−	٠	+		$د'(س)$
	↗	٢	↘	−٢	↗		$د(س)$
		(−١ ، ٢)		(١ ، −٢)			

٤) $د''(س) = ٦س$

نضع $د''(س) = ٠ \Leftarrow ٦س = ٠$

$\Leftarrow س = ٠$

نجد أن : $د''(س)$ تُغير إشارتها جوار الصفر ،

$\therefore$ $(٠ ، ٠)$ نقطة انعطاف .

جدول (٦ – ٨)

$-\infty$		٠		$+\infty$	س
	$\frown$ −	٠	$\smile$ +		$د''(س)$
		٠			$د(س)$
		(٠ ، ٠)			

٥) عند $س = ٠ \Leftarrow ص = ٠$ $\qquad \therefore$ المنحنى يمر بالنقطة $(٠ ، ٠)$.

وعند $ص = ٠ \Leftarrow س^{٣} - ٣س = ٠ \Leftarrow س(س^{٢} - ٣) = ٠$

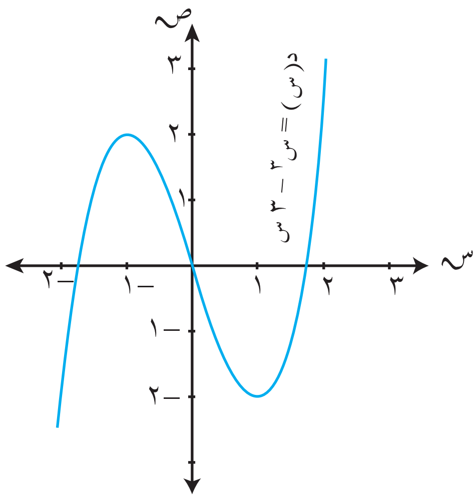
إما $س = ٠$ ، أو $س = \sqrt{٣}$ ، أو $س = -\sqrt{٣}$

المنحنى يقطع محور السينات في النقاط $(٠ ، ٠)$ ، $(\sqrt{٣} ، ٠)$ ، $(-\sqrt{٣} ، ٠)$.

٦) نلخص ما سبق في الجدول التالي :

جدول (٦ – ٩)

س	$+\infty$		١		٠		−١		$-\infty$
دَ(س)		+	٠	−		−	٠	+	
دً(س)		+	٠	+	٠	−		−	
د(س)	$+\infty$	↗	−٢ (١ ، −٢) صغرى	↘	٠ (٠ ، ٠) انعطاف	↘	٢ (−١ ، ٢) عظمى	↗	$-\infty$



الشكل (٦ – ١٧)

٧) نرسم بيان الدالة كما في الشكل (٦ – ١٧) .

مثال (٦ – ٤٥)

ادرس تغيرات الدالة د(س) = | − س٢ + ٥ س | − ٤ .

الحـــل :

١) ∵ د (س) = | − س٢ + ٥ س | − ٤ ∴ م . ت = ح

نجد قيم س التي يتغير عندها تعريف الدالة

بوضع − س٢ + ٥ س = ٠

⟸ س (س − ٥) = ٠ ⟸ س = ٠ ، أو س = ٥

نعيد تعريف الدالة ، ثم نوجد

دَ (س) ، دً(س) .

كما في الجدول (٦ – ١٠) .

جدول (٦ – ١٠)

س	$+\infty$ ... ٥	٥ ... ٠	٠ ... $-\infty$
د (س)	س٢ − ٥ س − ٤	−س٢ + ٥ س − ٤	س٢ − ٥ س − ٤
دَ(س)	٢ س − ٥	− ٢ س + ٥	٢ س − ٥
دً(س)	٢	−٢	٢

٢) الفروع اللانهائية

نهـــا د (س) = $+\infty$ ، (س ← $-\infty$)

نهـــا د (س) = $+\infty$ (س ← $+\infty$)

إذن للدالة فرعان لانهائيان وليس لها مستقيمات مقاربة لأنها كثيرة حدود

٣) وبوضع دَ(س) = ٠ أما ٢ س − ٥ = ٠ ⟸ س = $\frac{٥}{٢}$ ∌ [$-\infty$ ، ٠] ∪ [٥ ، ∞ [

أو − ٢ س + ٥ = ٠ ⟸ س = $\frac{٥}{٢}$ ∈] ٠ ، ٥ [، كما أن كل من دَ(٠) ، دَ(٥) غير موجودتان .

د$\left(\frac{٥}{٢}\right)$ = $\frac{-٢٥}{٤}$ + $\frac{٢٥}{٢}$ − ٤ = $\frac{٩}{٤}$ ، النقطة $\left(\frac{٥}{٢} ، \frac{٩}{٤}\right)$ قصوى

د(٥) = ٢٥ − ٢٥ − ٤ = −٤ ، النقطة (٥ ، −٤) قصوى

د(٠) = ٠ − ٠ − ٤ = −٤ ، النقطة (٠ ، −٤) قصوى

عندما دَ(س) < ٠ ، فالدالة د تناقصية على الفترة] −∞ ، ٠ [∪] $\frac{٥}{٢}$ ، ٥ [

وعندما دَ(س) > ٠ ، فالدالة د تزايدية في الفترة] ٠ ، $\frac{٥}{٢}$ [∪] ٥ ، ∞ [

٤) وبوضع دً(س) = ٠ ، دً(س) = −٢ ≠ ٠ ،

∴ كل من دً(٠) ، دً(٥) غير موجودتان ، فإن النقطتين (٠ ، −٤) ، (٥ ، −٤) نقطتا انعطاف .

٥) عند س = ٠ ⟸ ص = −٤ ، ∴ بيان الدالة يقطع م ص في النقطة (٠ ، −٤)

وعند ص = ٠ ⟸ |− س² + ٥ س| − ٤ = ٠

أما − س² + ٥ س − ٤ = ٠ ⟸ إما س = ٤ أو س = ١

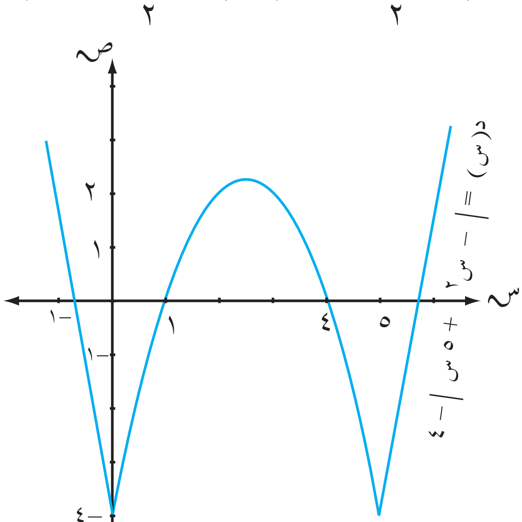
أو س² − ٥ س − ٤ = ٠ ⟸ إما س١ = $\frac{٥ + \sqrt{٤١}}{٢}$ ، أو س٢ = $\frac{٥ - \sqrt{٤١}}{٢}$

∴ النقاط المساعدة هي : (٠ ، −٤) ، (٤ ، ٠) ، (١ ، ٠) ، $\left(\frac{٥ + \sqrt{٤١}}{٢} ، ٠\right)$ ، $\left(\frac{٥ - \sqrt{٤١}}{٢} ، ٠\right)$.

٦) نلخص ما سبق في الجدول التالي :

جدول (٦ – ١١)

س	+∞		٥		$\frac{٥}{٢}$		٠		−∞
دَ(س)		+		−	٠	+		−	
دً(س)		+ ∪		− ∩ −				+ ∪	
د(س)	+∞	↗	−٤	↘	$\frac{٩}{٤}$	↗	−٤	↘	+∞



الشكل (٦ – ١٨)

٧) نرسم بيان الدالة كما في الشكل (٦ – ١٨) .

مثال (٦ – ٤٦)

ادرس تغيرات الدالة د(س) = $\frac{س^٢ + ٣}{س - ١}$ ، وارسم بيانها .

الحـــل :

١) م . ت = ح / {١} .

٢) الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة :

$$\because \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \text{د}(\text{س}) = \frac{١+٣}{١^{+}-١} = +\infty \text{ ،}$$

$$\lim_{\text{س} \to ١^{-}} \text{د}(\text{س}) = \frac{١+٣}{١^{-}-١} = -\infty \qquad \therefore \text{ س} = ١ \text{ مستقيم مقارب رأسي .}$$

$$\lim_{\text{س} \to \pm\infty} \text{د}(\text{س}) = \pm\infty$$ للدالة أربعة فروع لانهائية ولها مستقيم مقارب مائل معادلته :

$$\text{ص} = \text{أ س} + \text{ب}$$

لإيجاد معادلة المستقيم المقارب المائل نتبع التالي :

$$\text{أ} = \lim_{\text{س} \to \pm\infty} \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \to \pm\infty} \frac{\text{س}^{٢}+٣}{\text{س}^{٢}-\text{س}} = ١$$

$$\text{ب} = \lim_{\text{س} \to \pm\infty} [\,\text{د}(\text{س}) - \text{س}\,] = \lim_{\text{س} \to \pm\infty} \frac{\text{س}^{٢}+٣-\text{س}^{٢}+\text{س}}{\text{س}-١} = ١$$

$\therefore$ المستقيم المقارب المائل معادلته : $\text{ص} = \text{س} + ١$.

٣) نبحث عن القيم القصوى وفترات التزايد والتناقص :

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}-١)(٢\text{س}) - (\text{س}^{٢}+٣)(١)}{(\text{س}-١)^{٢}} = \frac{٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - \text{س}^{٢} - ٣}{(\text{س}-١)^{٢}}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}{(\text{س}-١)^{٢}} = \frac{(\text{س}-٣)(\text{س}+١)}{(\text{س}-١)^{٢}} \text{ .}$$

أولاً : بوضع $\text{د}'(\text{س}) = ٠ \Longleftarrow (\text{س}-٣)(\text{س}+١) = ٠ \Longleftarrow \text{س} = ٣$ ، أو $\text{س} = -١$

$\text{د}(٣) = ٦$ ، النقطة $(٣ ، ٦)$ قصوى

$\text{د}(-١) = -٢$ ، النقطة $(-١ ، -٢)$ قصوى

ثانياً : عند $\text{د}'(\text{س})$ غير معرّفة $\Longleftarrow (\text{س}-١)^{٢} = ٠ \Longleftarrow \text{س} = ١$ (لكن الدالة غير معرّفة عند $\text{س} = ١$)

٤) نبحث عن نقاط الانعطاف وفترات التقعر :

$$\text{د}''(\text{س}) = \frac{(\text{س}-١)^{٢}(٢\text{س}-٢) - (\text{س}-٣)(\text{س}+١) \times ٢(\text{س}-١)}{(\text{س}-١)^{٤}}$$

$$= \frac{٢(\text{س}-١)[(\text{س}-١)^{٢} - (\text{س}-٣)(\text{س}+١)]}{(\text{س}-١)^{٤}} = \frac{٢(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١ - \text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٣)}{(\text{س}-١)^{٣}} = \frac{٨}{(\text{س}-١)^{٣}}$$

بوضع $د''(س) = ٠$ $\Leftarrow$ $د''(س) = ٨ \neq ٠$ ∴ لايوجد نقاط انعطاف للدالة د .

٥) النقاط المساعدة :

عند $س = ٠$ $\Leftarrow$ $ص = \frac{٠ + ٣}{٠ - ١} = -٣$ ∴ المنحنى يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، – ٣)

وعند $ص = ٠$ $\Leftarrow$ $س^٢ + ٣ = ٠$ ، وحيث $س^٢ + ٣ > ٠$

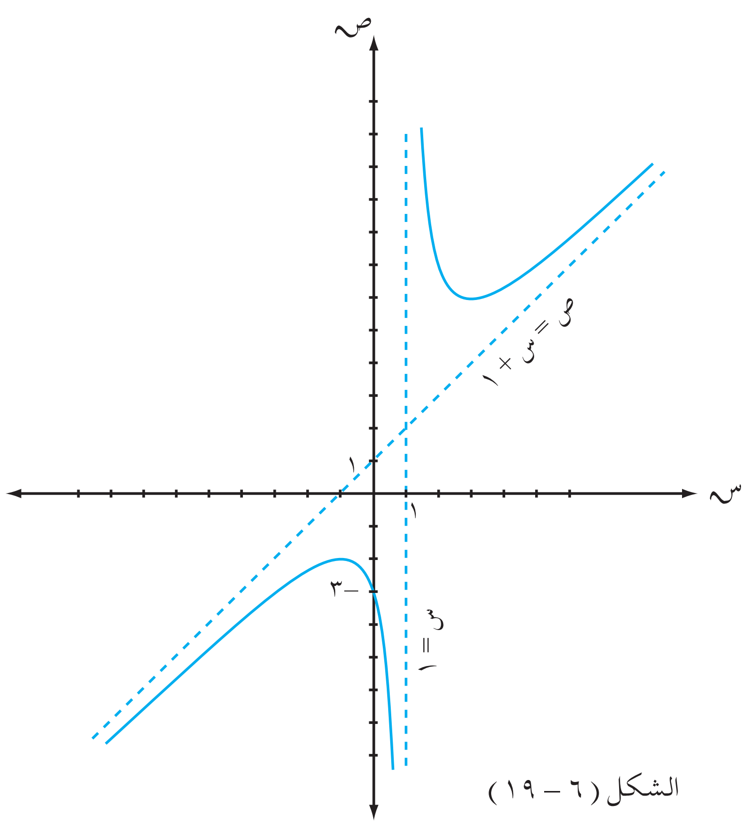
∴ المنحنى لايقطع محور السينات .

٦) نلخص ما سبق في الجدول التالي :

جدول (٦ – ١٢)

س	+∞		٣		١		–١		– ∞
د'(س)		+	٠	–		–	٠	+	
د''(س)			+				–		
د (س)	+∞	↗	٦ صغرى	↘	+∞ | – ∞	↘	–٢ عظمى	↗	– ∞

٧) نرسم بيان الدالة كما في الشكل (٦ – ١٩) .



الشكل (٦ – ١٩)

تمارين ومسائل (٦ – ٩)

ادرس تغيرات كل من الدوال التالية ، ثم ارسم بيانها :

[١] $د(س) = س^{٣} - ٣س + ٢$.

[٢] $د(س) = ٣س^{٤} - ٤س^{٣}$.

[٣] $د(س) = \frac{س^{٣}}{٦} + \frac{س^{٢}}{٢} + س - ٢$.

[٤] $د(س) = (س - ١)(س + ١)(س + ٢)$.

[٥] $د(س) = \left| س^{٢} - ٤س + ٣ \right|$.

[٦] $د(س) = \left| (س + ١)(س + ٥) \right|$.

[٧] $د(س) = \frac{س + ٤}{٢س - ٣}$.

[٨] $د(س) = \frac{٢س}{١ - س^{٢}}$.

[٩] $د(س) = \frac{س^{٢} + س}{س - ٢}$.

[١٠] $د(س) = \frac{س(س + ١)}{س}$.

[١١] $د(س) = \frac{س^{٢} + ٤س + ٣}{س + ٢}$.

[١٢] $د(س) = \frac{١}{س^{٢} - س + ١}$.

[١٣] $د(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$.

[١٤] $د(س) = \frac{٤}{١ + س^{٢}}$.

[١٥] $ص = \frac{١}{س + ٢}$.

[١٦] $ص = س + \frac{١}{س}$.

[١٧] $ص = س - ١ + \frac{١}{س - ١}$.

٧ – ١ التكامل المحـدَّد

الحساب التقريبي للمساحة :

لتكن الدالة ص = د (س) متصلة على [أ ، ب] وبفرض أن بيان الدالة يقع فوق محور السينات ؛ ولحساب المساحة المحصورة ببيان الدالة ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب نتبع الخطوات التالية :

(١) تقسيم الفترة [أ ، ب] إلى ن من الفترات الجزئية محصورة بالنقاط :

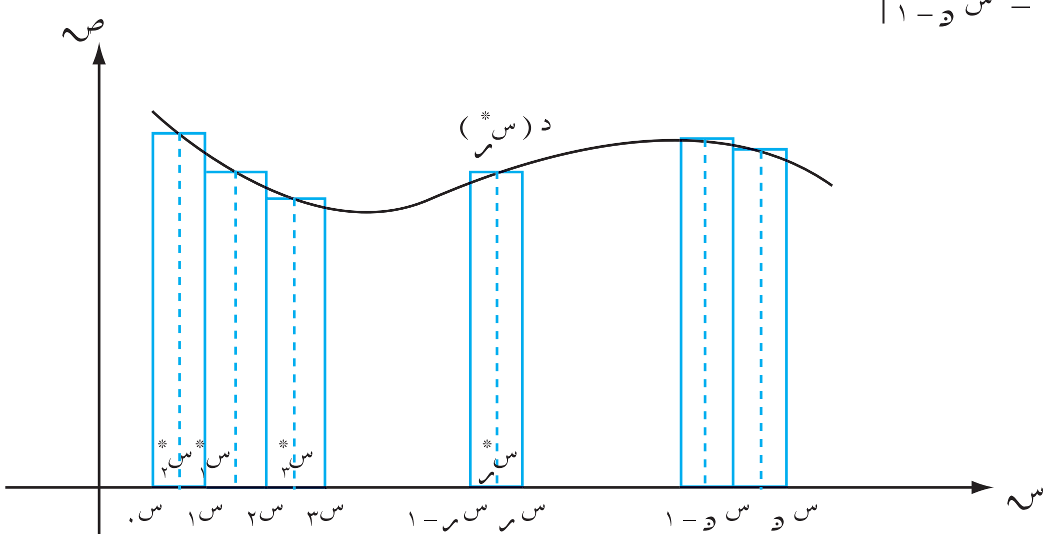
$س_٠ ، س_١ ، س_٢ ، \dots ، س_ن$ بحيث أ = $س_٠ < س_١ < س_٢ < \dots < س_ن$ = ب .

فنحصل على $[س_٠ ، س_١] ، [س_١ ، س_٢] ، \dots ، [س_{ر-١} ، س_ر] ، \dots ، [س_{ن-١} ، س_ن]$.

بحيــث يكــون طول كل فترة جزئيـة كما يلي :

$\Delta س_١ = |س_١ - س_٠| ، \Delta س_٢ = |س_٢ - س_١| ، \dots ، \Delta س_ر = |س_ر - س_{ر-١}| ، \dots ،$

$\Delta س_ن = |س_ن - س_{ن-١}|$



شكل (٧ – ١)

(٢) نختار أي نقطة مثل $س^*_ر \in [س_{ر-١} ، س_ر]$ ، ثم نوجد د ($س^*_ر$) .

ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن .

(٣) نوجد مساحة المستطيل الذي قاعدته $\Delta س_ر$ وارتفاعه د ($س^*_ر$) .

فتكون مساحته تساوي د ($س^*_ر$) • $\Delta س_ر$.

أي أن : $سط_ر$ = د ($س^*_ر$) $\Delta س_ر$ ، « $سط_ر$ المساحة التقريبية » .

إذن المساحة المحصورة ببيان الدالة ومحور السينات والمستقيمين $س = أ$ ، $س = ب$ تساوي تقريباً مجموع مساحات المستطيلات . أي أن :

$$\int_{أ}^{ب} \approx د(س_{١}^{*})\Delta س_{١} + د(س_{٢}^{*})\Delta س_{٢} + د(س_{٣}^{*})\Delta س_{٣} + \ldots + د(س_{ن}^{*})\Delta س_{ن} .$$

أي أن $\int_{أ}^{ب} \approx \sum_{ر=١}^{ن} د(س_{ر}^{*})\Delta س_{ر}$ (يسمى هذا المجموع مجموع ريمان) .

وفي حالة يكون التجزئ للفترات متساوي ؛ يكون $\Delta س_{ر} = \frac{ب - أ}{ن}$ ، $س_{ر}^{*} = أ + \frac{ب - أ}{ن} ر$

أي أن : $\int_{أ}^{ب} \approx \sum_{ر=١}^{ن} د(س_{ر}^{*})\Delta س_{ر}$

وعندما يزداد عدد الفترات إلى مالا نهاية فان طول كل فترة يقترب من الصفر .

أي أن : $\Delta س_{ر} \leftarrow ٠ \Leftrightarrow ن \leftarrow \infty$.

$$\int_{أ}^{ب} = \lim_{ن \leftarrow \infty} \sum_{ر=١}^{ن} د(س_{ر}^{*})\Delta س_{ر} . \qquad \text{.................}(٧ - ١)$$

تذكر أن :

$$\sum_{ر=١}^{ن} أ = أ ن$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} أ ر = أ \sum_{ر=١}^{ن} ر$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} (س_{ر} + ص_{ر}) = \sum_{ر=١}^{ن} س_{ر} + \sum_{ر=١}^{ن} ص_{ر}$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٣} = \frac{ن^{٢}(ن+١)^{٢}}{٤}$$

مثال (٧ - ١)

اوجد المساحة المحصورة ببيان الدالة $د(س) = س + ١$ ومحور السينات وفوق الفترة [٠ ، ٤] .

الحـــل :

نجزئ الفترة [٠ ، ٤] إلى ن فترة جزئية متساوية الطول بحيث يكون :

Δ س$_ر$ $=\frac{ب - أ}{ن} = \frac{٤}{ن}$.

نختار $س_ر^* = أ + \frac{ب - أ}{ن}$ ر $= \frac{٤}{ن}$ ر .

د ($س_ر^*$) = د ($\frac{٤}{ن}$ ر) = $\frac{٤}{ن}$ ر + ١ .

$\sum_{ر=١}^{ن}$ د ($س_ر^*$) Δ س$_ر$ = $\sum_{ر=١}^{ن}$ ($\frac{٤}{ن}$ ر + ١) × $\frac{٤}{ن}$.

= $\frac{٤}{ن}$ [$\frac{٤}{ن}$ $\sum_{ر=١}^{ن}$ ر + $\sum_{ر=١}^{ن}$ ١] .

= $\frac{٤}{ن}$ [$\frac{٤}{ن}$ × $\frac{ن (ن + ١)}{٢}$ + ن] = $\frac{٤}{ن}$ [٢ ن + ٢ + ن] .

= $\frac{٤}{ن}$ (٣ ن + ٢) = $\frac{١٢ ن + ٨}{ن}$.

واستناداً إلى الصيغة (٧ – ١) نجد أن :

سط^{٤} = نهـا$_{ن \leftarrow \infty}$ $\frac{١٢ ن + ٨}{ن}$ = ١٢ وحدة مربعة .

مثال (٧ – ٢)

احسب سط$_{١}^{٣}$ للدالة د (س) = س^٢ + س + ١ .

الحــــل :

نجزئ الفترة [١ ، ٣] إلى ن فترة جزئية متساوية الطول بحيث يكون :

Δ س$_ر$ = $\frac{ب - أ}{ن}$ = $\frac{٣ - ١}{ن}$ = $\frac{٢}{ن}$.

نختار $س_ر^*$ = أ + $\frac{ب - أ}{ن}$ ر

= ١ + $\frac{٢}{ن}$ ر .

$$\text{د}(\text{س}^*_{\text{ر}}) = \text{د}\left(١ + \frac{٢}{\text{ن}}\,\text{ر}\right) = \left(١ + \frac{٢}{\text{ن}}\,\text{ر}\right)^{٢} + \left(١ + \frac{٢}{\text{ن}}\,\text{ر}\right) + ١ .$$

$$= ١ + \frac{٤}{\text{ن}}\,\text{ر} + \frac{٤}{\text{ن}^{٢}}\,\text{ر}^{٢} + ٢ + \frac{٢}{\text{ن}}\,\text{ر} .$$

$$= \frac{٤}{\text{ن}^{٢}}\,\text{ر}^{٢} + \frac{٦}{\text{ن}}\,\text{ر} + ٣ .$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{د}(\text{س}^*_{\text{ر}})\,\Delta\,\text{س}_{\text{ر}} = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \left(\frac{٤}{\text{ن}^{٢}}\,\text{ر}^{٢} + \frac{٦}{\text{ن}}\,\text{ر} + ٣\right) \times \frac{٢}{\text{ن}} .$$

$$= \frac{٢}{\text{ن}}\left[\frac{\cancel{٤}^{\,٢}}{\text{ن}^{\cancel{٢}}} \times \frac{\cancel{\text{ن}}(٢\text{ن}+١)(\text{ن}+١)}{\cancel{٦}_{\,٣}} + \frac{\cancel{٦}^{\,٣}}{\text{ن}} \times \frac{\cancel{\text{ن}}(\text{ن}+١)}{\cancel{٢}_{\,١}} + ٣\,\text{ن}\right] .$$

$$= \frac{٢}{\text{ن}}\left[\frac{٢(٢\text{ن}^{٢}+٣\text{ن}+١)}{٣\,\text{ن}} + ٣\,\text{ن} + ٣ + ٣\,\text{ن}\right] .$$

$$= \frac{٢}{\text{ن}}\left[\frac{٤\text{ن}^{٢}+٦\text{ن}+٢}{٣\,\text{ن}} + ٦\,\text{ن} + ٣\right]$$

$$= \frac{٢}{\text{ن}}\left[\frac{٤\text{ن}^{٢}+٦\text{ن}+٢+١٨\text{ن}^{٢}+٩\text{ن}}{٣\,\text{ن}}\right] = \frac{٢}{\text{ن}}\left[\frac{٢٢\text{ن}^{٢}+١٥\text{ن}+٢}{٣\,\text{ن}}\right] .$$

$$= \frac{٤٤\text{ن}^{٢}+٣٠\text{ن}+٤}{٣\,\text{ن}^{٢}}$$

$\therefore$ $\text{سط}_{١}^{٣} = \lim\limits_{\text{ن}\to\infty} \dfrac{٤٤\text{ن}^{٢}+٣٠\text{ن}+٤}{٣\,\text{ن}^{٢}} = \dfrac{٤٤}{٣}$ وحدة مربعة . [استناداً إلى الصيغة (٧ – ١)].

تعريف (٧ – ١)

إذا كانت د دالة معرفة على الفترة [أ ، ب] ، وكانت النهاية التالية موجودة .

$$\lim_{\text{ن}\to\infty} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{د}(\text{س}^*_{\text{ر}})\,\Delta\,\text{س}_{\text{ر}} .$$

عندئذ تسمَّى هذه النهاية التكامل المحدَّد للدالة د على الفترة [أ ، ب] .

ويعبر عنها بالرمز $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\,\text{س}$. أي أن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\,\text{س} = \lim_{\text{ن}\to\infty} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{د}(\text{س}^*_{\text{ر}})\,\Delta\,\text{س}_{\text{ر}} \quad \text{.........} \quad (٧ - ٢أ)$$

ملاحظات : – الصورة $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\,\text{س}$ تقرأ تكامل د (س) بالنسبة لـ س، والرمز $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ علامة بالتكامل المحدد، ويسمّى العدد (أ) بالحد الأدني ، والعدد (ب) بالحد الأعلى لحدود التكامل .

– يمكن أن تأخذ الصيغة (٧ – ٢ أ) الشكل التالي :

$$\int_{أ}^{ب} د(س) \, ءس = \lim_{ن \to \infty} \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} د(س_ر^*) \quad ....(٧ - ٢ ب)$$

تعريف (٧ – ٢)

إذا كانت النهاية (٧ – ٢) بالنسبة للدالة د موجودة يقال عندئذ أن الدالة د قابلة للتكامل على الفترة [أ ، ب].

مبرهنة (٧ – ١)

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] ، فإن : د قابلة للتكامل على الفترة [أ ، ب] ؛ أي أن :

$\int_{أ}^{ب} د(س) \, ءس$ موجود .

فمثلاً التكاملات التالية موجودة لأن جميع الدوال متصلة على فترة التكامل :

أ) $\int_{-١}^{٣} \frac{٢}{٣} س \, ءس$.　　ب) $\int_{-٣}^{٠} \frac{ءع}{ع - ١}$.　　جـ) $\int_{-٥}^{٥} |ص| \, ءص$.

مثال (٧ – ٣)

باستخدام تعريف التكامل المحدد ، احسب $\int_{أ}^{ب} س^٢ \, ءس$.

الحـــل :

نقسم الفترة [أ ، ب] إلى ن فترة جزئية متساوية الطول بحيث يكون :

$$\Delta س_ر = \frac{ب - أ}{ن} .$$

نختار $س_ر^*$ في أي موضع من الفترة [$س_{ر-١}$ ، $س_ر$] .

لتكن $س_ر^* = أ + \frac{ب - أ}{ن} ر$.

$$د(س_ر^*) = د(أ + \frac{ب - أ}{ن} ر) = (أ + \frac{ب - أ}{ن} ر)^٢ .$$

$$= أ^٢ + ٢أ(\frac{ب - أ}{ن}) ر + (\frac{ب - أ}{ن})^٢ ر^٢ .$$

$$\because \int_{أ}^{ب} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} = \lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{د}(\text{س}^{*}_{\text{ر}}) \, .$$

$$\therefore \int_{أ}^{ب} \text{س}^2\, \text{ء}\text{س} = \lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \left[\text{أ}^2 + \frac{2\text{أ}(\text{ب}-\text{أ})}{\text{ن}}\,\text{ر} + \frac{(\text{ب}-\text{أ})^2}{\text{ن}^2}\,\text{ر}^2\right] .$$

$$= \lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} \left[\text{ن}\,\text{أ}^2 + \frac{2\text{أ}(\text{ب}-\text{أ})}{\text{ن}} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2} + \frac{(\text{ب}-\text{أ})^2}{\text{ن}^2} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} \left[\text{ن}\,\text{أ}^2 + \text{أ}(\text{ب}-\text{أ})(\text{ن}+1) + \frac{(\text{ب}-\text{أ})^2(2\text{ن}^2+3\text{ن}+1)}{6\,\text{ن}}\right] .$$

$$\therefore \int_{أ}^{ب} \text{س}^2\, \text{ء}\text{س} = (\text{ب}-\text{أ})\left[\text{أ}^2 + \text{أ}(\text{ب}-\text{أ}) + \frac{(\text{ب}-\text{أ})^2}{\cancel{6}\;3} \times \cancel{2}\;1\right] .$$

$$= \frac{\text{ب}-\text{أ}}{3}\left[3\text{أ}^2 + 3\text{أ}\text{ب} - 3\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - 2\text{أ}\text{ب} + \text{أ}^2\right] .$$

$$= \frac{\text{ب}-\text{أ}}{3}\left[\text{أ}\text{ب} + \text{ب}^2 + \text{أ}^2\right] .$$

$$= \frac{\text{ب}-\text{أ}}{3}\left(\text{ب}^2 + \text{أ}\text{ب} + \text{أ}^2\right) .$$

$$= \frac{\text{ب}^3 - \text{أ}^3}{3} \, .$$

مبرهنة (٧ − ٢) :

إذا كان جـ عدداً ثابتاً فإن : $\int_{أ}^{ب} \text{جـ}\, \text{ء}\text{س} = \text{جـ}\,(\text{ب} - \text{أ})$.

البرهــــان :

نقسم الفترة [أ ، ب] إلى ن فترة جزئية متساوية الطول بحيث يكون: $\Delta \text{س}_{\text{ر}} = \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}}$.

نختار $\text{س}^{*}_{\text{ر}} = \text{أ} + \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}}\,\text{ر}$.

$\because \text{د}(\text{س}) = \text{جـ}$

$\therefore \text{د}(\text{س}^{*}_{\text{ر}}) = \text{د}\left(\text{أ} + \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}}\,\text{ر}\right) = \text{جـ}$.

$\because \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} = \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{د}(\text{س}_{\text{ر}}^{*})$.

$\therefore \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ}\, \text{ء}\text{س} = \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{جـ} = \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \times \text{ن}\,\text{جـ}$.

$= \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} (\text{ب} - \text{أ})\,\text{جـ} = \text{جـ}(\text{ب} - \text{أ})$.

مثال (٧ – ٤)

احسب التكاملات الآتية :

أ) $\int_{3}^{5} 7\, \text{ء}\text{س}$.　　ب) $\int_{-5}^{2} 3\, \text{ء}\text{س}$.　　جـ) $\int_{0}^{4} \text{أ}\, \text{ء}\text{س}$.

الحـــل :

أ) $\int_{3}^{5} 7\, \text{ء}\text{س} = 7(5 - 3) = 7 \times 2 = 14$.

ب) $\int_{-5}^{2} 3\, \text{ء}\text{س} = 3\left(2 - (-5)\right) = 3(2 + 5) = 21$.

جـ) $\int_{0}^{4} \text{أ}\, \text{ء}\text{س} = \text{أ}(4 - 0) = 4\text{أ}$.

تعريف (٧ – ٣)

١ – إذا كانت د (أ) موجودة ، فإن : $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} = 0$.

٢ – إذا كانت د دالة قابلة للتكامل على [أ ، ب] فإن : $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} = -\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$.

مبرهنة (٧ – ٣) :

اذا كانت د_1 ، د_2 دالتين قابلتين للتكامل على [أ ، ب] ، ك عدداً ثابتاً ؛ فإن:

١ – $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك}\, \text{د}_1(\text{س})\, \text{ء}\text{س} = \text{ك} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}_1(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$.

٢ – $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د}_1(\text{س}) \pm \text{د}_2(\text{س})]\, \text{ء}\text{س} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}_1(\text{س})\, \text{ء}\text{س} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}_2(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$.

ملاحظــة :

الجزء الثاني من المبرهنة يمكن تعميمه لأكثر من دالتين . أي أن :

$$\int_{أ}^{ب} [\,د_{١}(س) \pm د_{٢}(س) \pm \cdots \pm د_{ن}(س)\,]\, ءس$$

$$= \int_{أ}^{ب} د_{١}(س)\, ءس \pm \int_{أ}^{ب} د_{٢}(س)\, ءس \pm \cdots \pm \int_{أ}^{ب} د_{ن}(س)\, ءس \;.$$

مبرهنة (٧ – ٤) :

إذا كانت د قابلة للتكامل على [أ ، ب] ؛ وكان أ > جـ > ب ؛فإن: د قابلة للتكامل على [أ ، جـ] وعلى [جـ ، ب] . أي أن : $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = \int_{أ}^{جـ} د(س)\, ءس + \int_{جـ}^{ب} د(س)\, ءس$.

مثال (٧ – ٥)

بفرض أن : $\int_{١}^{٥} د(س)\, ءس = ٢$ ؛ $\int_{٣}^{٥} د(س)\, ءس = ٧$ ، $\int_{٣}^{٥} هـ(س)\, ءس = ٨$.

أوجد مايلي :

أ) $\int_{٣}^{٥} [\,٣\,د(س) - هـ(س)\,]\, ءس$. ب) $\int_{١}^{٣} د(س)\, ءس$.

الحـــل :

أ) استناداً إلى المبرهنة (٧ – ٣) نجد أن :

$$\int_{٣}^{٥} [\,٣\,د(س) - هـ(س)\,]\, ءس = ٣\int_{٣}^{٥} د(س)\, ءس - \int_{٣}^{٥} هـ(س)\, ءس$$

$$= ٣ \times ٧ - ٨ = ١٣ \,.$$

ب) استناداً إلى المبرهنة (٧ – ٤) نجد أن :

$$\int_{١}^{٥} د(س)\, ءس = \int_{١}^{٣} د(س)\, ءس + \int_{٣}^{٥} د(س)\, ءس$$

$$\therefore \int_{١}^{٣} د(س)\, ءس = \int_{١}^{٥} د(س)\, ءس - \int_{٣}^{٥} د(س)\, ءس = ٢ - ٧ = -٥ \,.$$

مبرهنة (٧ – ٥) :

١ – إذا كانت د قابلة للتكامل على [ا ، ب] ، وكانت د(س) $\geq$ ٠ $\forall$ س $\in$ [ا ، ب] فإن:

$\int_{ا}^{ب}$ د(س) ءس $\geq$ ٠ .

٢ – إذا كانت د$_١$ ، د$_٢$ قابلتين للتكامل على [ا ، ب] ، د$_١$(س) $\leq$ د$_٢$(س) $\forall$ س $\in$ [ا ، ب]

فإن $\int_{ا}^{ب}$ د$_١$(س) ءس $\leq$ $\int_{ا}^{ب}$ د$_٢$(س) ءس .

مثال (٧ – ٦)

أثبت مايلي :

أ) $\int_{١}^{٣}$ (س^٢ – ١) ءس $\geq$ ٠ .

ب) $\int_{٠}^{١} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{٢} س}{س^٣ - ٣}$ ءس $\leq$ ٠ .

جـ) $\int_{١}^{٤}$ س^٢ ءس $\leq$ $\int_{١}^{٤}$ س^٣ ءس .

الحـــل :

أ) ١ $\leq$ س $\leq$ ٣ $\Leftarrow$ ١ $\leq$ س^٢ $\leq$ ٩ $\Leftarrow$ ٠ $\leq$ س^٢ – ١ $\leq$ ٨ $\Leftarrow$ (س^٢ – ١) $\geq$ ٠ .

$\therefore$ $\int_{١}^{٣}$ (س^٢ – ١) ءس $\geq$ ٠ .

ب) ٠ $\leq$ س $\leq$ ١ $\Leftarrow$ ٠ $\leq$ س^٣ $\leq$ ١ $\Leftarrow$ –٣ $\leq$ س^٣ – ٣ $\leq$ –٢ .

$\therefore$ $\frac{١}{س^٣ - ٣}$ < ٠ .

وبالمثل : ٠ $\leq$ س $\leq$ ١ $\Leftarrow$ جتا $\frac{\pi}{٢}$ س $\geq$ ٠ .

$\therefore$ $\frac{\text{جتا} \frac{\pi}{٢} س}{س^٣ - ٣}$ $\leq$ ٠ $\Leftarrow$ $\int_{٠}^{١} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{٢} س}{س^٣ - ٣}$ ءس $\leq$ ٠ .

جـ) نضع س^٢ – س^٣ = س^٢ (١ – س) .

$\because$ ١ $\leq$ س $\leq$ ٤ $\Leftarrow$ س^٢ > ٠ .

كما أن : –١ $\geq$ –س $\geq$ –٤ $\Leftarrow$ ٠ $\geq$ ١ – س $\geq$ –٣ $\Leftarrow$ (١ – س) $\leq$ ٠ .

$\therefore$ س^٢ (١ – س) $\leq$ ٠ $\Leftarrow$ س^٢ – س^٣ $\leq$ ٠ $\Leftarrow$ س^٢ $\leq$ س^٣ .

$\therefore$ $\int_{١}^{٤}$ س^٢ ءس $\leq$ $\int_{١}^{٤}$ س^٣ ءس .

مبرهنة (٧ – ٦) : « مبرهنة الحدين الأعلى والأدنى » :

إذا كان ك ، ل عددين حقيقين ، وكان $ك \leq د(س) \leq ل \quad \forall\ س \in [أ ، ب]$ وكانت د قابلة للتكامل على الفترة [أ ، ب] ، فإن : $ك(ب - أ) \leq \int_{أ}^{ب} د(س)\ ء س \leq ل(ب - أ)$.

البرهان : بفرض أن : $د_١(س) = ك$ ، $د_٢(س) = ل$.

$\because ك \leq د(س) \leq ل \quad \Leftarrow \quad د_١(س) \leq د(س) \leq د_٢(س)$.

$\therefore \int_{أ}^{ب} د_١(س)\ ء س \leq \int_{أ}^{ب} د(س)\ ء س \leq \int_{أ}^{ب} د_٢(س)\ ء س$.

$\because د_١(س) = ك$.

$\therefore \int_{أ}^{ب} د_١(س)\ ء س = \int_{أ}^{ب} ك\ ء س$ « استناداً إلى مبرهنة (٧ – ٢) » .

$\therefore \int_{أ}^{ب} د_١(س)\ ء س = ك\ (ب - أ)$

وبالمثل : $\int_{أ}^{ب} د_٢(س)\ ء س = ل\ (ب - أ)$.

$\therefore ك(ب - أ) \leq \int_{أ}^{ب} د(س)\ ء س \leq ل(ب - أ)$.

ملاحظة : يُسمّى ك (ب – أ) بالحد الأدنى للتكامل ، ل (ب – أ) بالحد الأعلى للتكامل .

مثال (٧ – ٧)

أوجد الحدين الأدنى والأعلى للتكاملات التالية :

أ) $\int_{١}^{٣} \frac{٢}{س + ١}\ ء س$.

ب) $\int_{١}^{٣} \sqrt{٢س^٢ + ٧}\ ء س$.

جـ) $\int_{-٢}^{١} \frac{ء س}{س^٢ + ١}$.

د) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (جتا س - جا س)\ ء س$.

الحـــل :

أ) $\because ١ \leq س \leq ٣ \quad \Leftarrow \quad ٢ \leq س + ١ \leq ٤ \quad \Leftarrow \quad \frac{١}{٢} \geq \frac{١}{س + ١} \geq \frac{١}{٤}$.

$\frac{١}{٢} \leq \frac{٢}{س + ١} \leq ١$ [إستناداً إلى المبرهنة (٧ – ٦)] .

$\therefore \frac{١}{٢}(٣ - ١) \leq \int_{١}^{٣} \frac{٢}{س + ١}\ ء س \leq ١(٣ - ١)$.

$١ \le \int_{١}^{٣} \frac{٢}{\text{س} + ١} \, \text{ء س} \le ٢$.

∴ الحد الأدنى $= ١$ ، والحد الأعلى $= ٢$.

ب) ∵ $١ \le \text{س} \le ٣ \Leftarrow ١ \le \text{س}^٢ \le ٩ \Leftarrow ٩ \le ٢\text{س}^٢ + ٧ \le ٢٥$.

$٣ \le \sqrt{٢\text{س}^٢ + ٧} \le ٥$ [استناداً إلى المبرهنة (٧ – ٦)] .

∴ $٣(٣ - ١) \le \int_{١}^{٣} \sqrt{٢\text{س}^٢ + ٧} \, \text{ء س} \le ٥(٣ - ١)$.

$٦ \le \int_{١}^{٣} \sqrt{٢\text{س}^٢ + ٧} \, \text{ء س} \le ١٠$.

∴ الحد الأدنى $= ٦$ ؛ والحد الأعلى $= ١٠$.

جـ) ∵ $-٢ \le \text{س} \le ١ \Leftarrow ٠ \le \text{س}^٢ \le ٤ \Leftarrow ١ \le \text{س}^٢ + ١ \le ٥$.

$\frac{١}{٥} \le \frac{١}{\text{س}^٢ + ١} \le ١$.

∴ $\frac{١}{٥}(١ - (-٢)) \le \int_{-٢}^{١} \frac{\text{ء س}}{\text{س}^٢ + ١} \le (١ - (-٢))$.

$\frac{٣}{٥} \le \int_{-٢}^{١} \frac{\text{ء س}}{\text{س}^٢ + ١} \le ٣$.

∴ الحد الأدنى $= \frac{٣}{٥}$ ، والحد الأعلى $= ٣$.

د) $\text{جتا س} - \text{جا س} = \text{جتا س} - \text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right) = -٢ \,\text{جا}\, \frac{\pi}{٤} \,\text{جا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)$.

$= -٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \,\text{جا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right) = -\sqrt{٢} \,\text{جا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)$.

∵ $٠ \le \text{س} \le \frac{\pi}{٢} \Leftarrow -\frac{\pi}{٤} \le \text{س} - \frac{\pi}{٤} \le \frac{\pi}{٤}$.

$\frac{-١}{\sqrt{٢}} \le \text{جا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right) \le \frac{١}{\sqrt{٢}} \Leftarrow ١ \ge -\sqrt{٢} \,\text{جا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right) \ge -١$.

$-\frac{\pi}{٢} \le \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{جتا س} - \text{جا س}) \, \text{ء س} \le \frac{\pi}{٢}$.

∴ الحد الأدنى $= -\frac{\pi}{٢}$ ؛ و الحد الأعلى $= \frac{\pi}{٢}$.

تمارين (٧-١)

[١] باستخدام تعريف التكامل المحدّد احسب مايلي :

أ) $\int_{٠}^{٣} ٢س \ ءس$.　　　ب) $\int_{١}^{٥} (٢س + ٣) \ ءس$.

جـ) $\int_{أ}^{ب} س \ ءس$.　　　د) $\int_{-١}^{٠} أ ص^{٢} \ ءص$.

هـ) $\int_{-٢}^{٣} |س - ٢| \ ءس$.

[٢] أثبت مايلي :

أ) $\int_{١}^{٢} (٢س - ٤) \ ءس \leq ٠$.　　　ب) $\int_{١}^{٣} (س^{٢} - ١) \ ءس \geq ٠$.

[٣] أيهما أكبر :

أ) $\int_{٠}^{١} \sqrt{س} \ ءس$ أم $\int_{٠}^{١} س^{٢} \ ءس$.

ب) $\int_{-١}^{٠} \sqrt[٣]{س} \ ءس$ أم $\int_{-١}^{٠} \sqrt[٥]{س} \ ءس$.

[٤] برهن مايلي :

أ) $\int_{١}^{٢} س^{٣} \ ءس \geq \int_{١}^{٢} س^{٢} \ ءس$.　　　ب) $\int_{٠}^{١} \sqrt{س} \ ءس \leq \int_{٠}^{١} \sqrt[٣]{س} \ ءس$.

جـ) $\int_{١}^{٢} ٢س \ ءس \geq \int_{١}^{٢} س^{٢} \ ءس$.　　　د) $\int_{١}^{٤} (٢س - ١) \ ءس \leq \int_{١}^{٤} س^{٢} \ ءس$.

هـ) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} جا س \ ءس \geq \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} جتا س \ ءس$.

و) $\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{٠} جا س \ ءس \leq \int_{-\frac{\pi}{٤}}^{٠} جتا س \ ءس$.

[٥] أوجد الحدين الأدنى والأعلى للتكاملات التالية :

أ) $\int_{١}^{٢} (س^{٢} + ١) \ ءس$.　　　ب) $\int_{-٢}^{١} س^{٢} \ ءس$.

جـ) $\int_{-٢}^{٣} (س^{٢} + ٢س)\ ءس$.　　　　د) $\int_{-٢}^{-١} \frac{ءس}{٢س^{٢} - ١}$.

هـ) $\int_{٢}^{٣} |س - ١|\ ءس$.　　　　و) $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}} جا\ ٢س\ ءس$.

ز) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{١ + جا\ س}\ ءس$.　　　　ح) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (جا\ س - جتا\ س)\ ءس$.

ط) $\int_{١}^{٥} لو\ س\ ءس$.　　　　ي) $\int_{٠}^{٣} هـ^{س}\ ءس$.

٧ – ٢ التكامل غير المحدَّد

تعلم أن هناك عمليات متعاكسة مثل : الطرح والجمع ، والقسمة والضرب والرفع للقوى وأخذ الجذور ، وبالمثل فإن هناك عملية عكسية للمشتقة هي الدالة الأصلية .

وعلى هذا الأساس فإننا في عملية التكامل نبحث عن الدالة الأصلية التي مشتقتها الأولى هي المعطاة ،

فمثــــلاً :

إذا كانت $ل(س) = س^{٣} + \frac{٢}{٥}$ ، $د(س) = ٣س^{٢}$ ، فإن : $ل'(س) = ٣س^{٢} = د(س)$.

وفي هذه الحالة نقول أن ل دالة أصلية للدالة د .

تعريف (٧ – ٤)

لتكن د دالة معرّفة على [ا ، ب] ، فإذا وجدت دالة ل متصلة على [ا ، ب] ، وقابلة للاشتقاق على] ا ، ب [بحيث $ل'(س) = د(س)$ $\forall$ س $\in$] ا ، ب [، فإن : ل دالة أصلية « أو تكامل غير محدّد » للدالة د على [ا ، ب] ونرمز له بالرمز $ل(س) = \int د(س)\ ءس$.

ستجد أن كلاً من الدوال الآتية :

$ل_1(س) = س^2$ ، $ل_2(س) = س^2 - 5$ ، $ل_3(س) = س^2 + 7$ ، .... وغيرها ممكن أن تكون دالة أصلية للدالة د لأن :

$ل'_1(س) = ل'_2(س) = ل'_3(س) = د(س)$.

وفي الحقيقة لأي عدد ث $\in$ ح نجد أن : $ل(س) = س^2 + ث$ هي دالة أصلية للدالة د . أي أن:

$\int 2س\, ءس = س^2 + ث$ ؛ يسمّى ث ثابت التكامل .

مبرهنة (٧ – ٧) :

إذا كان $ل_1$ ، $ل_2$ دالتين قابلتين للاشتقاق على]أ ، ب[، وإذا كان لهما المشتقة نفسها فهما لا يختلفان إلاّ في قيمة ثابتة (ث) . أي أن : $ل'_1(س) = ل'_2(س) \Leftarrow ل_1(س) - ل_2(س) = ث$.

البرهـان :

$\because ل'_1(س) = ل'_2(س) \Leftarrow ل'_1(س) - ل'_2(س) = 0$.

أي أن: $(ل_1 - ل_2)'(س) = 0$ $\forall$ س $\in$]أ ، ب[

$\because$ مشتقة الثابت تساوي صفراً .

$\therefore (ل_1 - ل_2)(س) = ث$.

أي أن : $ل_1(س) - ل_2(س) = ث$.

والآن نقدّم القاعدة التالية :

$\int س^ن\, ءس = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ث$ حيث ن $\in$ ح ، ن $\neq -1$ . ... (٧ – ٣)

وعندما ن $= -1$ نجد أن : $\int \frac{ءس}{س} = لو|س| + ث$.

فمثلاً : $\int س^7\, ءس = \frac{س^8}{8} + ث$ ؛

وللتأكّد من صحة التكامل نشتق الطرف الأيسر . أي أن: $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{س^8}{8} + ث\right) = س^7$.

مبرهنة (٧ – ٨) :

١) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\int \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}\right) = \text{د}(\text{س})$.

٢) $\int \text{دَ}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{د}(\text{س}) + \text{ث}$.

٣) $\int \text{أ}\,\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{أ}\int \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$.

٤) $\int \left[\text{د}_{١}(\text{س}) \pm \text{د}_{٢}(\text{س})\right]\text{ءس} = \int \text{د}_{١}(\text{س})\,\text{ءس} \pm \int \text{د}_{٢}(\text{س})\,\text{ءس}$.

مثال (٧ – ٨)

احسب كلاً من التكاملات التالية :

أ) $\int (٦\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٥)\,\text{ءس}$.

ب) $\int \left(\text{س}^{٣} - \frac{٥}{\text{س}^{٢}} + \sqrt[٣]{\text{س}}\right)\text{ءس}$.

جـ) $\int \left(\sqrt{\text{ص}} - \frac{٣}{\text{ص}}\right)^{٢}\text{ءص}$.

الحـــل :

أ) $\int (٦\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٥)\,\text{ءس} = ٦\int \text{س}^{٢}\,\text{ءس} - ٣\int \text{س}\,\text{ءس} + ٥\int \text{ءس}$.

$$= ٦\,\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٣\,\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٥\text{س} + \text{ث} = ٢\text{س}^{٣} - \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + \text{ث} .$$

ب) $\int \left(\text{س}^{٣} - \frac{٥}{\text{س}^{٢}} + \sqrt[٣]{\text{س}}\right)\text{ءس} = \int \left(\text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{-٢} + \text{س}^{\frac{١}{٣}}\right)\text{ءس}$

$$= \frac{\text{س}^{٤}}{٤} - ٥\,\frac{\text{س}^{-١}}{-١} + \frac{\text{س}^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٤}\text{س}^{٤} + \frac{٥}{\text{س}} + \frac{٣}{٤}\text{س}^{\frac{٤}{٣}} + \text{ث}$$

جـ) $\int \left(\sqrt{\text{ص}} - \frac{٣}{\text{ص}}\right)^{٢}\text{ءص} = \int \left(\text{ص} - \frac{٦}{\sqrt{\text{ص}}} + \frac{٩}{\text{ص}^{٢}}\right)\text{ءص}$

$$= \int \left(\text{ص} - ٦\text{ص}^{-\frac{١}{٢}} + ٩\text{ص}^{-٢}\right)\text{ءص} = \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} - ٦\,\frac{\text{ص}^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ٩\,\frac{\text{ص}^{-١}}{-١} + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٢}\text{ص}^{٢} - ١٢\sqrt{\text{ص}} - \frac{٩}{\text{ص}} + \text{ث} .$$

تطبيقات التكامل غير المحدد :

تعلم من التفاضل أن $\text{د}'(\text{س})$ هو ميل المماس لمنحنى دالة عند النقطة (س ، ص) وباستخدام التكامل يمكن إيجاد معادلة منحنى دالة إذا عُلم ميل المماس (دالة ميل المماس) للمنحنى عند نقطة واقعة عليه .

مثال (٧ – ٩)

أوجد الدالة الأصلية للدالة $\text{د}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + \frac{٣}{\text{س}^{٢}} + ٥$ ، إذا كان المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٧) .

الحـــل :

$$\text{ل}(\text{س}) = \int \left(٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + \frac{٣}{\text{س}^{٢}} + ٥\right) \text{ءس} = \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - \frac{٣}{\text{س}} + ٥\text{س} + \text{ث} \,.$$

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٧) إذن فهي تحقق معادلته أي أن :

$$\text{ل}(٣) = \frac{٢}{٣}(٣)^{٣} - (٣)^{٢} - ١ + ٥(٣) + \text{ث} = ٧ \,.$$

$$\Leftarrow \quad \text{ث} = ٧ - ١٨ + ٩ - ١٤ = -١٦ \,.$$

$$\therefore \text{ل}(\text{س}) = \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - \frac{٣}{\text{س}} + ٥\text{س} - ١٦ \,.$$

مثال (٧ – ١٠)

أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (٢ ، ٣) ، وميل المماس له عند أي نقطة عليه معطى بالعلاقة :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س}+٣}{٢\text{ص}-١} \,.$$

الحـــل : $\because (٢\text{ص} - ١)\,\text{ءص} = (٢\text{س} + ٣)\,\text{ءس}$.

$$\therefore \int (٢\text{ص} - ١)\,\text{ءص} = \int (٢\text{س} + ٣)\,\text{ءس} \quad \Leftarrow \quad \text{ص}^{٢} - \text{ص} = \text{س}^{٢} + ٣\text{س} + \text{ث} \,.$$

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٣) $\quad \therefore ٩ - ٣ = ٤ + ٦ + \text{ث} \quad \Leftarrow \quad \text{ث} = -٤$.

إذن معادلة المنحنى : $\text{ص}^{٢} - \text{ص} = \text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤$.

العلاقة بين التكامل غير المحدَّد والتكامل المحدَّد

مبرهنة (٧ – ٩) : المبرهنة الأساسية للتكامل .

إذا كانت د دالة متصلة على [ا ، ب] ، وكانت ل دالة أصلية للدالة د على [ا ، ب] ،

فإن : $\int_{ا}^{ب}$ د (س) ى س = ل (س) $]_{ا}^{ب}$ = ل (ب) – ل (أ) . ... (٧ – ٤)

مثال (٧ – ١١)

احسب كلاًّ من التكاملات الآتية :

أ) $\int_{١}^{٣}$ (٣ س^{٢} – ٤ س) ى س . ب) $\int_{١}^{٤}$ $\sqrt{ز}$ ى ز . جـ) $\int_{-٢}^{٤}$ | س – ٢ | ى س .

الحـــــل :

استناداً إلى الصيغة (٧ – ٤) :

أ) $\int_{١}^{٣}$ (٣س^{٢} – ٤ س) ى س = (س^{٣} – ٢ س^{٢}) $|_{١}^{٣}$.

= [(٣)^{٣} – ٢ (٣)^{٢}] – (١ – ٢)

= ٢٧ – ١٨ + ١ = ١٠

ب) $\int_{١}^{٤}$ $\sqrt{ز}$ ى ز = $\int_{١}^{٤}$ ز$^{\frac{١}{٢}}$ ى ز = $\dfrac{ز^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}\Big|_{١}^{٤}$

= $\frac{٢}{٣}$ ز$^{\frac{٣}{٢}}$ $|_{١}^{٤}$ = $\frac{٢}{٣}$ [(٤)$^{\frac{٣}{٢}}$ – ١]

= $\frac{٢}{٣}$ (٨ – ١) = $\frac{١٤}{٣}$

جـ) ∵ | س – ٢ | = $\begin{cases} \text{س – ٢} & \text{عندما س} \geq ٢ \\ \text{–(س – ٢)} & \text{عندما س} \leq ٢ \end{cases}$

∴ $\int_{-٢}^{٤}$ | س – ٢ | ى س = – $\int_{-٢}^{٢}$ (س – ٢) ى س + $\int_{٢}^{٤}$ (س – ٢) ى س .

= – ($\frac{١}{٢}$ س^{٢} – ٢ س) $]_{-٢}^{٢}$ + ($\frac{١}{٢}$ س^{٢} – ٢ س) $|_{٢}^{٤}$.

$= -[(٢-٤)-(٢+٤)]+[(٨-٨)-(٢-٤)]$.

$= -(-٢-٦)+٢ = ١٠$.

مثال (٧ - ١٢)

أوجد قيمة ك الموجبة ، إذا كان : $\int_{١}^{ك} (٢س - ٣) ء س = ٦$.

الحـــل :

$\because \int_{١}^{ك} (٢س - ٣) ء س = (س^٢ - ٣س) \Big|_{١}^{ك}$.

$\therefore (ك^٢ - ٣ك) - (١ - ٣) = ٦$.

أي أن : $ك^٢ - ٣ك + ٢ = ٦$.

$ك^٢ - ٣ك - ٤ = ٠$

$\Leftarrow (ك - ٤)(ك + ١) = ٠$.

أما $ك = ٤$ ، أو $ك = -١$ (مرفوض)

فتكون قيمة $ك = ٤$.

مبرهنة (٧ - ١٠) : مبرهنة القيمة المتوسطة في حساب التكامل :

إذا كانت الدالة د متصلة على [ا ، ب] فانه يوجد على الأقل عدد جـ $\in$ [ا ، ب] بحيث ا $\le$ جـ $\le$ ب

يحقق العلاقة : $\int_{ا}^{ب} د(س) ء س = د(جـ)(ب - ا)$.

البرهـــان :

$\because$ د متصلة على [ا ، ب] من خواصها يوجد عددان $س_١$ ، $س_٢ \in$ [ا ، ب] بحيث يكون $د(س_١) \le د(س) \le د(س_٢)$.

استناداً إلى المبرهنة (٧ - ٦) نجد أن :

$د(س_١)(ب - ا) \le \int_{ا}^{ب} د(س) ء س \le د(س_٢)(ب - ا)$.

من هذه المتراجحة نستنتج أنه يوجد عدد ك حيث $د(س_١) \le ك \le د(س_٢)$

يحقق $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = ك(ب - أ)$.

$\because$ $د(س_١) \le د(س) \le د(س_٢)$ ، $د(س_١) \le ك \le د(س_٢)$.

$\therefore$ يوجد على الأقل عدد جـ $\in$ [أ ، ب] بحيث د(جـ) = ك .

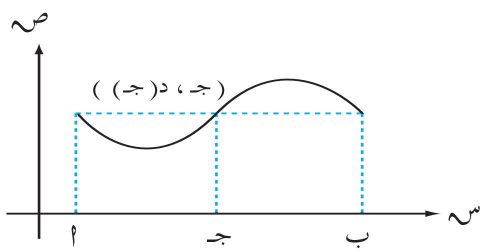
إذن $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = د(جـ)(ب - أ)$ وهو المطلوب .

التفسير الهندسي لمبرهنة القيمة المتوسطة :

إذا كانت الدالة د متصلة على [أ ، ب] ، ويقع بيانها فوق محور السينات كما في الشكل(٧ – ٢)،

فإن : $سط_{أ}^{ب}$ تكافئ مساحة المستطيل الذي بعداه

(ب – أ) ، د (جـ) حيث جـ $\in$ [أ ، ب] .



شكل (٧ – ٢)

مثال (٧ – ١٣)

أوجد قيمة جـ التي تحقّق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل إذا كانت :

$د(س) = \sqrt{س}$ ، س $\in$ [٠ ، ٩].

الحـــل :

$\int_{٠}^{٩} \sqrt{س}\, ءس = د(جـ)(٩ - ٠)$.

$\int_{٠}^{٩} س^{\frac{١}{٢}}\, ءس = \sqrt{جـ} \times ٩$.

$\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{٠}^{٩} = ٩\sqrt{جـ} \Leftarrow \frac{٢}{٣}(٩^{\frac{٣}{٢}} - ٠) = ٩\sqrt{جـ}$.

$\frac{٢}{٣} \times ٢٧ = ٩\sqrt{جـ} \Leftarrow ٩\sqrt{جـ} = ١٨$.

$\therefore \sqrt{جـ} = ٢ \Leftarrow جـ = ٤$.

مثال (٧ - ١٤)

أوجد قيم جـ التي تحقّق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل الآتي :

$\int_{-٢}^{٣}$ (٣ س^٢ + ٢ س) ء س .

الحـــل :

$\int_{-٢}^{٣}$ (٣س^٢ + ٢س) ء س = (٣ جـ^٢ + ٢جـ) (٣ − (−٢)) .

(س^٣ + س^٢) $\Big|_{-٢}^{٣}$ = ٥ (٣ جـ^٢ + ٢جـ) .

٢٧ + ٩ − (− ٨ + ٤) = ٥ (٣ جـ^٢ + ٢ جـ) .

٥ (٣ جـ^٢ + ٢ جـ) = ٤٠ $\Leftarrow$ ٣ جـ^٢ + ٢ جـ = ٨ .

٣ جـ^٢ + ٢ جـ − ٨ = ٠ $\Leftarrow$ (٣ جـ − ٤) (جـ + ٢) = ٠

∴ أما جـ = $\frac{٤}{٣}$ ، أو جـ = − ٢ .

نلاحظ أن : $\frac{٤}{٣}$ ∈ [− ٢ ، ٣] ، − ٢ ∈ [− ٢ ، ٣] .

إذن لــ جـ قيمتان تحققان المبرهنة هما : −٢ ، $\frac{٤}{٣}$.

صيغ تكاملات بعض الدوال الشهيرة :

$\int$ **هـ^{س} ء س = هـ^{س} + ث .**

$\int$ **جا س ء س = − جتا س + ث .**

$\int$ **جتا س ء س = جا س + ث .**

$\int$ **قا^٢ س ء س = ظا س + ث .**

$\int$ **قتا^٢ س ء س = − ظتا س + ث .**

$\int$ **قا س ظا س ء س = قا س + ث .**

$\int$ **قتاس ظتا س ء س = − قتا س + ث .**

الجدول (٧ − ١) التالي يقارن بين الدوال وكلٍّ من تفاضلها وتكاملها :

الدالة $د(س)$	المشتقة $دَ(س)$	التكامل $\int د(س)\ ءس$
$س^{ن}$ ، $ن \neq -١$	$ن\ س^{ن-١}$	$\frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$
$س^{-١}$	$\frac{-١}{س^{٢}}$	$لو\ \lvert س \rvert + ث$
$هـ^{أس+ب}$	$أ\ هـ^{أس+ب}$	$\frac{١}{أ} هـ^{أس+ب} + ث$
$جا\ (أس+ب)$	$أ\ جتا\ (أس+ب)$	$-\frac{١}{أ} جتا\ (أس+ب) + ث$.
$جتا\ (أس+ب)$	$-أ\ جا\ (أس+ب)$	$\frac{١}{أ} جا\ (أس+ب) + ث$.
$قا^{٢}\ (أس+ب)$	$٢أ\ قا^{٢}\ (أس+ب)\ ظا\ (أس+ب)$	$\frac{١}{أ} ظا\ (أس+ب) + ث$.
$قتا^{٢}\ (أس+ب)$	$-٢أ\ قتا^{٢}\ (أس+ب)\ ظتا\ (أس+ب)$	$-\frac{١}{أ} ظتا\ (أس+ب) + ث$.
$قا\ (أس+ب)\ ظا\ (أس+ب)$	$أ\ قا\ (أس+ب)\ [١ + ٢\ ظا^{٢}\ (أس+ب)]$	$\frac{١}{أ} قا\ (أس+ب) + ث$
$قتا\ (أس+ب)\ ظتا\ (أس+ب)$	$-أ\ قتا\ (أس+ب)\ [١ + ٢\ ظتا^{٢}\ (أس+ب)]$	$-\frac{١}{أ} قتا\ (أس+ب) + ث$.

مثال (٧ − ١٥)

احسب التكاملات التالية :

أ) $\int (٣س^{٤} + جا\ س + جتا\ ٥س)\ ءس$.

ب) $\int_{٠}^{١} \frac{هـ^{٢س} - ٩}{هـ^{س} - ٣}\ ءس$.

جـ) $\int (هـ^{-٥س} + جا\ (أ - ٧س) + قتا^{٢}\ ٣س)\ ءس$.

د) $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} (س + \frac{١}{جا^{٢}\ س})\ ءس$.

هـ) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} (س - قا\ س\ ظا\ س)\ ءس$.

الحـــل :

أ) $\int (٣س^{٤} + \text{جا}\,س + \text{جتا}\,٥س)\, ء س = \frac{٣}{٥} س^{٥} - \text{جتا}\,س + \frac{١}{٥}\,\text{جا}\,٥س + ث$.

ب) $\int_{٠}^{١} \frac{هـ^{٢س} - ٩}{هـ^{س} - ٣}\, ء س = \int_{٠}^{١} \frac{(هـ^{س} - ٣)(هـ^{س} + ٣)}{هـ^{س} - ٣}\, ء س$

$= \int_{٠}^{١} (هـ^{س} + ٣)\, ء س = (هـ^{س} + ٣س) \Big|_{٠}^{١}$

$= هـ + ٣ - ١ = هـ + ٢$.

جـ) $\int (هـ^{-٥س} + \text{جا}\,(١ - ٧س) + \text{قتا}^{٢}\,٣س)\, ء س$

$= \frac{-هـ^{-٥س}}{٥} + \frac{١}{٧}\,\text{جتا}\,(١ - ٧س) - \frac{١}{٣}\,\text{ظتا}\,٣س + ث$.

د) $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} (س + \frac{١}{\text{جا}^{٢}\,س})\, ء س = \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} (س + \text{قتا}^{٢}\,س)\, ء س$.

$= \left(\frac{س^{٢}}{٢} - \text{ظتا}\,س\right) \Big|_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} = \frac{\pi^{٢}}{٨} - ٠ - (\frac{\pi^{٢}}{٧٢} - \sqrt{٣})$.

$= \frac{\pi^{٢}}{٩} + \sqrt{٣}$

هـ) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} (س - \text{قا}\,س\ \text{ظا}\,س)\, ء س = \left(\frac{س^{٢}}{٢} - \text{قا}\,س\right) \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$.

$= \frac{\pi^{٢}}{١٨} - ٢ + ١ = \frac{\pi^{٢}}{١٨} - ١$.

مثال (٧ - ١٦)

احسب مايلي :

أ) $\int \text{ظا}^{٢}\,٣س\, ء س$.　　ب) $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{٠} \text{جتا}^{٢}\,س\, ء س$.　　جـ) $\int (٥^{٣ع} - ٣\,\text{ظتا}^{٢}\,أع)\, ء ع$.

د) $\int \text{جا أس جتا أس ءس}$. هـ) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{جتا ٣س جا س ءس}$.

الحــــل :

أ) $\int \text{ظا}^{٢}\text{٣س ءس} = \int (\text{قا}^{٢}\text{٣س} - ١)\text{ءس} = \frac{١}{٣}\text{ظا ٣س} - \text{س} + \text{ث}$.

ب) $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{٠} \text{جتا}^{٢}\text{س ءس} = \int_{-\frac{\pi}{٢}}^{٠} \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا ٢س})\text{ءس} = \frac{١}{٢}\left[\text{س} + \frac{١}{٢}\text{جا ٢س}\right]_{-\frac{\pi}{٢}}^{٠}$

$= \frac{١}{٢}\left[٠ + ٠ - \left(\frac{-\pi}{٢} + ٠\right)\right] = \frac{\pi}{٤}$.

جـ) $\because\ ٥^{٣ع} = \text{هـ}^{٣\text{ع لو ٥}}$.

$\therefore \int (٥^{٣ع} - ٣\,\text{ظتا}^{٢}\text{أع})\text{ءع} = \int (\text{هـ}^{٣\text{ع لو ٥}} - ٣\,\text{ظتا}^{٢}\text{أع})\text{ءع}$

$= \int \text{هـ}^{٣\text{ع لو ٥}}\text{ءع} - ٣\int(\text{قتا}^{٢}\text{أع} - ١)\text{ءع}$

$= \frac{\text{هـ}^{٣\text{ع لو ٥}}}{\text{٣ لو ٥}} - ٣\left(-\frac{١}{\text{أ}}\text{ظتا أع} - \text{ع}\right) + \text{ث}$

$= \frac{\text{هـ}^{٣\text{ع لو ٥}}}{\text{٣ لو ٥}} + \frac{٣}{\text{أ}}\text{ظتا أع} + ٣\text{ع} + \text{ث}$.

د) $\int \text{جا أس جتا أس ءس} = \frac{١}{٢}\int \text{جا ٢أس ءس} = -\frac{١}{٤\text{أ}}\text{جتا ٢أس} + \text{ث}$.

هـ) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{جتا ٣س جا س ءس} = \frac{١}{٢}\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{جا ٤س} - \text{جا ٢س})\text{ءس}$.

$= \frac{١}{٢}\left[-\frac{١}{٤}\text{جتا ٤س} + \frac{١}{٢}\text{جتا ٢س}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$.

$= \frac{١}{٢}\left[-\frac{١}{٤} \times -١ + \frac{١}{٢} \times ٠ - \left(-\frac{١}{٤} \times ١ + \frac{١}{٢} \times ١\right)\right]$

$= \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٢}\right] = ٠$.

تمارين ومسائل (٧ – ٢)

احسب التكاملات التالية :

[١] $\int_{-1}^{1} \text{ع}^{3} \, \text{ء ع}$.

[٢] $\int (\text{س}^{\frac{5}{2}} - 2\,\text{س}^{\frac{3}{2}} - 1) \, \text{ء س}$.

[٣] $\int_{0}^{1} (\text{س}^{2} + 2\text{س} + 3) \, \text{ء س}$.

[٤] $\int \left(\frac{\text{س} - 3}{\sqrt{\text{س}}} \right)^{2} \text{ء س}$.

[٥] $\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{\text{ع}} - 1 \right)^{2} \text{ء ع}$.

[٦] $\int_{1}^{4} \frac{5}{\text{س}} \, \text{ء س}$.

[٧] $\int \left(\frac{1}{\sqrt{\text{س}}} - \frac{1}{\sqrt[4]{\text{س}^{3}}} \right) \text{ء س}$.

[٨] $\int_{1}^{4} \text{س} \, (\sqrt{\text{س}} + 1) \, \text{ء س}$.

[٩] $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\text{س}^{2}}} - \frac{1}{\text{س}\sqrt{\text{س}}} \right) \text{ء س}$.

[١٠] $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (\text{ز}^{3} + 2\,\text{ز} + 1) \, \text{ء ز}$.

[١١] $\int_{0}^{3} \text{د(س)} \, \text{ء س}$ إذا كانت $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{2} + 1 & \text{،} \quad \text{س} \geq 2 \\ 3\text{س} - 1 & \text{،} \quad \text{س} \leq 2 \end{cases}$

[١٢] $\int_{-1}^{3} |\text{س} - 2| \, \text{ء س}$.

[١٣] $\int \text{س}^{\frac{2}{3}} (1 + \text{س}^{\frac{1}{3}}) \, \text{ء س}$.

[١٤] $\int_{-3}^{3} |\text{س}^{2} - 4| \, \text{ء س}$.

[١٥] $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا س} \, \text{ء س}$.

[١٦] $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \text{جا} \frac{\text{س}}{2} \, \text{ء س}$.

[١٧] $\int \text{ظا}^{2} \text{س} \, \text{ء س}$.

[١٨] $\int \frac{\text{ء س}}{\text{جتا}^{2} \text{أ س}}$.

[١٩] $\int_{0}^{\frac{3\pi}{4}} |\text{جتا س}| \, \text{ء س}$.

[٢٠] $\int \text{قتا أ س} \; \text{ظتا أ س} \, \text{ء س}$.

[٢١] $\int (2\text{س} + 3 \, \text{ظتا}^{2} \, 5\text{س}) \, \text{ء س}$.

[٢٢] $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \text{جا}^{2} \text{س} \, \text{ء س}$.

[٢٣] $\int (\text{قا}^{2} \, 3\text{س} + 2 \, \text{قتا}^{2} \, 5\text{س}) \, \text{ء س}$.

[٢٤] $\int \left(\frac{٣}{\text{جا}^{٢}\,٥\,\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}} \right) \text{ء س}$.

[٢٥] $\int_{٠}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ء س}$.

[٢٦] $\int \left(\text{هـ}^{-٣\text{س}} + ٢^{\text{س}} + ٣ \right) \text{ء س}$.

[٢٧] $\int \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}} - ١}{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}\ \text{ء س}$.

[٢٨] $\int \text{جا}\ ٣\ \text{س}\ \text{جتا}\ ٢\ \text{س}\ \text{ءس}$.

[٢٩] $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٦}} \text{جتا}\ ٢\text{س}\ \text{جتا}\ ٤\ \text{س}\ \text{ء س}$.

[٣٠] $\int \text{جا}\ ٥\text{س}\ \text{جا}\ ٢\text{س}\ \text{ء س}$.

[٣١] $\int \text{قا}\ (١ - ٢\ \text{س})\ \text{ظا}\ (١ - ٢\text{س})\ \text{ء س}$.

[٣٢] $\int_{٠}^{\text{لو}\,٢} \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} - ٢}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١}\ \text{ء س}$.

[٣٣] $\int \frac{٨ + \text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ٢}\ \text{ء س}$.

في التمارين من [٣٤] إلى [٤١] ، أوجد قيم جـ التي تحقّق مبرهنة القيمة المتوسطة في التكامل :

[٣٤] $\int_{١}^{٣} (\text{س} + ١)\ \text{ء س}$.

[٣٥] $\int_{٠}^{٩} (\sqrt{\text{س}} - ٢)\ \text{ء س}$.

[٣٦] $\int_{١}^{٩} \frac{٣}{\text{س}^{٢}}\ \text{ء س}$.

[٣٧] $\int_{-٣}^{٠} (\text{س}^{٢} + ٢\ \text{س})\ \text{ء س}$.

[٣٨] $\int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٣} - ٢\ \text{س})\ \text{ء س}$

[٣٩] $\int_{-٣}^{٢} (٣\text{س}^{٢} - ٢\ \text{س})\ \text{ء س}$.

[٤٠] $\int_{-١}^{٣} (٢\text{س} - ٣\text{س}^{٢})\ \text{ء س}$

[٤١] $\int_{٠}^{٣} (\text{س}^{٢} - ٢\ \text{س} + ٣)\ \text{ء س}$.

[٤٢] أوجد الدالة الأصلية للدالة د (س) = ٢ س + ٣ إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ١) .

[٤٣] أوجد معادلة المنحنى الذي ميل المماس له $\frac{١}{\text{س}}$ ؛ ويمر بالنقطة (٢ ، ٣) .

[٤٤] إذا كان ميل المماس لمنحنى دالة معطى بالعلاقة :

د (س) = س + جا ٣س ، أوجد معادلة المنحنى ، إذا علمت أن: ل (٠) = $\frac{١}{٣}$.

[٤٥] إذا كان $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{١}{\text{س}}$ والمنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢) أوجد ص .

[٤٦] إذا كان ميل المماس لمنحنى دالة يساوي $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$. أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (٢ ، ٢) .

[٤٧] إذا كان ميل المماس لمنحنى دالة يساوي $\frac{س}{ص}$ ؛ أوجد هذه الدالة علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (٤ ، –٥) .

[٤٨] إذا كان ميل المماس لمنحنى دالة يساوي ٢ص^٢ . أوجد معادلة الدالة علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (٢ ، ١) .

٧ – ٣ التكامل بالتعويض

تعرفت على بعض التكاملات لبعض الدوال ، ولكن ليس من السهل دائماً إيجاد تكامل بعض الدوال ؛ ولذا لابدلنا من طرق للقيام ببعض التكاملات ، ومن هذه الطرق طريقة التكامل بالتعويض، والأمثلة التالية توضح ذلك :

مثال (٧ – ١٧)

احسب كلاً من التكاملات الآتية :

أ) $\int (٥س + ٢)^{\frac{٥}{٢}} \, ءس$.   ب) $\int ٣س^٢ \sqrt{٥س^٣ + ٤} \, ءس$.

الحل :

أ) نضع ع = ٥س + ٢ $\Leftarrow$ $\frac{ءع}{ءس} = ٥$ $\Leftarrow$ ٥ ءس = ءع .

$\Leftarrow$ ءس = $\frac{١}{٥}$ ءع .

$\therefore$ $\int (٥س+٢)^{\frac{٥}{٢}} \, ءس = \frac{١}{٥} \int ع^{\frac{٥}{٢}} \, ءع = \frac{١}{٥} \times \frac{٢}{٧} ع^{\frac{٧}{٢}} +$ ث .

$= \frac{٢}{٣٥} (٥س + ٢)^{\frac{٧}{٢}} +$ ث .

ب) نضع ص = ٥س^٣ + ٤ $\Leftarrow$ $\frac{ءص}{ءس} = ١٥س^٢$

$\Leftarrow$ س^٢ ءس = $\frac{١}{١٥}$ ءص .

$\therefore$ $\int ٣س^٢ \sqrt{٥س^٣+٤} \, ءس = \int \cancel{٣}^{١} \times \frac{١}{\cancel{١٥}_{٥}} \sqrt{ص} \, ءص = \frac{١}{٥} \int ص^{\frac{١}{٢}} \, ءص$.

$= \frac{١}{٥} \times \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} +$ ث $= \frac{٢}{١٥} (٥س^٣ + ٤)^{\frac{٣}{٢}} +$ ث .

$$\boxed{\int [د(س)]^{ن} \, دَ(س) \, ءس = \frac{[د(س)]^{ن+١}}{ن+١} + ث \text{ حيث } ن \in ح ، ن \neq -١ .} \quad (٧–٥)$$

- أي أنه عند حساب التكامل لدالة مرفوعة للأس ن مضروباً في مشتقة الدالة ، فإن التكامل يساوي الدالة مرفوعة للأس ن + ١ مقسوماً على الأس الجديد مضافاً إليه ث .

- وعندما ن = −١ ، فإن : $\int \frac{د َ(س)}{د(س)}$ ء س = لو |د (س)| + ث .

مثال (٧ − ١٨)

احسب التكاملات الآتية : أ) $\int$ س^{٤} جا س^{٥} ء س . ب) $\int$ هـ$^{س^{٣}+٦س}$ (س^{٢} + ٢) ء س .

الحـــل :

أ) نضع ص = س^{٥} ⟸ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٥ س^{٤} ⟸ س^{٤} ء س = $\frac{١}{٥}$ ء ص .

∴ $\int$ س^{٤} جا س^{٥} ء س = $\frac{١}{٥}$ $\int$ جا ص ء ص = $\frac{-١}{٥}$ جتا ص + ث = $\frac{-١}{٥}$ جتا س^{٥} + ث .

ب) نضع ع = س^{٣} + ٦ س ⟸ $\frac{ء ع}{ء س}$ = ٣ س^{٢} + ٦ .

⟸ ٣ (س^{٢} + ٢) ء س = ء ع .

⟸ (س^{٢} + ٢) ء س = $\frac{١}{٣}$ ء ع .

∴ $\int$ هـ$^{س^{٣}+٦س}$ (س^{٢} + ٢) ء س = $\frac{١}{٣}$ $\int$ هـ^{ع} ء ع = $\frac{١}{٣}$ هـ^{ع} + ث .

= $\frac{١}{٣}$ هـ$^{س^{٣}+٦س}$ + ث .

مثال (٧ − ١٩)

احسب كلاً من : أ) $\int \frac{س^{٢}}{س^{٣}+٢}$ ء س . ب) $\int \frac{جا ٢ س}{٣ + جتا ٢ س}$ ء س .

الحـــل :

أ) نضع ص = س^{٣} + ٢ ⟸ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٣س^{٢} ⟸ س^{٢} ء س = $\frac{١}{٣}$ ء ص

∴ $\int \frac{س^{٢}}{س^{٣}+٢}$ ء س = $\frac{١}{٣}$ $\int \frac{ء ص}{ص}$ = $\frac{١}{٣}$ لو |ص| + ث

= $\frac{١}{٣}$ لو |س^{٣} + ٢| + ث .

ب) نضع ع = ٣ + جتا ٢ س ⟸ $\frac{ء ع}{ء س}$ = −٢ جا ٢ س

⟸ جا ٢ س ء س = $\frac{-١}{٢}$ ء ع

$$\therefore \int \frac{\text{جا ٢ س}}{\text{٣ + جتا ٢ س}} \text{ ءس} = \frac{-١}{٢} \int \frac{\text{ءع}}{\text{ع}} = \frac{-١}{٢} \text{ لو } |\text{ع}| + \text{ث} \ .$$

$$= \frac{-١}{٢} \text{ لو } (\text{٣ + جتا ٢ س}) + \text{ث} \ .$$

مثال (٧ - ٢٠) احسب مايلي :

أ) $\int \text{جا}^{٤} \text{س ءس}$ ب) $\int \text{جتا}^{٥} \text{س ءس}$.

الحـــل :

نلاحظ أنه لاتوجد صيغة تعطي حساب التكامل للنسب جا ، جتا ، ظا ، . . . ، إذا كان الأس أكبر من أو يساوي ٢ ، لذا سنستخدم الطريقة التالية في حالة أن الأس $\geq$ ٢ للدالتين جا ، جتا .

أ) $\int \text{جا}^{٤} \text{س ءس} = \int (\text{جا}^{٢} \text{س})^{٢} \text{ ءس}$.

$$\because \text{جا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} \text{ جتا ٢ س}$$

$$\therefore \text{ل} = \int \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} \text{ جتا ٢ س} \right)^{٢} \text{ءس} = \int \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} \text{ جتا ٢ س} + \frac{١}{٤} \text{ جتا}^{٢} \text{ ٢س} \right) \text{ءس} .$$

$$= \frac{١}{٤} \text{ س} - \frac{١}{٤} \text{ جا ٢ س} + \frac{١}{٤} \int \text{جتا}^{٢} \text{ ٢ س ءس}$$

$$\because \text{جتا}^{٢} \text{ ٢ س} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \text{ جتا ٤س}$$

$$\therefore \text{ل} = \frac{١}{٤} \text{ س} - \frac{١}{٤} \text{ جا ٢ س} + \frac{١}{٤} \int \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \text{ جتا ٤ س} \right) \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٤} \text{ س} - \frac{١}{٤} \text{ جا ٢ س} + \frac{١}{٨} \text{ س} + \frac{١}{٣٢} \text{ جا ٤ س} + \text{ث}$$

$$= \frac{٣}{٨} \text{ س} - \frac{١}{٤} \text{ جا ٢ س} + \frac{١}{٣٢} \text{ جا ٤ س} + \text{ث}$$

ب) $\int \text{جتا}^{٥} \text{س ءس} = \int \text{جتا}^{٤} \text{س جتا س ءس}$

$$= \int (\text{جتا}^{٢} \text{س})^{٢} \text{ جتا س ءس} = \int (\text{١} - \text{جا}^{٢} \text{س})^{٢} \text{ جتا س ءس}$$

$$= \int (\text{١} - \text{٢ جا}^{٢} \text{س} + \text{جا}^{٤} \text{س}) \text{ جتا س ءس} .$$

$$= \int \text{جتا س ءس} - \text{٢} \int \text{جا}^{٢} \text{س جتا س ءس} + \int \text{جا}^{٤} \text{س جتا س ءس}$$

$$= \text{جا س} - \frac{٢}{٣} \text{ جا}^{٣} \text{س} + \frac{١}{٥} \text{ جا}^{٥} \text{س} + \text{ث} .$$

أما إذا كان التكامل محدّداً . فإننا نستخدم الأسلوب نفسه مع استبدال حدي التكامل بالتعويض في الدالة المفروضة كما في المثال التالي :

مثال (٧ - ٢١)

احسب $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤ - س^{٢}}\ ء س$.

الحل :

نضع $س = ٢ \text{ جا } ع \Leftarrow ء س = ٢ \text{ جتا } ع\ ء ع$.

وعندما $س = ٠$: نجد أن $\text{جا}ع = ٠ \Leftarrow ع = ٠$

، عندما $س = ٢$: نجد أن $\text{جا}ع = ١ \Leftarrow ع = \frac{\pi}{٢}$

$$\therefore \int_{٠}^{٢} \sqrt{٤ - س^{٢}}\ ء س = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{٤ - ٤ \text{ جا}^{٢} ع}\ ٢ \text{ جتا } ع\ ء ع .$$

$$= ٤ \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{١ - \text{جا}^{٢} ع}\ \text{جتا } ع\ ء ع = ٤ \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتا}^{٢} ع\ ء ع .$$

$$= ٤ \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \text{جتا} ٢ ع \right) ء ع = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left(٢ + ٢ \text{ جتا } ٢ ع \right) ء ع .$$

$$= \left(٢ع + \text{جا } ٢ع \right) \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} = \left(\cancel{٢} \times \frac{\pi}{\cancel{٢}} + \text{جا } \pi \right) - \left(٠ + ٠ \right) .$$

$$= \left(\pi + ٠ \right) = \pi .$$

تمارين ومسائل (٧ - ٣)

احسب المتكاملات الآتية :

[١] $\int (٥ س + ٤)^{٦}\ ء س$

[٢] $\int \left(\frac{١}{٣} س - ٦ \right)^{-٧} ء س$.

[٣] $\int \sqrt[٣]{٣ ص + ١}\ ء ص$

[٤] $\int \frac{ء ع}{(٥ ع + ١)^{٣}}$.

[٥] $\int \frac{ء ع}{\sqrt[٣]{(٣ع + ٥)^{٢}}}$

[٦] $\int (ص^{٢} + ٤)^{٥}\ ص\ ء ص$.

[٧] $\int (٧ - ٢\,س^{٢})\,س\,ءس$

[٨] $\int \frac{٣\,س\,ءس}{\sqrt{س^{٢} - ١}}$.

[٩] $\int \frac{(ص^{٢} + ٢\,ص)\,ءص}{\sqrt{ص^{٣} + ٣\,ص^{٢} + ٧}}$

[١٠] $\int_{١}^{٢} (١ + \frac{١}{ع^{٢}})^{٣}\,\frac{ءع}{ع^{٣}}$.

[١١] $\int (س^{٣} + ٢)^{\frac{٣}{٥}}\,س^{٥}\,ءس$

[١٢] $\int جا^{٧}\,س\,جتا\,س\,ءس$.

[١٣] $\int \frac{(\sqrt[٣]{س} + ٤)^{٤}}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}\,ءس$.

[١٤] $\int_{٠}^{\sqrt{\pi}} س\,جتا\,س^{٢}\,ءس$

[١٥] $\int_{٠}^{١} \frac{س - ١}{١ + \sqrt{س}}\,ءس$.

[١٦] $\int_{\frac{١}{\pi}}^{\frac{٢}{\pi}} \frac{جا\,\frac{١}{س}}{س^{٢}}\,ءس$

[١٧] $\int_{٠}^{\sqrt{٢}} \sqrt{٤ - س^{٢}}\,ءس$

[١٨] $\int ظتا\,س\,ءس$

[١٩] $\int جتا\,٥س\,\sqrt{٩ - جا\,٥\,س}\,ءس$

[٢٠] $\int جا^{٦}\,س\,ءس$.

[٢١] $\int جا\,س\,هـ^{-جتا\,س}\,ءس$

[٢٢] $\int ظا\,س\,ءس$

[٢٣] $\int \frac{ءس}{س\,(س^{٧} + ١)}$

[٢٤] $\int \frac{(لو\,س)^{٢}}{س}\,ءس$

[٢٥] $\int \frac{جتا\,(لو\,س)}{س}\,ءس$

[٢٦] $\int \frac{هـ^{\frac{١}{س^{٢}}}}{س^{٣}}\,ءس$.

[٢٧] $\int \frac{٢\,جا\,٢\,ص}{\sqrt{جا^{٢}\,ص + ٥}}\,ءص$

[٢٨] $\int_{هـ}^{هـ^{٢}} \frac{ءس}{س\,لو\,س}$.

[٢٩] $\int \frac{(٢\,جا\,ع + ٥)\,جتا\,ع}{جا^{٢}\,ع + ٥\,جاع}\,ءع$.

[٣٠] $\int$ جتا^{٣} ع جا ع ء ع

[٣١] $\int$ (٢ هـ^{٢س} + ٣ هـ^{٣س}) ء س .

[٣٢] $\int$ س $\sqrt{\text{س} + ٢}$ ء س

[٣٣] $\int \dfrac{\text{جا س}}{(١ + \text{جتا س})^{٢}}$ ء س .

[٣٤] $\int \dfrac{\text{ء س}}{\text{س} (\text{س}^{٣} + ١)}$.

[٣٥] $\int$ هـ^{س} قتا^{٢} هـ^{س} ء س

[٣٦] $\int$ هـ$^{-س}$ قا^{٢} (٢ هـ$^{-س}$ + ٥) ء س

[٣٧] $\int$ ظا^{٣} س ء س .

٧ – ٤ التكامل بالتجزئة

تذكر أن :

ء (ف م) = ف ء م + م ء ف . . . .(١)

كما تعلم أن هذا القانون هو مشتقة حاصل ضرب دالتين .

واستناداً إلى تعريف التكامل غير المحدّد ، فإن مشتقة التكامل غير المحدّد يساوي الدالة المكاملة .

وبمكاملة الصيغة (١) نجد أن :

$\int$ ء (ف م) = $\int$ ف ء م + $\int$ م ء ف .

$\therefore$ ف م = $\int$ ف ء م + $\int$ م ء ف .

$\int$ ف ء م = ف م – $\int$ م ء ف . . . . (٧ –٦)

تسمى هذه الصيغة طريقة التكامل بالتجزئة ، وتشير إلى أنه لحساب $\int$ ف ء م فإنه ينبغي فرض مناسب لكل من ف ، ء م .

وتستخدم الصيغة (٧ – ٦) لإيجاد تكامل دالة على صورة حاصل ضرب دالتين ، إحداهما على الأقل غير قياسية مثل دالة الجيب وجيب التمام ، أو أسية ، أو لوغاريتمية ، . . . إلخ .

مثال (٧ – ٢٢)

احسب كلاً من التكاملات التالية :

أ) $\int$ (س + ١) جا س ء س .

ب) $\int$ (س^{٢} + ٢ س) جتا س ء س .

الحـــل :

أ) نضع ف = س + ١ $\Leftarrow$ ء ف = ء س

ء ﻫ = جا س ء س $\Leftarrow$ ﻫ = − جتا س .

واستناداً إلى الصيغة (٧ − ٦) .

∴ $\int$ (س + ١) جا س ء س = − (س + ١) جتا س − $\int$ − جتا س ء س .

= − (س + ١) جتا س + جا س + ث .

ب) نضع ف = س^{٢} + ٢ س $\Leftarrow$ ء ف = (٢ س + ٢) ء س .

ء ﻫ = جتا س ء س $\Leftarrow$ ﻫ = جا س .

∴ ل = $\int$ (س^{٢} + ٢ س) جتا س ء س = (س^{٢} + ٢ س) جا س − $\int$ (٢ س + ٢) جا س ء س ... (١)

لإيجاد $\int$ (٢ س + ٢) جا س ء س تستخدم التجزئة مرة أخرى .

نضع ف = ٢ س + ٢ $\Leftarrow$ ء ف = ٢ ء س .

ء ﻫ = جا س ء س $\Leftarrow$ ﻫ = − جتا س .

∴ $\int$ (٢ س + ٢) جا س ء س = − (٢ س + ٢) جتا س + $\int$ ٢ جتا س ء س وبالتعويض في (١) .

∴ ل = (س^{٢} + ٢ س) جا س + (٢ س + ٢) جتا س − ٢ جا س + ث .

نلاحظ أننا استخدمنا طريقة التكامل بالتجزئة مرتين في الفرع (ب) لأن درجة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية، فإذا كانت كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة ثلاث مرات ... وهكذا .

مثال (٧ − ٢٣)

احسب مايلي :

أ) ل = $\int$ لو س ء س ب) ل = $\int$ س لو س ء س .

الحـــل :

أ) نضع ف = لو س $\Leftarrow$ ء ف = $\frac{\text{ء س}}{\text{س}}$.

ء ﻫ = ء س $\Leftarrow$ ﻫ = س

∴ ل = س لو س − $\int \frac{\cancel{\text{س}}\ \text{ء س}}{\cancel{\text{س}}}$ = س لو س − س + ث .

ب) نضع ف = لو س $\Leftarrow$ ء ف = $\frac{\text{ء س}}{\text{س}}$

ء ﻫ = س ء س $\Leftarrow$ ﻫ = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$.

∴ ل = $\frac{\text{س}^{٢}\ \text{لو س}}{٢}$ − $\int \frac{\text{س}^{٢}}{٢} \times \frac{\text{ء س}}{\text{س}}$

= $\frac{\text{س}^{٢}\ \text{لو س}}{٢}$ − $\frac{١}{٢} \int$ س ء س = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} لو س − $\frac{١}{٤}$ س^{٢} + ث .

مثال (٧ - ٢٤)

احسب $ل = \int هـ^{س} جا س \, ء س$.

الحـــل : نضع $ف = هـ^{س}$ $\Leftarrow$ $ء ف = هـ^{س} ء س$.

$ء ن = جا س \, ء س$ $\Leftarrow$ $ن = - جتا س$.

$\therefore ل = - هـ^{س} جتا س + \int هـ^{س} جتا س \, ء س$ ....(١)

نلاحظ أن التكامل في الطرف الأيسر من (١) هو عبارة عن دالة مثلثيه والأخرى أسية وتشبة المسألة نفسها.

ولذلك سنحسب $\int هـ^{س} جتا س \, ء س$ باستخدام التجزئة مرة أخرى .

نضع $ف = هـ^{س}$ $\Leftarrow$ $ء ف = هـ^{س} ء س$.

$ء ف = جتا س \, ء س$ $\Leftarrow$ $ن = جا س$.

وبالتعويض في (١) عن $\int هـ^{س} جتا س \, ء س = هـ^{س} جا س - \int هـ^{س} جا س \, ء س$.

$\int هـ^{س} جا س \, ء س = - هـ^{س} جتا س + هـ^{س} جا س - \int هـ^{س} جا س \, ء س$ ....(٢)

نلاحظ أن: $\int هـ^{س} جا س \, ء س$ ظهر مرة أخرى في(٢) هنا ستتوقف عن استخدام طريقة المكاملة بالتجزئة

وننقل $- \int هـ^{س} جا س \, ء س$ إلى الطرف الأيمن أي أن :

$\int هـ^{س} جا س \, ء س + \int هـ^{س} جا س \, ء س = - هـ^{س} جتا س + هـ^{س} جا س + ث$ (بجمع الطرف الأيمن)

$\therefore ٢ \int هـ^{س} جا س \, ء س = - هـ^{س} جتا س + هـ^{س} جا س + ث$. (بالقسمة على العدد ٢)

$\therefore \int هـ^{س} جا س \, ء س = - \frac{١}{٢} هـ^{س} جتا س + \frac{١}{٢} هـ^{س} جا س + ث$

$\therefore \int هـ^{س} جا س \, ء س = \frac{١}{٢} هـ^{س} (جا س - جتا س) + ث$.

مثال (٧ - ٢٥)

احسب $ل = \int س^{٥} هـ^{س^{٣}} ء س$.

الحـــل : نلاحظ أن $هـ^{س^{٣}}$ ليست في الصور القياسية لذا نستخدم التعويض وذلك بوضع .

$س^{٣} = ع$ $\Leftarrow$ $٣ س^{٢} ء س = ء ع$ $\Leftarrow$ $س^{٢} ء س = \frac{١}{٣} ء ع$.

$ل = \int س^{٣} \times س^{٢} هـ^{س^{٣}} ء س = \frac{١}{٣} \int ع \, هـ^{ع} ء ع$ ....(١)

وهنا نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة .

نضع $ف = ع \quad \Leftarrow \quad ءف = ءع$.

$ءو = هـ^{ع}\, ءع \quad \Leftarrow \quad و = هـ^{ع}$.

$\therefore$ $ل = \frac{١}{٣} ع\, هـ^{ع} - \frac{١}{٣} \int هـ^{ع}\, ءع$.

$= \frac{١}{٣} ع\, هـ^{ع} - \frac{١}{٣} هـ^{ع} + ث$.

وبالتعويض عن $ع = س^{٣}$ نجد أن :

$\int س^{٥}\, هـ^{س^{٣}}\, ءس = \frac{١}{٣} س^{٣}\, هـ^{س^{٣}} - \frac{١}{٣} هـ^{س^{٣}} + ث$.

$\therefore$ $\int س^{٥}\, هـ^{س^{٣}}\, ءس = \frac{١}{٣} هـ^{س^{٣}} (س^{٣} - ١) + ث$.

تمارين ومسائل (٧ – ٤)

احسب التكاملات الآتية :

[١] $\int س^{٢} جا س\, ءس$

[٢] $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} س\, جا س\, جتا س\, ءس$

[٣] $\int س\, جتا ٢س\, ءس$

[٤] $\int (س + ٤)\, جا ٢ س\, ءس$

[٥] $\int (٦س + ١)\, جتا^{٢} س\, ءس$

[٦] $\int_{هـ}^{هـ^{٢}} لو س\, ءس$

[٧] $\int (س^{٢} - ١)\, جا س\, ءس$

[٨] $\int جا^{٣} س\, ءس$ «بالتجزئة»

[٩] $\int هـ^{س} جتا س\, ءس$

[١٠] $\int س^{٣} جتا س\, ءس$

[١١] $\int (س^{٢} + س)\, هـ^{س}\, ءس$

[١٢] $\int س^{٣} جا س^{٢}\, ءس$

[١٣] $\int جا \sqrt{س}\, ءس$

[١٤] $\int_{١}^{هـ} (لو س)^{٢}\, ءس$

[١٥] $\int س\, قتا^{٢} س\, ءس$

[١٦] $\int س^{٣}\, هـ^{س}\, ءس$

[١٧] $\int س^{٣} لو ٢س\, ءس$

[١٨] $\int س\, قا^{٢} س\, ءس$

٧ – ٥ تكامل الدوال الكسرية

تدريب

أوجد $\int \frac{س\ ءس}{س^٢ - ٥}$.

لاشك أنك قد توصّلت للحل وهو $\frac{١}{٢}$ لو $|س^٢ - ٥|$ + ث ، ونلاحظ هنا أن الداله الكسرية قد احتوت على بسط هو عبارة عن مشتقه المقام نفسه (وقد يكون مضروباً في عدد حقيقي) .

في هذا البند سوف تتعرف على تكامل دوال كسرية (لا يكون بسطها هو مشتقه المقام) مختلفة .

أولاً : إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام ، والمقام يحلل إلى حاصل ضرب عوامله الأولية من الدرجة الأولى (غير مكررة).

نضع الكسر $\frac{هـ(س)}{ق(س)}$ بالصورة :

$$\frac{هـ(س)}{ق(س)} = \frac{هـ(س)}{(س - م_١)(س - م_٢) \cdots (س - م_د)} .$$

ونقوم بتجزئة المقام في الطرف الأيسر إلى صورة مجموع كسور جزئية كالتالي :

$$\frac{هـ(س)}{ق(س)} = \frac{أ_١}{س - م_١} + \frac{أ_٢}{س - م_٢} + \cdots + \frac{أ_د}{س - م_د} .$$

ثم نوجد قيم الثوابت $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ... ، $أ_د$ وبالتالي يمكننا أن نجري التكامل على النحو الآتي :

$$\int \frac{هـ(س)}{ق(س)} ءس = \int \frac{أ_١}{س - م_١} ءس + \int \frac{أ_٢}{س - م_٢} ءس + \cdots + \int \frac{أ_د}{س - م_د} ءس .$$

مثال (٧ – ٢٦)

أوجد $\int \frac{س^٢}{(س^٢ - ١)(س - ٢)} ءس$.

الحـــل : $\because$ $\int \frac{س^٢}{(س - ١)(س + ١)(س - ٢)} ءس$.

نجزئ المقام على الصورة :

$$\frac{س^٢}{(س - ١)(س + ١)(س - ٢)} = \frac{أ}{س - ١} + \frac{ب}{س + ١} + \frac{جـ}{س - ٢} \quad ....(١)$$

نوحد مقامات الطرف الأيسر كما يلي :

$$\frac{\text{س}^{٢}}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)(\text{س}-٢)}=\frac{\text{أ}(\text{س}+١)(\text{س}-٢)+\text{ب}(\text{س}-١)(\text{س}-٢)+\text{جـ}(\text{س}-١)(\text{س}+١)}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)(\text{س}-٢)}.$$

$$=\frac{\text{أ}(\text{س}^{٢}-\text{س}-٢)+\text{ب}(\text{س}^{٢}-٣\text{س}+٢)+\text{جـ}(\text{س}^{٢}-١)}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)(\text{س}-٢)}$$

$$\frac{\text{س}^{٢}}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)(\text{س}-٢)}=\frac{(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})\text{س}^{٢}+(-\text{أ}-٣\text{ب})\text{س}+(-٢\text{أ}+٢\text{ب}-\text{جـ})}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)(\text{س}-٢)}$$

وبمساواة بسطي الكسرين نحصل على العلاقة التالية :

$$(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})\text{س}^{٢}+(-\text{أ}-٣\text{ب})\text{س}+(-٢\text{أ}+٢\text{ب}-\text{جـ})=\text{س}^{٢} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

وبمقارنة معاملات الحدود متساوية القوى في العلاقة (*) نجد أن :

$$\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}=١ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٢)$$

$$-\text{أ}-٣\text{ب}=٠ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٣)$$

$$-٢\text{أ}+٢\text{ب}-\text{جـ}=٠ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

بحل المعادلات الثلاث نجد أن :

$$\text{أ}=\frac{-١}{٢}\ ،\quad \text{ب}=\frac{١}{٦}\ ،\quad \text{جـ}=\frac{٤}{٣}\ .$$

بالتعويض عن قيم أ ، ب ، جـ والمكاملة في (١) نجد أن :

$$\int\frac{\text{س}^{٢}}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)(\text{س}-٢)}\,\text{ء}\,\text{س}=\int\frac{-\frac{١}{٢}\,\text{ء}\,\text{س}}{\text{س}-١}+\int\frac{\frac{١}{٦}\,\text{ء}\,\text{س}}{\text{س}+١}+\int\frac{\frac{٤}{٣}\,\text{ء}\,\text{س}}{\text{س}-٢}$$

$$=-\frac{١}{٢}\text{لو}\,|\text{س}-١|+\frac{١}{٦}\text{لو}\,|\text{س}+١|+\frac{٤}{٣}\text{لو}\,|\text{س}-٢|+\text{ث}\ .$$

ملاحظة : يمكن الحصول على قيم الثوابت، وذلك بالتعويض عن قيم س بأصفار المقام في العلاقة (*) .

ثانياً : إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام ، في مثل هذه الحالة نلجأ إلى خوارزمية القسمة، فنحصل على كثيرة حدود مضافاً إليها دالة كسرية ويتم تكاملها كما في أولاً :

مثال (٧ – ٢٧)

أحسب $\int \frac{س^{٣}}{س^{٢} - ٤}$ ء س .

الحــــل : درجة البسط أكبر من درجة المقام إذن نقسم البسط على المقام .

$\therefore \frac{س^{٣}}{س^{٢} - ٤} = س + \frac{٤ س}{س^{٢} - ٤}$.

$\therefore \int \frac{س^{٣} ء س}{س^{٢} - ٤} = \int س ء س + ٤ \int \frac{س}{س^{٢} - ٤} ء س$

$= \frac{س^{٢}}{٢} + ٢ لو \left| س^{٢} - ٤ \right| + ث$.

تمارين ومسائل (٧-٥)

احسب التكاملات الآتية :

[١] $\int \frac{\text{س ء س}}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤}$

[٢] $\int \frac{\text{ء س}}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٣)}$.

[٣] $\int \frac{\text{ء س}}{١ - \text{س}^{٢}}$

[٤] $\int \frac{\text{ء س}}{\text{س}^{٢} - ٩}$.

[٥] $\int \frac{\text{س} + ٢}{\text{س}(\text{س} - ٢)} \text{ ء س}$

[٦] $\int \frac{\text{س} + ١}{\text{س}(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)} \text{ ء س}$

[٧] $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} - ١} \text{ ء س}$.

[٨] $\int \frac{\text{س}^{٢} - ١}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)} \text{ ء س}$

[٩] $\int \frac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س}^{٢} - ١} \text{ ء س}$.

[١٠] $\int \frac{٢\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - \text{س}} \text{ ء س}$

[١١] $\int \frac{٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}{\text{س}(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)} \text{ ء س}$.

[١٢] $\int \frac{\text{س}^{٤} - ٣\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٢}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٢\text{س}} \text{ ء س}$

[١٣] $\int \frac{\text{س} + ٢}{\text{س}(\text{س}^{٢} - ٢)} \text{ ء س}$

[١٤] $\int \frac{\text{قتا}^{٢}\text{س}}{١ - \text{ظتا}^{٢}\text{س}} \text{ ء س}$.

[١٥] $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{١ - \text{هـ}^{٢\text{س}}} \text{ ء س}$.

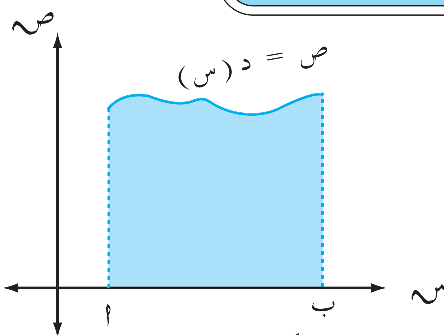
٧ – ٦ تطبيقات التكامل

تأتي أهمية استخدام التكامل في تطبيقات كثيرة ، وفي هذا البند نتناول تطبيقين هندسيين للتكامل الأول يتعلق بحساب مساحة المناطق المستوية والآخر بحساب الحجوم الدورانية .

٧ – ٦ – ١ حساب مساحات المناطق المستوية

تعرّفت فيما سبق أن مساحة المنطقة التي تقع تحت بيان دالة متصلة د ∀ س ∈ [أ ، ب] ، وفوق محور السينات كما في الشكل(٧ – ٣) هي :

$$سط_{أ}^{ب} = \int_{أ}^{ب} د(س) \, ءس \; .$$



شكل (٧ – ٣)

مثال (٧ – ٢٨)

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة :

ص = ٤ س – س^{٢} والمستقيمات س = ١ ،

س = ٣ ، ص = ٠ .

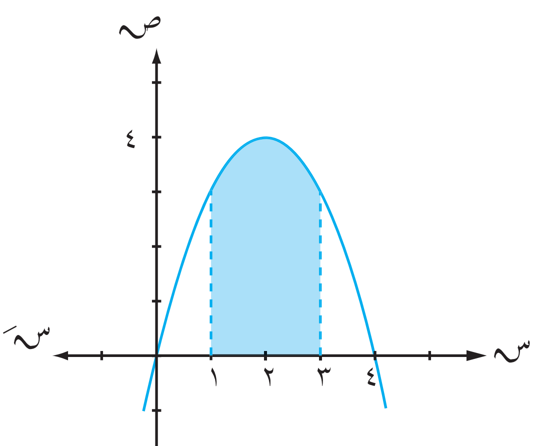
الحل :

لإيجاد نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠

⟸ ٤ س – س^{٢} = ٠ ⟸ س(٤ – س) = ٠

⟸ س = ٠ ، س = ٤ ، [١ ، ٣] ⊂ [٠ ، ٤]

∴ فترة التكامل هي [١ ، ٣] ، ومن الشكل (٧ – ٤)



شكل (٧ – ٤)

نجد أن : $سط_{١}^{٣} = \int_{١}^{٣} (٤ س – س^{٢}) \, ءس = \left(٢ س^{٢} – \frac{س^{٣}}{٣} \right) \Big|_{١}^{٣} = \frac{٢٢}{٣}$ وحدة مربعة .

مثال (٧ – ٢٩)

احسب مساحة المنطقة المحددة بالقطع المكافئ :

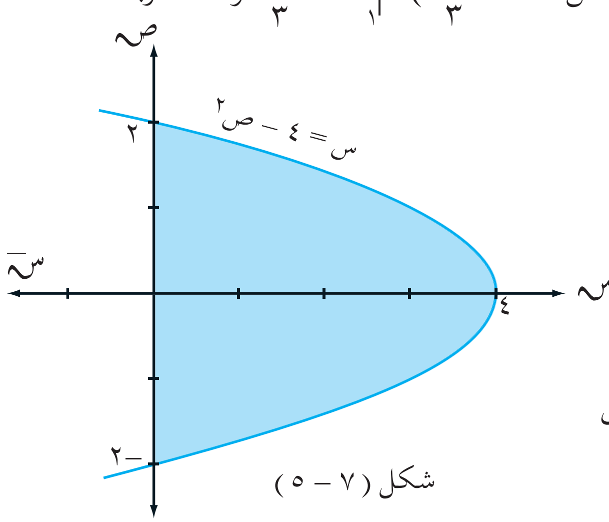
س = ٤ – ص^{٢} والمستقيم س = ٠ .

الحل :

بوضع س = ٠ ⟸ ص = ± ٢

لاحظ المتغير ص من الدرجة الثانية وفترات التكامل

على محور الصادات هي : [–٢ ، ٠] ، [٠ ، ٢] .



شكل (٧ – ٥)

ومن الشكل (٧ – ٥) نجد أن :

$$\text{سط}_{-٢}^{٢} = \int_{-٢}^{٢} (٤ - \text{ص}^{٢})\,\text{ءص}$$

$$\Leftarrow \text{سط}_{-٢}^{٢} = \int_{-٢}^{٠} (٤ - \text{ص}^{٢})\,\text{ءص} + \int_{٠}^{٢} (٤ - \text{ص}^{٢})\,\text{ءص}$$

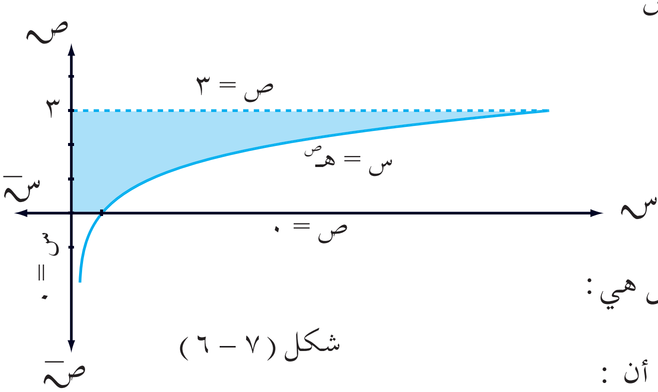
وحيث أن منحنى الدالة متماثل حول محور السينات

$$\therefore \text{سط}_{-٢}^{٢} = ٢ \int_{٠}^{٢} (٤ - \text{ص}^{٢})\,\text{ءص} = ٢ \times \frac{١٦}{٣} = \frac{٣٢}{٣} \text{ وحدة مربعة .}$$

مثال (٧ – ٣٠)

احسب المساحة المحددة بمنحنى الدالة : ص = لو س

والمستقيمات س = ٠ ، ص = ٠ ، ص = ٣ .



شكل (٧ – ٦)

الحـل :

$\text{ص} = \text{لو س} \Leftrightarrow \text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}}$ ،

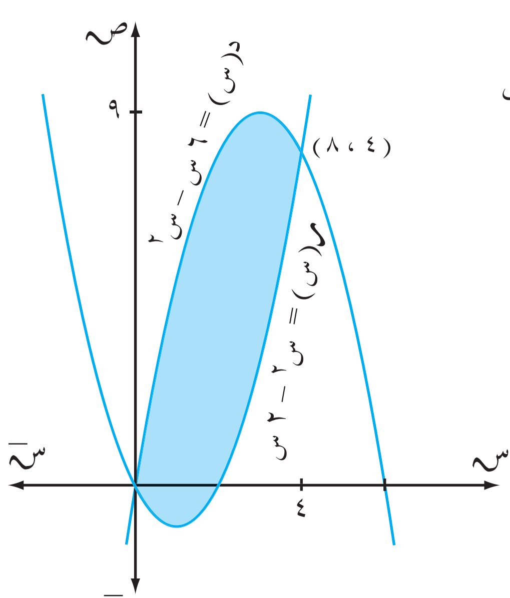
$\because \text{سط}_{أ}^{ب} = \int_{أ}^{ب} \text{س}\,\text{ءص}$ ، وحدود التكامل هي :

أ = ٠ ، ب = ٣ ، ومن الشكل (٧ – ٦) نجد أن :

$$\text{سط}_{٠}^{٣} = \int_{٠}^{٣} \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} = \text{هـ}^{\text{ص}} \Big|_{٠}^{٣} = (\text{هـ}^{٣} - ١) \text{ وحدة مربعة .}$$

مثال (٧ – ٣١)

احسب المساحة المحصورة بين منحنى الدالتين: $\text{د(س)} = ٦\text{س} - \text{س}^{٢}$ ، $\text{ر(س)} = \text{س}^{٢} - ٢\text{س}$.



شكل (٧ – ٧)

الحـل :

لإيجاد نقاط تقاطع الدالتين نضع $٦\text{س} - \text{س}^{٢} = \text{س}^{٢} - ٢\text{س}$

$\Leftarrow ٢\text{س}(\text{س} - ٤) = ٠$

إما س = ٠ ، أو س = ٤

∴ حدود التكامل هي : أ = ٠ ، ب = ٤ ،

ومن الشكل (٧ – ٧) نجد أن :

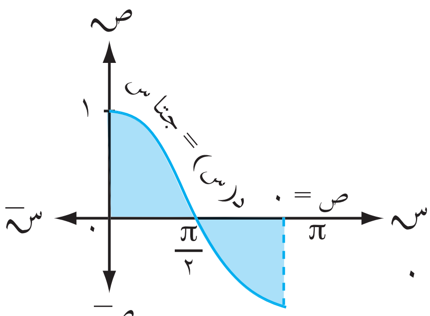
$$\because \text{سط}_{أ}^{ب} = \int_{أ}^{ب} [\text{د(س)} - \text{ر(س)}]\,\text{ءس}$$

$$\therefore \text{سط}_{٠}^{٤} = \int_{٠}^{٤} [(٦\text{س} - \text{س}^{٢}) - (\text{س}^{٢} - ٢\text{س})]\,\text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{٤} (٨\text{س} - ٢\text{س}^{٢})\,\text{ءس}$$

$$= \left(٤\text{س}^{٢} - \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣}\right)\Big|_{٠}^{٤} = \frac{٦٤}{٣} \text{ وحدة مربعة .}$$

مثال (٧ – ٣٢)



شكل (٧ – ٨)

أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة : د(س) = جتا س ،

ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = π .

الحــــل : نوجد نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات بوضع ص = ٠

$\Leftarrow$ جتا س = ٠ $\Leftarrow$ س = $\frac{\pi}{٢}$ $\in$ [٠ ، π]

$\therefore$ فترات التكامل هي : [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، [$\frac{\pi}{٢}$ ، π] ،

ومن الشكل (٧ – ٨) نجد أن: سط = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ [جتا س – ٠] ء س + $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$ [٠ – جتا س] ء س

= $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جتاس ء س – $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$ جتا س ء س = جا س $\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ – جاس $\Big|_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$ = ١ + ١ = ٢ وحدات مربعة .

ملاحظة : عنـدما يكون بيان الدالة أسفل محور السينات فإننا نغير إشارة الدالة عند إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين بيان الدالة ومحور السينات .

تمارين ومسائل (٧–٦–١)

[١] أوجد المساحة المحدّدة بالمنحنيات والمستقيمات التالية:

أ) ص = لو س ، ص = هـ^{س} ، س = ١ ، س = ٣ .

ب) ص = $\sqrt{س + ١}$ ، ص = ٠ ، س = ٠ .

جـ) س = (ص – ١)^{٢} ، س = ٠ ، ص = ٢ .

[٢] احسب مساحة المنطقة المحصورة بمنحنى الدالة : ص = س^{٢} – س – ٦ ، والمستقيم ص = ٠ .

[٣] أوجد مساحة المنطقة المحدّدة بمنحنى القطع المكافئ : ص^{٢} = ٤ س والمستقيمات : س =٤ ، س = ٩ .

[٤] احسب مساحة المنطقة بين القطع المكافئ : ص = ٤ – س^{٢} ومحور السينات .

[٥] بيِّن أن مساحة المنطقة بين القطع المكافئ : ص^{٢} = س – ١ والمستقيم ص = س – ٣ تساوي $\frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة.

[٦] أوجد المساحة المحصورة بين القطع الزائد : س ص = ب^{٢} والمستقيمات ص = ٠ ، س = أ ، س = ٢أ .

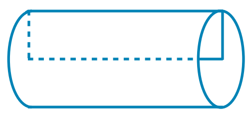
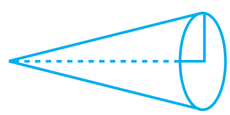
[٧] احســـب المساحة المحـصـورة بين منحـنــى الدالتين : ص$_{١}$ = $\frac{٤}{س}$ ، ص$_{٢}$ = س والمستقيمين س = ١ ، س = ٢ .

[٨] احسب المساحة المحصورة بالمستقيم : ص + س = ١ والمحورين الإحداثيين .

[٩] أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى: ص = س^{٢} + ٢ س – ٨ والمستقيم: ص = ١٦ ، ومحور السينات السالب .

٧ – ٦ – ٢ الحجوم الدورانية

تنشأ الحجوم الدورانية عن دوران مساحة منطقة معينة حول محور ما ، وفيما يلي بعض الأشكال المجسَّمة الدورانية .

الجسم الدوراني	طريقة توليده	شكله	حجمه
الاسطوانة الدائرية القائمة	دوران مستطيل حول أحد أضلاعه دورة كاملة، أو دوران مستطيل حول أحد محاور تناظره نصف دورة .		π نق^2 ل
المخروط الدائري القائم	دوران مثلث قائم حول أحد أضلاع الزاوية القائمة دورة كاملة ، أو دوران مثلث متساوي الساقين حول محور تناظره نصف دورة .		$\frac{\pi}{٣}$ نق^2 ل
الكرة	دوران نصف دائره حول قطرها دورة كاملة، أو دوران دائرة حول قطرها نصف دورة .		$\frac{٤\pi}{٣}$ نق^3

شكل (٧ – ٩) أشهر الأجسام الدورانية

وسندرس هنا كيفية إيجاد الحجوم الناتجة عن دوران منطقة مستوية حول أحد المحورين الإحداثيين السيني والصادي دورة كاملة .

أولاً : حجم الجسم الناتج عن دوران منطقة مستوية حول محور السينات دورة كاملة :

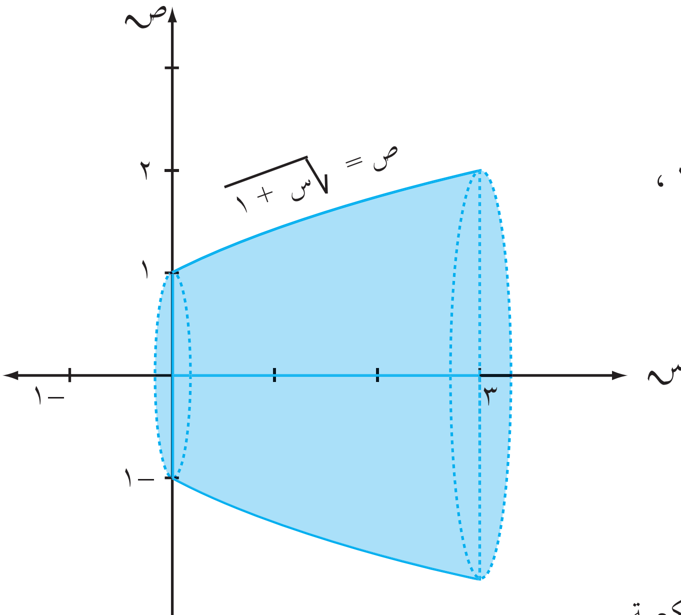
مبرهنة : (٧–١١)

إذا كانت المنطقة المستوية محصورة بين بيان الدالة د والفترة [أ ، ب] من محور السينات ، د (س) > ٠ ، فإن الحجم (ح) الناتج عن دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات هو :

$$ح = \pi \int_{أ}^{ب} (د(س))^2 \, ءس \, .$$

مثال (٧ – ٣٣)

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + ١}$ ما حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة د والفترة [٠ ، ٣] دورة كاملة حول محور السينات .



شكل (٧ – ١٠)

الحـــل :

$\because$ حدود التكامل هي: أ = ٠ ، ب = ٣ ،

$\text{د}(\text{س}) = (\text{س} + ١)^{\frac{١}{٢}}$ ،

ومن الشكل (٧ – ١٠) نجد أن :

$\text{ح} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{د}(\text{س}))^{٢} \, \text{ء س}$.

$\Leftarrow \text{ح} = \pi \int_{٠}^{٣} (\text{س} + ١) \, \text{ء س}$

$= \frac{\pi}{٢} (\text{س} + ١)^{٢} \Big|_{٠}^{٣} = \frac{١٥}{٢} \pi$ وحدة مكعبة.

مثال (٧ – ٣٤)

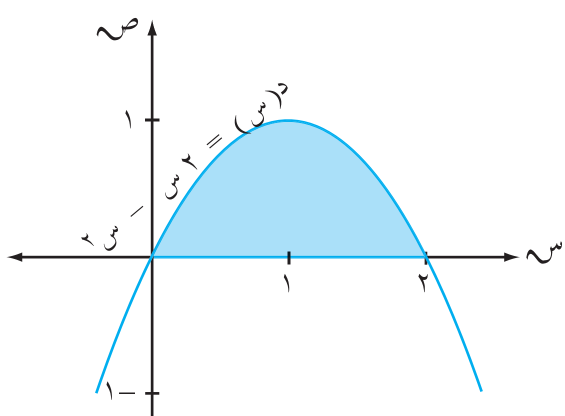
ما حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $\text{د}(\text{س}) = ٢\text{س} - \text{س}^{٢}$ ومحور السينات، دورة كاملة حول محور السينات .

الحـــل :

لإيجاد نقاط تقاطع الدالة د مع محور السينات نضع $٢\text{س} - \text{س}^{٢} = ٠$ $\Leftarrow$ $\text{س}(٢ - \text{س}) = ٠$

$\Leftarrow$ س = ٠ أو س = ٢ .

$\therefore$ حدود التكامل هي: أ = ٠ ، ب = ٢



شكل (٧ – ١١)

وبدوران المنطقة المحددة في الشكل (٧ – ١١) حول محور السينات دورة كاملة نجد أن :

$\because \text{ح} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{د}(\text{س}))^{٢} \, \text{ء س}$

$\therefore \text{ح} = \pi \int_{٠}^{٢} (٢\text{س} - \text{س}^{٢})^{٢} \, \text{ء س}$

$\Leftarrow \text{ح} = \pi \int_{٠}^{٢} (٤\text{س}^{٢} - ٤\text{س}^{٣} + \text{س}^{٤}) \, \text{ء س}$

$= \pi \left[\frac{٤}{٣}\text{س}^{٣} - \text{س}^{٤} + \frac{\text{س}^{٥}}{٥} \right]_{٠}^{٢} = \frac{١٦}{١٥} \pi$ وحدة مكعبة .

ملاحظة :

أما إذا كانت المنطقة المطلوب دورانها حول محور السينات تقع تحت منحنى الدالة د وفوق منحنى الدالة هـ في الفترة [أ ، ب] من محور السينات ، فإن حجم الجسم الناتج عن الدوران دورة كاملة تساوي :

$$ح = \pi \int_{أ}^{ب} [(د(س))^2 - (هـ(س))^2] \, ءس .$$

مثال (٧ - ٣٥)

احسب حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين القطع المكافئ ص = س^2 + ٢ والمستقيم : ص = س + ٨ حول محور السينات دورة كاملة .

الحل :

نقاط التقاطع بين المنحنى والمستقيم نحصل عليها من مساواة المعادلتين ، أي أن : س^2 + ٢ = س + ٨

$\Leftarrow$ س^2 - س - ٦ = ٠ $\Leftarrow$ س = ٣ ، س = -٢ ،

∴ حدود التكامل هي: أ = -٢ ، ب = ٣ ،

وبدوران المنطقة المحددة في الشكل (٧ - ١٢)

دورة كاملة حول محور السينات نجد أن :

$$\because \; ح = \pi \int_{أ}^{ب} [(د(س))^2 - (هـ(س))^2] \, ءس$$

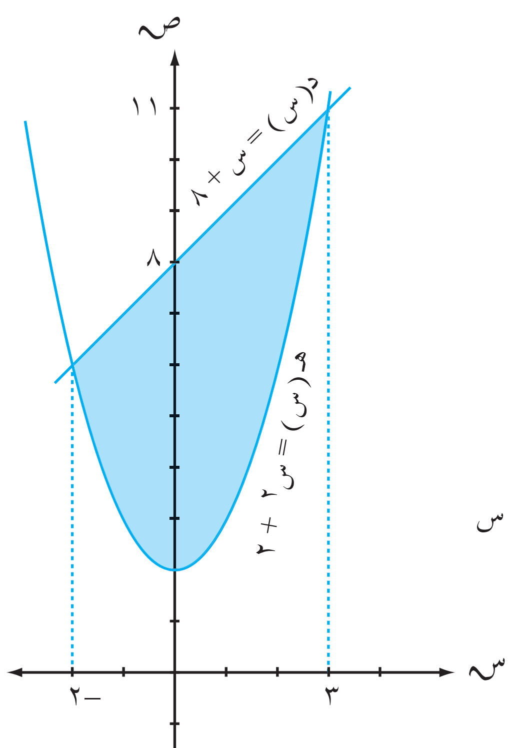
$$\therefore \; ح = \pi \int_{-٢}^{٣} [(س+٨)^2 - (س^2 + ٢)^2] \, ءس$$

$$= \pi \int_{-٢}^{٣} (س^2 + ١٦س + ٦٤ - س^4 - ٤س^2 - ٤) \, ءس$$

$$= \pi \int_{-٢}^{٣} (٦٠ + ١٦س - ٣س^2 - س^4) \, ءس$$

$$= \pi \left[٦٠س + ٨س^2 - س^3 - \frac{س^5}{٥} \right]_{-٢}^{٣}$$

= ٢٥ π وحدة مكعبة .



شكل (٧ - ١٢)

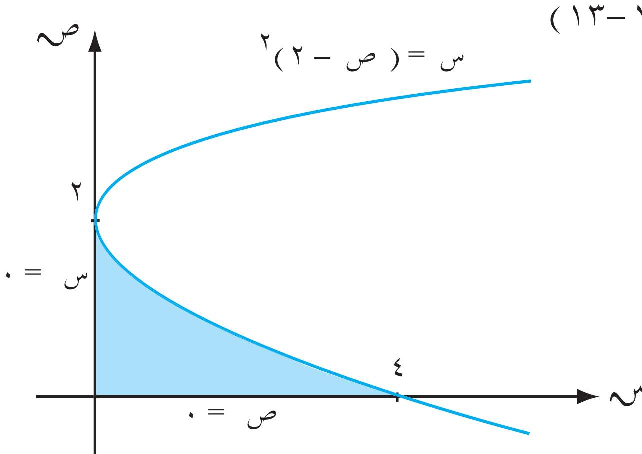
ثانياً : حجم الجسم الناتج عن دوران منطقة مستوية حول محور الصادات دورة كاملة :

إذا كانت المنطقة المستويه محصوره بين بيان الدالة تا والفترة [أ ، ب] من محور الصادات ، فإن الحجم الناتج من دوران هذه المنطقة دورة كاملة حول محور الصادات : $\text{ح} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{تا}(\text{ص}))^2 \, \text{ء ص}$.

مثال (٧ – ٣٦)

أوجد الحجم الدوراني للمنطقة المحدّدة بالقطع المكافىء $(\text{ص} - ٢)^2 = \text{س}$ ، والمحورين الإحداثيين دورة كاملة حول محور الصادات .

الحـــل : وبدوران المنطقة المحددة في الشكل (٧ – ١٣) حول محور الصادات دورة كاملة نجد أن :



شكل (٧ – ١٣)

$$\text{ح} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{تا}(\text{ص}))^2 \, \text{ء ص}$$

$$= \pi \int_{٠}^{٢} (\text{ص} - ٢)^4 \, \text{ء ص} \,.$$

$$= \frac{\pi(\text{ص} - ٢)^5}{٥} \Big|_{٠}^{٢} \,.$$

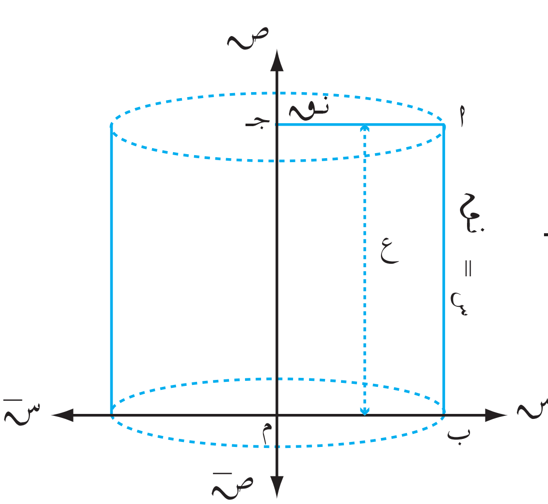
$$= \frac{\pi}{٥} \left[٠ - (-٣٢) \right] = \frac{٣٢}{٥} \pi \ \text{وحدة مكعبة} \,.$$

مثال (٧ – ٣٧)

أوجد حجم الاسطوانة الدائرية القائمة التي نصف قطر قاعدتها نق وارتفاعها ع

الحـــل :

نفرض المستطيل أ ب م جـ إذا دار المستطيل أ ب م جـ حول محور الصادات ، دورة كاملة حيث م (٠ ، ٠) نقطة الأصل ، فإنه سيشكل اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها $\overline{\text{أ جـ}}$ = نق وارتفاعها $\overline{\text{أ ب}}$ = ع ، كما في الشكل (٧ – ١٤).



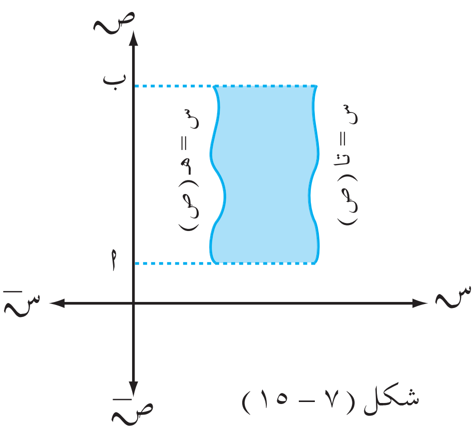
شكل (٧ – ١٤)

وبما أن معادلة المستقيم ا ب هي : س = نق ، والفترة [٠ ، ع] من محور الصادات .

$$\therefore \ \text{ح} = \pi \int_{0}^{\text{ع}} \text{نق}^{2} \ \text{ء ص} = \pi \left[\text{نق}^{2} \ \text{ص} \right]_{0}^{\text{ع}} = \pi \ \text{نق}^{2} \ \text{ع} \quad \text{وحدة مكعبة .}$$

ملاحظة :

إذا كانت المنطقة المطلوب دورانها حول محور الصادات محصورة بين بيان منحنيي الدالتين تا ، هـ في الفترة [ا ، ب] من محور الصادات [انظر الشكل (٧ – ١٥)] ؛ فإن حجم الجسم الناتج من الدوران دورة كاملة حول محور الصادات هو :



شكل (٧ – ١٥)

$$\text{ح} = \pi \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \left[\left(\text{تا} \left(\text{ص} \right) \right)^{2} - \left(\text{هـ} \left(\text{ص} \right) \right)^{2} \right] \text{ء ص} \ .$$

مثال (٧ – ٣٨)

أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين : ص = س² ، ص = ٢ س حول محور الصادات دورة كاملة .

الحـــل :

بما أن الدوران حول محور الصادات نجد أن : س = ± $\sqrt{\text{ص}}$ ، س = $\frac{1}{2}$ ص

ولايجاد نقاط التقاطع نضع $\frac{1}{2}$ ص = ± $\sqrt{\text{ص}}$ ⟸ $\frac{1}{4}$ ص² = ص ⟸ ص² – ٤ص = ٠

⟸ ص = ٠ ، أو ص = ٤

∴ حدود التكامل هي : ا = ٠ ، ب = ٤ ،

وبدوران المنطقة المحددة في الشكل (٧ – ١٦) دورة كاملة حول محور الصادات نجد أن :

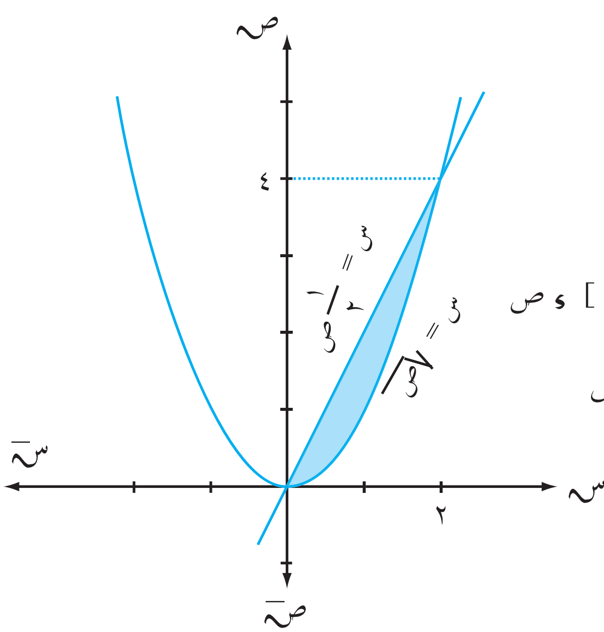
$$\because \ \text{ح} = \pi \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \left[\left(\text{تا} \left(\text{ص} \right) \right)^{2} - \left(\text{هـ} \left(\text{ص} \right) \right)^{2} \right] \text{ء ص}$$

$$\therefore \ \text{ح} = \pi \int_{0}^{4} \left[\left(\sqrt{\text{ص}} \right)^{2} - \left(\frac{1}{2} \text{ص} \right)^{2} \right] \text{ء ص}$$

$$= \pi \int_{0}^{4} \left[\text{ص} - \frac{1}{4} \text{ص}^{2} \right] \text{ء ص}$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} \text{ص}^{2} - \frac{1}{12} \text{ص}^{3} \right]_{0}^{4}$$

$$= \frac{8}{3} \pi \quad \text{وحدة مكعبة .}$$



شكل (٧ – ١٩)

تمارين ومسائل (٧-٦-٢)

[١] احسب الحجوم المتولدة من دوران المناطق المستوية المحددة بالمنحنيات والمستقيمات التالية حول محور السينات دورة كاملة :

أ) ص = س ، س = ٢ ، ص = ٠

ب) ص = ٢ س^{٢} ، س = ٠ ، س = ١ ، ص = ٠

جـ) ص = جتاس ، س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٢}$ ، ص = ٠

د) ص = هـ^{س} ، س = -١ ، س = ١ ، ص = ٠

هـ) د(س) = $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ ، س = ١ ، س = هـ ، ص = ٠

[٢] أوجد الحجوم الناتجة من دوران المناطق المستوية المحددة بالمنحنيات التالية حول محور الصادات دورة كاملة :

أ) س + ص = ٣ ، س = ٠ ، ص = ٠

ب) ص = هـ$^{س^{٢}}$ ، س = ٠ ، ص = هـ

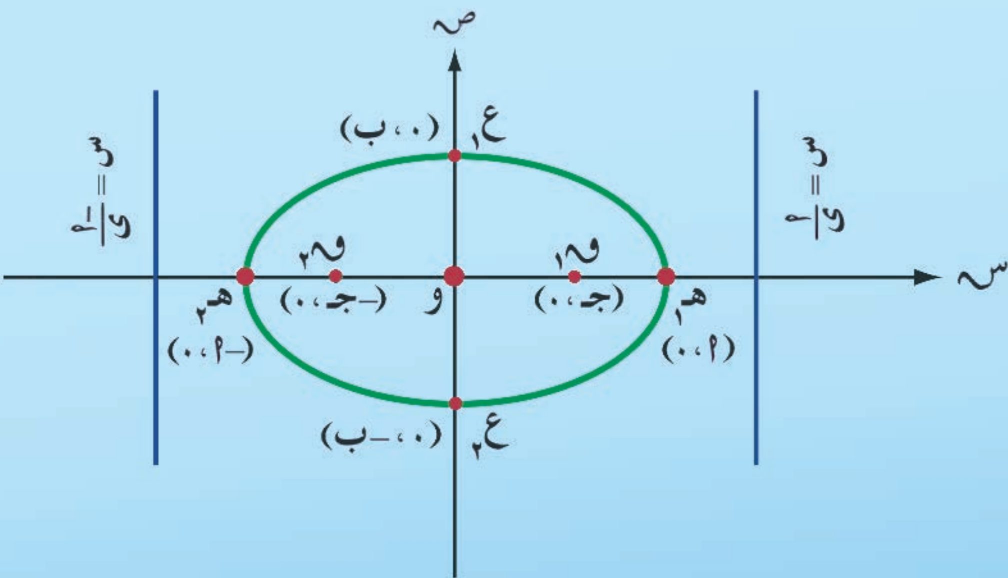
[٣] أثبت أن حجم الكرة التي نصف قطرها (نق) يساوي $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} .

[٤] أوجد حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين المنحنيين : د(س) = جتا س، هـ(س) = جاس ومحور الصادات ، دورة كاملة حول السينات .

[٥] ما حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة : د(س) = جا س ومحور السينات في الربع الأول دورة كاملة حول محور السينات.

[٦] أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ص = لو س والمستقيمات س = ٢ ، ص = ٠ دوره كاملة حول محور السينات .

تم بحمد الله


ص
س
ع١ (٠ ، ب)
ع٢ (٠ ، ـب)
هـ١ (أ ، ٠)
هـ٢ (ـأ ، ٠)
و١ (جـ ، ٠)
و٢ (ـجـ ، ٠)
و