الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

كتاب التمارين للصف الثاني الثانوي

القسم العلمي

التأليف

د . شكيب محمد باجرش / رئيساً

د . أمة الإله علي حمد الحوري
د . عوض حسين البكري
د . محمد رشاد الكوري
د . محمد حسن عبده المسوري
د . عبدالله سالم بن شحنة
د . عبدالرحمن محمد مرشد الجابري
د . علي شاهر القرشي
أ . مريم عبدالجبار سلمان

أ . سالمين محمد باسلوم (منسقاً)
د . محمد علي مرشد
أ . يحيى بكار مصفر
أ . عبدالباري طه حيدر
أ . نصر محمد بدر
أ . جميلة إبراهيم الرازحي
أ . عادل علي مقبل البنا
أ . عبدالرحمن عبدالله عثمان

أ . يحيى محمد الكنز

الإخراج الفني

الصف والتصميم : جلال سلطان علي إبراهيم .
علي عبد الله علي السلفي

أشرف على التصميم : حامد عبدالعالم الشيباني

١٤٣٥هـ / ٢٠١٤م

النشيد الوطني

رددي أيتها الدنيا نشيدي   ردديه وأعيدي وأعيدي
واذكري في فرحتي كل شهيدِ   وامنحيه حُللاً مِنْ ضوءِ عيدي

رددي أيتها الدنيا نشيدي
رددي أيتها الدنيا نشيدي

وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي   أنت عهدٌ عالقٌ في كل ذِمّة
رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُه من كل شمس   اُخْلُدِي خَافِقَةً في كل قِمّة
أمتي .. أمتي .. اِمنحيني البأس يا مصدر بأسي   واذخُريني لَكِ يا أكرمَ أمة

عشتُ إيماني وحبّي أُمميًا
ومسيري فوق دربي عربيا
وسيبقى نبضُ قلبي يمنيا
لن ترى الدنيا على أرضي وصيا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

د. عبدالله عبده الحامدي.	أ/ علي حسين الحيمي.
د/ صالح ناصر الصوفي.	د/ أحمد علي المعمري.
أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.	أ.د/ صالح عوض عرم.
أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.	د/ إبراهيم محمد الحوثي.
د/ عبدالله علي أبو حورية.	د/ شكيب محمد باجرش.
د/ عبدالله لملس.	أ.د/ داوود عبدالملك الحدابي.
أ/ منصور علي مقبل.	أ/ محمد هادي طواف.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.	أ.د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
أ.د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.	أ/ محمد عبدالله زبارة.
أ.د/ محمد حاتم المخلافي.	أ/ عبدالله علي إسماعيل.

د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

قررت اللجنة العليا للمناهج طباعة هذا الكتاب .

بسم الله الرحمن الرحيم

تقــديــم :

في إطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية.

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات.

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها: الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبمايتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي.

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها.

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدروسة لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية.

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول
وزير التربية والتعليم
رئيس اللجنة العليا للمناهج

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم المرسلين وآله وصحبه وسلم .

إن إعادة النظر في مناهج الرياضيات وكتبها المدرسية أمر ضروري تحتمه مواكبة التطور العلمي وتحديث تربويات الرياضيات إضافة إلى مسايرة التغيرات الاجتماعية .

واستجابة لذلك يأتي هذا الكتاب « كتاب التمارين للصف الثاني الثانوي القسم العلمي » كحلقة ضمن سلسلة متكاملة من التطوير على مستوى المرحلتين : الأساسية (١- ٩) والثانوية من (الأول الثانوي إلى الثالث الثانوي) .

لقد عُرضت التمارين في تماسك وتكامل وفق تسلسل علمي ونفسي تربوي ومراعاة للفروق الفردية تم تقديم المادة الدراسية في الكتاب المدرسي بأسلوب سلس واضح لاغموض فيه ولاتعقيد ، حيث أوردنا قدراً كافياً من الأمثلة بعد العرض النظري وأتبعنا ذلك بعدد من التمارين والمسائل آملين إتاحة فرص كثيرة للتعامل مع المادة ليكون الطالب محور التعلم معتمداً على النشاط ويكون النشاط بدافع ذاتي محققاً بذلك الأهداف الوجدانية وبعد ذلك جاءنا كتاب التمارين ليعطي المزيد من التمارين ويفي بالمزيد من الأنشطة حتى يمكن تحقيق أهداف المادة بشكل جيد .

ومقارنة بالكتب السابقة فإن كتاب التمارين المرافق للكتاب المدرسي ، ودليل المعلم يهتم اهتماماً كبيراً بالمفاهيم الأساسية إلى جانب تقديمه معارف سليمة ومراعاته انسجام الموضوعات مع عمليات التعلم الطبيعي للطلبة كما تحفز المدرسين على ابتكار أساليب تدريس جديدة بما يضمن لطلبتهم تعلماً فاعلاً .

ومن أهم أهداف وزارة التربية والتعليم أن يظل التطوير في نمو وتطور مستمرين، بمتابعة كل جديد في تدريس الرياضيات وهذا لايتأتى إلا بالاستفادة من واقع التطبيق في الميدان التدريسي . فإذا راعينا كل المبادئ المذكورة أعلاه بقدر ما وفقنا المولى عز وجل بإعداد هذه المواد التربوية في ضوء استراتيجيات تهدف إلى تقديم الأجود ، مادة وطريقة . . فإننا ننظر بشوق بالغ أن يوافينا كافة ذوي العلاقة بملاحظاتهم بغية الاستفادة منها .

نسأل المولى العلي القدير أن نكون قد وفقنا في كل ما نصبو إليه فهو ولي التوفيق والهادي إلى سواء السبيل .

المؤلفون

المحتـــويـــات

البند (١ – ٢) الحلقة :

[١] لتكن س = { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } ، ولنعرِّف على س العمليتين الثنائيتين ✻ ، ○ على النحو التالي :

س ✻ ص = باقي قسمة (س + ص) على ١٠

، س ○ ص = باقي قسمة (س ص) على ١٠

أ) كوّن جدولين مختلفين لهاتين العمليتين .

ب) تحقق من أن (س ، ✻ ، ○) حلقة تبديلية ذات عنصر محايد .

[٢] لتكن (س ، + ، ٠) حلقة غير تبديلية ولنعرِّف على س عملية جديدة ○ على النحو التالي :

أ) ا ○ ب = ا ب – ب ا ∀ ا ، ب ∈ س .

برهن أن (س ، + ، ○) حلقية تبديلية .

البند (١ – ٣) الحقل :

[٣] لنعرف على ن العمليتين الثنائيتين ✻ ، ○ على النحو التالي :

س ✻ ص = س + ص – ١

، س ○ ص = س ص – س – ص + ٢

برهن أن النظام (ن ، ✻ ، ○) حقل .

[٤] إِذا علمت أن ($ص_{٧}$ ، ⊕ ، ⊙) حلقة تبديلية ذات عنصر محايد .

أ) تحقق من أن ($ص_{٧}$ ، ⊕ ، ⊙) حقل .

ب) حل المعادلة : ٣ ⊙ س ⊕ ١ = ٤ في هذا الحقل .

البند (١ – ٤) حقل الأعداد الحقيقية :

[٥] استخدم خواص حقل الأعداد الحقيقية لحل المتراجحات التالية في ح :

أ) –٦ س – ٢ > ٥ .

ب) $٤ < ٢ س - ٣ \leq ١٠$.

جـ) $(س - ١) (س + \frac{١}{٢}) \leq ٠$.

د) $\frac{س}{(س - ١) (س + ٢)} < ٠$.

[٦] أوجد مجموعة الحل لكل من أزواج المتراجحات الآتية ، ومثل الحل على خط الأعداد :

أ) $س - ٠,٣ < ١,٥$ أو $س < -٠,٨$.

ب) $٣ س - ٥ \geq ٢$ و $س \leq ١$.

جـ) $٢ س - \frac{١}{٣} < \frac{٢}{٣}$ أو $س > ٠$.

تمارين عامه ومسائل

[١] من المعلوم أن كلَّ حقلٍ هو حلقة تامة ، وكلَّ حلقةٍ تامة هي حلقة إبدالية . لكن عكس أي من العبارتين ليس بالضرورة يكون صحيحاً . بين ذلك باعطاء :

أ) مثال لحلقة تامة لكنها ليست حقلاً .

ب) مثال لحلقة إبدالية لكنها ليست تامة .

جـ) مثال لحلقة تامة منتهية . هل هي حقل ؟

[٢] ليكن (ح ، ٭ ، ×) حقـلاً ، حيث × عملية الضـرب على الأعـداد الحقيقـيـة والعملية ٭ معرفة على ح كما يلي :

$س ٭ ص = س + ص + ٣$ $\forall$ س ، ص $\in$ ح .

حل المعادلة $٢ س ٭ ٣ = ٦$ في هذا الحقل .

[٣] لتكن (سہ ، + ، ○) حلقة ذات عنصر محايد . فبرهن أن :

أ) العنصر المحايد بالنسبة للعملية ○ وحيد .

ب) إذا كان للعنصر ٫ نظير بالنسبة للعملية ○ فإن $٫^{-1}$ وحيد .

جـ) إذا وُجد $٫^{-1}$ فكذلك $(٫')^{-1}$ ويكون $(٫')^{-1} = (٫^{-1})'$

حيث ٫' نظير ٫ بالنسبة للعملية ✻ .

[٤] برهن أنه إذا كانت (سـ ، ✻ ، ○) حلقة تبديلية فإن :

(٫ ✻ ب) ○ (٫ ✻ ب) = (٫ ○ ٫) ✻ (ب ○ ب)' .

(ملاحظة : ابدأ بالحالة الخاصة عندما تكون العمليتان هما + ، × المعرفتين على الأعداد ، ثم عمم النتيجة لأي عمليتين ثنائيتين) .

[٥] تعلم أنه إذا كانت (سـ ، ✻ ، ○) حلقة تامة فإن قانوني الحذف يتحققان ، ولكن هذا لايقتضي أن يكون لكل معادلة من الشكل التالي :

٫ ○ س = ب حلاً في تلك الحلقة . اعط مثال لحلقة تامة بحيث توضح ما سبق.

اختبار الوحدة

[١] كل من الأنظمة التالية ليس حلقة . اعط سبباً واحداً على الأقل لكل حالة :

أ) (ط ، + ، ×) . ب) (صـ* ، + ، ×) .

جـ) (د ، × ، +) .

[٢] بين أياً من الأنظمة التالية حقل ، وأياً منها حلقة وليس حقلاً :

أ) (صـ ، + ، ×) . ب) (د ، + ، ×) .

جـ) ($صـ_٤$ ، ⊕ ، ⊙) . د) ($صـ_٥$ ، ⊕ ، ⊙) .

[٣] بين نوع النظام الرياضي (حلقة ، حلقة تامة ، حقل) الذي تتحقق فيــه كل من الخواص الأتية :

أ) للمعادلة ٫ ○ س ✻ ب = جـ فيه حلٌ وحيدٌ ، حيث ٫ ≠ و .

ب) س ○ ص = س ○ ع ⟸ ص = ع

جـ) س ○ ص = و ⟸ س = و أو ص = و .

د) لكل عنصر ٫ ∈ سـ ، ٫ ≠ و نظير بالنسبة للعملية ○ . حيث و هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية ○ **في النظام** (سـ، ✻ ، ○)

[٤] حل المعادلة ٢ ○ س ＊ ٣ = ٤ في كل من الأنظمةالرياضية الآتية :

أ) (ح ، + ، ×) .

ب) ($ص_{٥}$ ، ⊕ ، ⊙) .

جـ) ($ص_{٦}$ ، ⊕ ، ⊙) .

[٥] اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

أ) مجموعة حل المتراجحة ٢ س + ١ ≥ ٢ هي :

$[\frac{٣}{٢} ، \infty[$ ، $]-\infty ، \frac{١}{٢}]$ ، $[\frac{١}{٢} ، \infty[$.

ب) مجموعة حل المتراجحة ١ − ٢ س > ٣ هي :

$]-\infty ، ١[$ ، $]٢ ، \infty[$ ، $]-\infty ، ٢[$.

جـ) مجموعة حل المتراجحة $\frac{١}{س} > ٢$ ، س ≠ ٠ هي :

$]٠ ، \frac{١}{٢}[$ ، $]\frac{١}{٢} ، \infty[$ ، $]-\infty ، \frac{١}{٢}[$.

الوحدة الثانية الدوال الحقيقية

(٢ : ١) الدوال الحقيقية :

[١] أوجد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية :

أ) $د(س) = \frac{س^٢ + ١}{س^٤ + ١}$.

ب) $د(س) = \sqrt{س} + \sqrt{س - ٢}$.

جـ) $د(س) = |س| + |س - ٢|$.

د) $د(س) = \sqrt{س - ١} \quad \sqrt{٤ - س}$.

هـ) $د(س) = \frac{١}{س^٢ - ٣٦}$.

[٢] ليكن $د(س) = \sqrt{س - ١}$ ، $هـ(س) = \frac{١}{س}$ أوجد مجموعة تعريف الدوال التالية :

أ) $د(س) + هـ(س)$.

ب) $د(س) - هـ(س)$.

جـ) $د(س) \times هـ(س)$.

د) $\frac{د(س)}{هـ(س)}$.

هـ) $(هـ \circ و)(س)$.

[٣] أوجد مدى كل من الدوال التالية :

أ) $د(س) = س^٢ + ١$.

ب) $د(س) = \frac{٢س + ١}{س - ١}$.

جـ) $د(س) = س^{٢} - ٤ س + ١١$.

د) $د(س) = \sqrt{س}$.

هـ) $د(س) = \frac{١}{٢ - جتا ٣ س}$.

[٤] أوجد مجموعة التعريف والمدى لكل من الدوال التالية :

أ) $د(س) = \frac{١}{س}$.

ب) $د(س) = \frac{س}{٥ س + ٣}$.

جـ) $د(س) = ٤ + \sqrt{٢ س - ٥}$.

د) $د(س) = \sqrt{س - ٣}$.

هـ) $د(س) = \begin{cases} ٣ ، & س < ٢ \\ -١ ، & س > ٢ \end{cases}$

(٢ : ٢) بعض أنواع الدوال وتمثيلها :

[٥] أعد تعريف كل من الدوال التالية ومثّلها :

أ) $د(س) = |٥ س - ٢|$.

ب) $د(س) = |س + ٥| - ١٠$.

جـ) $د(س) = \left|\frac{س}{٤}\right| - ٣$.

د) $د(س) = |س^{٢} - ١٠٠|$.

هـ) $د(س) = |س^{٢} - ٤ س - ٥|$.

[٦] أوجد مجموعة حل المعادلات التالية :

أ) $|س - ٥| - ٧ = ٠$.   ب) $٣ \sqrt{س^{٢}} - ٥ = ٠$.

جـ) $|٢ س - ٥| + ٢٥ = ٠$ د) $|٥ - ٤ س| = ١٦$

هـ) $[٣ س + ٢] = ٠$ و) $[٥ - ٤ س] = -٣$

ز) $[٤ س - ١] - ٩ = ٠$ ح) $\frac{[س - ٥]}{[س + ٣]} = \frac{٤}{٥}$

[٧] بيّن نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

أ) $د(س) = س^{٣} - ١١ س$.

ب) $د(س) = ٣ س^{٤} - ٥ س^{٢} + ١١$.

جـ) $د(س) = \frac{س^{٢}}{٢ س^{٢} + ١}$.

د) $د(س) = س\,(س^{٣} - \frac{١}{س})$ ، ٠.

هـ) $د(س) =$ جا ٣ س جتا س ، .

و) $د(س) = \sqrt{س^{٢} + ٥}$.

ز) $د(س) \quad س\,|س|$.

ح) $د(س) = \begin{cases} س + ٢ & ، \quad س \leq -٢ \\ س - ٢ & ، \quad س > -٢ \end{cases}$

ط) $د(س) = (\frac{س}{٣} + \frac{٣}{س})^{٣}$.

ي) $د(س) = س^{٢} +$ ظا س .

[٨] أوجد قيمة كل مما يأتي عند س = ٤ .

أ) $[س]$.   ب) $[\frac{١}{٤} س]$.   جـ) $[٥ - \frac{١}{٢} س]$.

د) $[٥ - ٣ س] - س$.   هـ) $[س - ٤] + ٣$.

[٩] إذا كانت $[س] \leq س \leq [س] + ١$ تحقق بمثال عددي من صحة ذلك .

[١٠] أوجد قيمة هـ إذا كانت هـ عدداً صحيحاً في كل مما يأتي :

أ) $[س + هـ] - [س] = ٦$.

ب) $[س + هـ] - [س - هـ] = ٨$.

[١١] مثّل الدوال التالية بيانيا :

أ) $د(س) = -[س]$ ، $-٣ \leq س < ٠$.

ب) $د(س) = [س + ٢]$ ، $-٢ \leq س \leq ٠$.

جـ) $د(س) = |٣ - س|$.

د) $د(س) = \begin{cases} ١ & ، س \geq ٤ \\ \frac{١}{\sqrt{س}} & ، ٠ < س < ٤ \end{cases}$

هـ) $د(س) = \sqrt{٦ - س}$.

و) $د(س) = ٢س^٢ - ٤$.

ز) $د(س) = \begin{cases} [س] & ، -١ < س < ٢ \\ س + ١ & ، ٢ < س < ٤ \end{cases}$.

(٢ : ٣) اطراد الدوال :

[١٢] ابحث اطراد كل من الدوال التالية :

أ) $د(س) = ٣س + ٥$.

ب) $د(س) = ٩$

جـ) $د(س) = ٣ - س$.

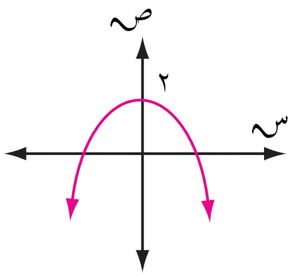
د) $د(س) = ٢س^٢ + س + ١$.

هـ) $د(س) = |-س^٢ + ٣|$.

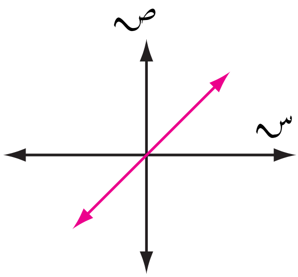
و) $د(س) = ٩ - \frac{١}{\sqrt{س + ٣}}$.

ز) $د(س) = جتا س$ ، $س \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$.

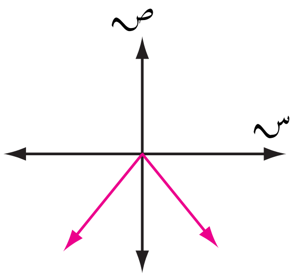
[١٣] ابحث اطراد الدوال المرسومة في الشكل (٢– ١ أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و) ، ثم أوجد مجموعة تعريفها ومداها :



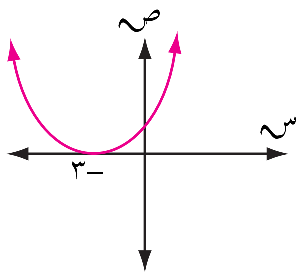
شكل (٢ – ١ أ)



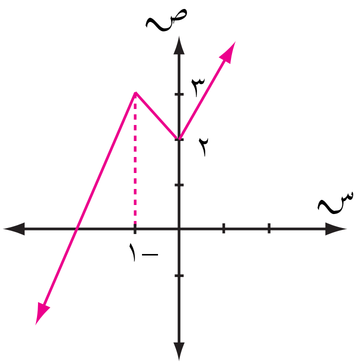
شكل (٢ – ١ ب)



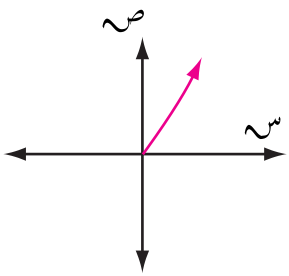
شكل (٢ – ١ جـ)



شكل (٢ – ١د)



شكل (٢ – ١هـ)



شكل (٢ – ١و)

[١٤] مثّل الدوال التالية ومن الرسم أوجد المدى ، وابحث اطراد كل منها ، وبيّن القيم العظمى والصغرى – إن وجدت – :

أ) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٥$

ب) $\text{د}(\text{س}) = ١ - (\text{س} + ٢)^{٢}$.

جـ) $\text{د}(\text{س}) = |\text{س}|\,(\text{س} - ١)$.

د) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}\,|\text{س} - ١| + \text{س} - ١$.

هـ) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}\,|\text{س} - ٤|}{\text{س} + ٢} + ١$.

و) $\text{د}(\text{س}) = ٢ + \text{جاس}$.

[١٥] أثبت أن الدوال التالية محدودة ، ثم أوجد حديها :

أ) د (س) = ٢س^{٢} – ٧ س + ١ في الفترة [–١ ، ٢] .

ب) د (س) = س^{٢} + ٤ س + ٩ في الفترة [–٢ ، ٢] .

جـ) د (س) = $\frac{٣س^{٢} - ٥}{٢س^{٢} + ٧}$.

د) د (س) = (٢ – س)^{٢} – ١ في الفترة [١ ، ٢] .

هـ) د (س) = $\frac{س^{٢}}{س^{٢} + ٤}$.

تمارين ومسائل عامة

[١] أوجد مجموعة التعريف والمدى لكل من الدوال التالية :

■١ د (س) = ٦ .

■٢ د (س) = $\frac{٢}{٢ س - ١}$.

■٣ د (س) = $\frac{٣}{س - ٣}$.

■٤ د (س) = $\frac{٤}{س^{٢} - ١}$.

■٥ د (س) = [س] – ١ .

■٦ د (س) = س – [س] .

■٧ د (س) = $|س - ٨|$.

■٨ د (س) = $\frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} + ٢ س + ٥}$.

■٩ د (س) = $\begin{cases} \frac{|س|}{س} & ، س \neq ٠ \\ ٠ & ، س = ٠ \end{cases}$.

■١٠ د (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$.

■١١ د (س) = $\frac{١}{|س| + ٣}$.

■١٢ د (س) = $\sqrt{\frac{س}{س + ٧}}$.

■١٣ د (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٥ س + ٤}$.

■١٤ $د(س) = ١ - |س|$.　　■١٥ $د(س) = \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س - ٣}}$.

■١٦ $د(س) = \sqrt{|س - ١| - س}$.

[٢] بيّن نوع الدوال التالية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

■١ $د(س) = س^٤ - ٢ س^٢ + ١$.　　■٢ $د(س) = \frac{س^٤ + ٣}{٤ س - س^٣}$.

■٣ $د(س) = \sqrt[٣]{س^٣ - ٨ س}$.　　■٤ $د(س) = س (س - \frac{١}{س})^٣$.

■٥ $د(س) = \frac{س^٢ + ١}{س^٣ - ٢٥ س}$.

■٦ $د(س) = (س + ١)^٢ - (س - ١)^٢$.

■٧ $د(س) = \frac{س^٢}{جتا س}$.

■٨ $د(س) = س^٣ جا^٢ س$.

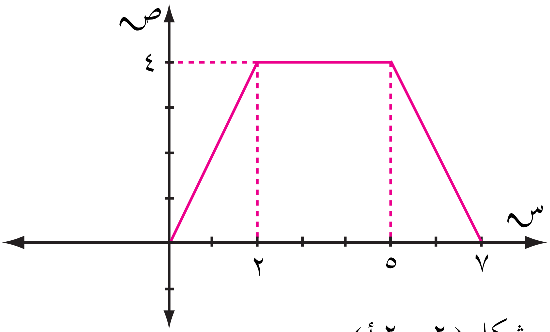
■٩ $د(س) = \frac{١ + س^٢ \sqrt{س^٢ + ١}}{س^٣}$.

■١٠ $د(س) = \begin{cases} ٢ س ، & س \geq ٠ \\ -٢ س ، & س < ٠ \end{cases}$

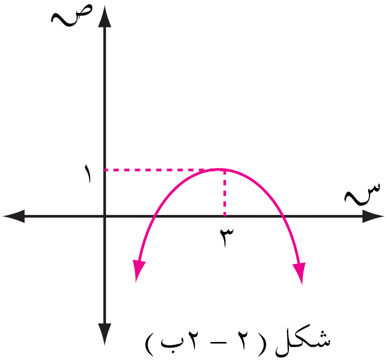
■١١ $د(س) = \begin{cases} \frac{١}{س - ١} ، & س > ١ \\ \frac{١}{١ - س} ، & س < ١ \end{cases}$.

■١٢ $د(س) = (س + ٢)^٢$.

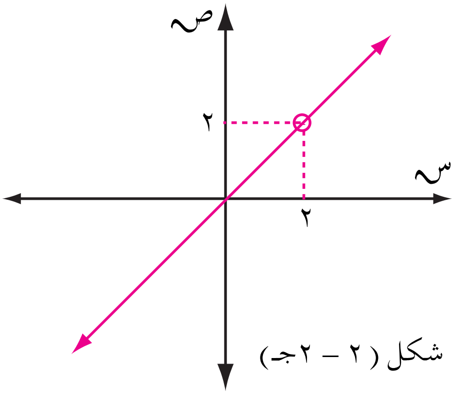
[٣] بيّن نوع الدوال التالية المرسومة في الشكل(٢ –٢ أ ، ب ، جـ ،د، هـ ، و)من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك،وبينّ اطرادها،ثم أوجد مجموعة تعريفها ومداها :



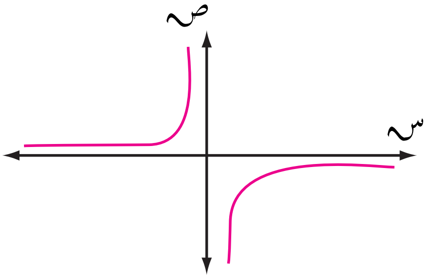
شكل (٢ – ٢ أ)



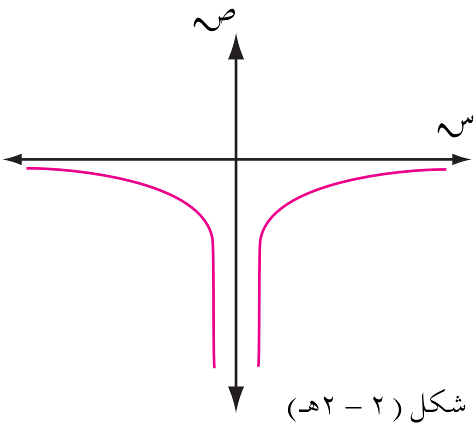
شكل (٢ – ٢ب)



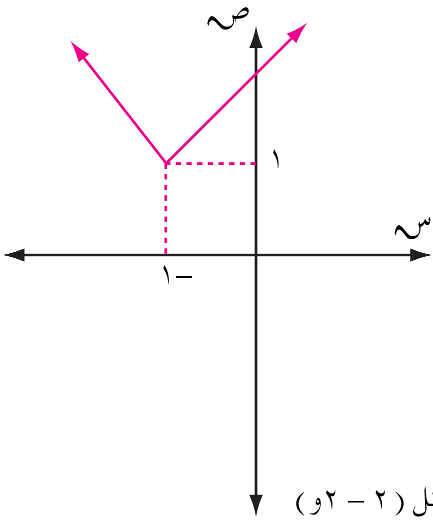
شكل (٢ – ٢جـ)



شكل (٢ – ٢د)



شكل (٢ – ٢هـ)



شكل (٢ – ٢و)

[٤] أعد تعريف كل من الدوال الآتية ، وعيّن مداها :

أ) $د(س) = |س + ٣|$.　　　ب) $د(س) = |س - ٤| - ٣$.

جـ) $د(س) = |٢س| - \frac{١}{٢}$.　　　د) $د(س) = |س^{٢} - \frac{٩}{١٦}|$.

هـ) $د(س) = |س - ٥| + ٢|س + ٢| + س$.

[٥] أوجد مجموعة الحل للمعادلات التالية :

أ) $|س| - ١٩ = ٠$　　　ب) $|٢س - ٣| + ٢ = ٥$

جـ) $|س - ٢| - س + ١ = ٠$　　　د) $٤ - ٢|س - ١| = ٠$

هـ) $٣ - ٣|س - ١| + ٢س = ٠$　　　و) $س - [س] = ٠$

ز) $\frac{[س - ٣]}{[س - ٥]} = \frac{١}{٢}$

[٦] مثّل الدوال التالية ومن الرسم أوجد مجموعة التعريف، والمدى وبين اطراد كل منها وكذلك إن كانت زوجية أو فردية أو غير ذلك :

أ) $د(س) = |س| - ١$.　　　ب) $د(س) = ٣ - ٢|س|$.

جـ) $د(س) = |٢س - ١| - ٣ + ٢س$.

د) $د(س) = [س - ٢]$ ، $٤ \leq س < ٦$.

هـ) $د(س) = ١٢س - ٤س^{٢} - ٥$.

و) $د(س) = \frac{|س^{٣}|}{س} + ٤س$.

ز) $د(س) = س^{٣} + ٤$.

ح) $د(س) = -(س + ٤)^{٣}$.

ط) $د(س) = \begin{cases} -٢ - س ، & س \geq ٠ \\ ٢ + س ، & س < ٠ \end{cases}$.

[٧] ابحث الدوال التالية إن كانت محدودة أم لا .

أ) د (س) = ٥ − ٢ س في الفترة [−٥ ، −٣] .

ب) د (س) = (س + ٢)^{٢} + ٥ في الفترة [−٢ ، ٢] .

جـ) د (س) = (س − ٣)^{٢} − ٢ في الفترة [٣ ، ٥] .

د) د (س) = $\frac{٥}{١ + س}$ جتا س ، س $\geq$ ٠ .

هـ) د (س) = $\frac{٢}{س + ٤}$ جا س ، س > ٠ .

و) د (س) = $\frac{٤}{\sqrt{(س + ٢)^{٢}}}$.

ز) د (س) = س^{٢} − ١ .

ح) د (س) = $\frac{٥}{س^{٢} + ٥}$.

[٨] ارسم الدالة د (س) = ظا س ، ثم بيّن أنها دورية ، وعيّن دورها .

اختبار الوحدة

[١] أ) عرّف الدالة الدورية .

ب) أوجد مجموعة تعريف ومدى الدالة : د (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٢٥}$.

[٢] مثّل بيانياً الدالة : د (س) = ٢س^{٢} − ٢ س ومن الرسم بيّن اطرادها ، وأوجد القيم العظمى والصغرى – إن وجدت – .

[٣] بيّن نوع الدالة التالية : د (س) = | س | + ٣ . من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

[٤] أثبت أن الدالة د(س) = جا ٢ س دورية ، ثم أوجد دورها .

[٥] أثبت أن الدالة د (س) = $\frac{س}{٢س^{٢} + ١}$ محددة ، وأوجد حديها .

(٣ – ١) المتتاليات :

[١] بين أيّا من الدوال الآتية تمثل متتالية :

أ) ح (د) = $(-١)^{٢د}$ $د^٢$ ، د ∈ $ط^*$.

ب) د (د) = ٣$د^٢$ + ١ ، د ∈ ص .

جـ) هـ (د) = $\frac{د}{٣د^٢ + ٢د + ١}$ ، د ∈ ط .

د) ل (د) = $\frac{١}{د + ١}$ ، د ∈ ح .

هـ) ك(د) = جا π د ، د ∈ $ط^*$.

و) ع (د) = ٣ جتا $\frac{π}{د}$ ، د ∈ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } .

[٢] اكتب الخمسة الحدود الأولى من المتتاليات التي حدها العام مُعطى ثم مثِّلها بيانياً :

أ) $ح_د$ = ٥ د + ٢ .

ب) $ح_د$ = $(-١)^د$ (د + ٧) .

جـ) $ح_د$ = $\frac{٢}{٣د}$.

د) $ح_د$ = $\frac{٥}{٢د + ١}$.

هـ) $ح_د$ = $\frac{(٢)^د}{٥د}$.

و) $ح_د$ = $\frac{د + ٥}{٣د - ٤}$.

ز) $ح_د$ = $\frac{(-١)^د (٦د - ٥)}{د}$.

[٣] أوجد الحد المشار إليه أمام كل متتالية :

أ) ⟨ $٣^د$ + ٥ ⟩ ، $ح_٩$.

ب) ⟨ ٧ – ٢د ⟩ ، $ح_{١١}$.

جـ) $\left\langle \frac{\text{١}}{\text{٣}\,\text{ن}} \right\rangle$ ، $\text{ح}_{\text{٣٧}}$.

د) $\left\langle \frac{\text{٤}\,\text{ن} - \text{٣}}{\text{٢}\,\text{ن} + \text{٧}} \right\rangle$ ، $\text{ح}_{\text{١٧}}$.

[٤] اكتب الستة الحدود الأولى للمتتاليات المعطاة بالصيغ :

أ) $\text{ح}_{\text{١}} = \text{٤}$ ، $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{٣}\,\text{ح}_{\text{ن}-\text{١}} + \text{٤}$.

ب) $\text{ح}_{\text{١}} = \text{١}$ ، $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ح}_{\text{ن}-\text{١}} + \text{٣}$.

جـ) $\text{ح}_{\text{١}} = \text{٧}$ ، $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{٤}\,\text{ح}_{\text{ن}-\text{١}} + \text{١}$.

د) $\text{ح}_{\text{١}} = \text{٠}$ ، $\text{ح}_{\text{ن}+\text{١}} = \frac{\text{١}}{\text{١} + \text{ح}_{\text{١}}}$.

هـ) $\text{ح}_{\text{١}} = \text{١}$ ، $\text{ح}_{\text{ن}+\text{١}} = (\text{ن} - \text{١})\,\text{ح}_{\text{ن}}$.

و) $\text{ح}_{\text{١}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ ، $\text{ح}_{\text{ن}+\text{١}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}\,\text{ح}_{\text{ن}}$.

[٥] اكتب الحد العام لكل من المتتاليات التالية :

أ) $\langle \text{٢} ، -\text{٢} ، \text{٢} ، -\text{٢} ، \ldots \rangle$

ب) $\langle \text{١} ، \text{٥} ، \text{٩} ، \text{١٣} ، \ldots \rangle$

جـ) $\left\langle \frac{\text{١}}{\text{٣}} ، \frac{\text{١}}{\text{٤}} ، \frac{\text{١}}{\text{٥}} ، \ldots \right\rangle$

د) $\langle \text{٤} ، \text{٤} ، \text{٤} ، \ldots \rangle$

هـ) $\left\langle -\text{١} ، \frac{\text{١}}{\text{٢}} ، -\frac{\text{١}}{\text{٣}} ، \frac{\text{١}}{\text{٤}} ، -\frac{\text{١}}{\text{٥}} ، \ldots \right\rangle$

و) $\langle -\text{٢} ، \text{١} ، \text{٦} ، \text{١٣} ، \text{٢٢} ، \ldots \rangle$

[٦] اكتب المتتالية ⟨ $ح_ن$ ⟩ حيث :

$$ح_ن = \begin{cases} \dfrac{ن - ١}{ن + ١} & \text{إذا كان } ن \text{ عدد فردي } \leq ٧ \\ -١ & \text{إذا كان } ن \text{ عدد زوجي } \leq ٨ \end{cases}$$

[٧] حدد أيّا من المتتاليات الآتية تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك :

أ) ⟨ $١ + \dfrac{١}{\sqrt{ن}}$ ⟩ .   ب) ⟨ $٣^{ن} - ٣ ن$ ⟩ .

جـ) ⟨ $١٠ + \dfrac{١}{٢ ن}$ ⟩ .   د) ⟨ $٧^{ن}$ ⟩ .

هـ) ⟨ جا $\dfrac{ن}{٢} \pi$ ⟩ .   و) ⟨ $\dfrac{١}{٢ ن}$ ⟩ .

ز) ⟨ $\dfrac{٣ ن + ٢}{ن}$ ⟩ .   ي) ⟨ $٣^{ن - ٢}$ ⟩ .

[٨] اكتب حدود كل من التسلسلات الآتية ، ثم أوجد مجموعها :

أ) $\sum_{ن = ١}^{٣} (٥ ن^{٢} + ١)$.   ب) $\sum_{ك = ١}^{٥} \dfrac{١}{٣} ك^{٢}$.

جـ) $\sum_{ن = ١}^{٣} (٢ ن^{٢} + ٣ ن + ١)$.   د) $\sum_{ك = ١}^{٤} - ٥ ك$.

(٣ – ٢) المتتالية الحسابية :

[٩] أيٌّ من المتتاليات الآتية تكوّن متتالية حسابية ؟

أ) ⟨ $ح_ن$ ⟩ حيث $ح_ن = ٣ ن - ٢$

ب) ⟨ $هـ_ن$ ⟩ حيث $هـ_ن = ٢ + \dfrac{٣}{ن}$

جـ) ⟨ $د_ن$ ⟩ حيث $د_ن = ٥ - ٢ ن (-١)^{ن} ن$.

د) ⟨ $ك_ن$ ⟩ حيث $ك_ن = ١١,١ - ٠,٤ ن$.

[١٠] أوجد ما يأتي :

أ) عدد حدود المتالية : ⟨ ١١ ، ١٣ ، ١٥ ، ... ، ١٩٥ ⟩ .

ب) رتبة الحد الذي قيمته ٦ في المتتالية : ⟨ ٨٢ ، ٧٨ ، ٧٤ ، ... ⟩ .

جـ) العشرة الحدود الأولى للمتتالية : ⟨ $\frac{ن^{٢}}{ن^{٢} + ١}$ ⟩ .

د) الستة الحدود الأولى للمتتالية : ⟨ $(-١)^{ن} \times (ن)^{-١}$ ⟩ .

هـ) العشرة الحدود الأولى من المتتالية التي فيها :

$ح_{٢} = ١$ ، $ح_{ن+١} = ح_{ن} + ن$.

و) الحد الخامس عشر من المتتالية : ⟨ ٨٧ ، ٨٠ ، ٧٣ ، ... ⟩ .

[١١] أوجد ما يأتي :

أ) متتالية حسابية حدها الثالث ١٦ ، مجموع حدّيها الرابع والتاسع ١٠٠ .

ب) سبعة أوساط حسابية بين ٣ ، ١٩ .

جـ) المتتالية الحسابية التي حدها السادس = ١٥ وأساسها = −٥ .

د) المتتالية الحسابية التي حدها الخامس = ١٢ وحدها السادس = ١٩ .

هـ) رتبة أول حد سالب من المتتالية : ⟨ ١٣٥ ، ١٢٨ ، ١٢١ ، ... ⟩ .

و) الحد السادس من نهاية المتتالية : ⟨ ٧ ، ٩ ، ١١ ، ... ، ٥ ⟩ .

[١٢] أ) إذا كانت س وسطاً حسابياً بين −٦ ، −١٢ ، وكانت ص وسطاً حسابياً بَيْن ٥ ، ١٣ ، وكانت ع هي الحد السابع من المتتالية ⟨ ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ... ⟩ فبيِّن أن س ، ص ، ع تكوّن ثلاثة حدود متتالية من متتالية حسابية .

[١٣] إذا كانت ⟨ $ح_{ن}$ ⟩ متتالية حسابية : أثبت أن الحد $ح_{م}$ هو الوسط الحسابي للحدَّين $ح_{م-١}$ ، $ح_{م+١}$ حيث $م < ن$.

[١٤] إذا كان الحد النوني من المتتالية : ⟨ ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ... ⟩ يساوي ثلاثة أمثال الحد النوني من المتتالية : ⟨ ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ... ⟩ ، فأوجد قيمة ن والحد النوني (العام) في كل منها .

[١٥] اثبت أن : $\frac{١ + ٣ + ٥ + ... + ٩٩}{١٠١ + ١٠٣ + ١٠٥ + ... + ١٩٩} = \frac{١}{٣}$.

[١٦] مجموع العشرة الحدود الأولى من متتالية حسابية هو ١٢٠ ، ومجموع العشرة الحدود التالية هي ٣٢٠ . أوجد الحد الأول والسادس .

[١٧] أوجد ما يأتي :

أ) عدد الحدود اللازم أخذها ابتداء من الحد الأول للمتتالية :
⟨ ٢٨ ، ٢٦ ، ٢٤ ، ... ⟩ ليكون المجموع ٢١٠ .

ب) المتتالية العددية التي حدّها الرابع ٣٥ ومجموع الاثنى عشر حداً الأولى منها ٥٧٠ .

جـ) مجموع العشرين حداً الأولى لمتتالية حسابية حدّها النوني ٥ ن – ١ .

د) مجموع الخمسة عشر حداً الأولى لمتتالية حسابية حدّها الأول –٨ وحدّها الخامس عشر ٣٠ .

هـ) مجموع الحدود الموجبة من المتتالية الحسابية : ⟨ ٣٥ ، ٣٠ ، ٢٥ ، ... ⟩.

[١٨] اثبت ما يأتي : (إذا كوّنت أ ، ب ، جـ متتالية حسابية) .

أ) أ – ٢ ، ب – ٢ ، جـ –٢ تكوّن متتالية حسابية .

ب) ٢أ (أ – ب) ، ٢ ب (ب – جـ) ، جـ (أ – جـ) تكوّن متتالية حسابية.

[١٩] حنفية تصب المياء في حوض بمعدل ٥٠ لتراً في الساعة ، ثم بعد ساعة أخذت تصب فيه بزيادة ٥ لترات في كل ساعة على الساعة التي قبلها . فبعد كم ساعة يكون بالحوض ٧٢٥ لتراً ؟

[٢٠] اقتصدت طالبة في شهر ما ٢٠٠ ريال وأخذت تقتصد في كل شهر ١٠٠ ريال زيادة على ما تقتصده في الشهر السابق . فبعد كم شهر يصبح مجموع ما معها ١٧٠٠٠ ريال ؟

[٢١] باستخدام خواص المتتالية الحسابية أثبت أن مجموع ن من الأعداد الفردية الأولى : ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ، (٢ ن – ١) هو $ن^٢$.

[٢٢] إذا كان مجموع ن حداً الأولى من متتالية حسابية يساوي ٢ $ن^٢$ + ن . فما هو حدها الخامس عشر ؟

(٣ – ٣) المتتالية الهندسية :

[٢٣] أوجد ما يأتي :

أ) المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٣ وأساسها ٢ .

ب) المتتالية الهندسية التي فيها $ح_٢$ = ٨ ، $ح_٧$ = ٦٤٨ .

جـ) الحد السادس للمتتالية الهندسية : 〈 ٣ ، ١٢ ، ٤٨ ، ... 〉 .

د) عدد حدود المتتالية الهندسية : 〈 ٣٢٠ ، ١٦٠ ، ... ، ١٠ 〉 .

هـ) $ح_٦$ للمتتاليـــة الموجبة التي فيها مجموع الحدّين الأول والثاني يســاوي ٢٤ وحدها الثالث يساوي ٢ .

[٢٤] أوجد ما يأتي :

أ) اربعة أوساط هندسية بين العددين ٢٥٦ ، ٨ .

ب) عددين وسطهما الحسابي ١٥ ، ووسطها الهندسي ٩ .

جـ) قيمة رتبة الحد الذي قيمته $-\frac{٣}{٤}$ من المتتالية الهندسيــة :

〈 ٢٤ ، –١٢ ، ٦ ، ... 〉 .

د) المتتالية الهندسية التي فيها : $ح_{١٠}$ = ٣٢٠ ، $ح_٦$ = ٢٠ .

هـ) المتتالية الهندسية التي مجموع الحدّين الثاني والثالث منهـا يساوى ٦ ، ومجموع الحدّين السادس والسابع منها يساوى ٤٨٦ .

و) المتتالية الهندسية التي حدها الثالث يزيد على حدها الثاني بمقــدار ١٢ ، وكان حدها السادس يزيد على حدها الخامس بمقدار ٣٢٤ .

[٢٥] أوجد ما يأتي :

أ) الخمسة الحدود الأولى لمتتالية هندسية إذا كان مجموع الثلاثة الحدود الأولى لها = ٩ ، مجموع الحدود الثلاثة التالية لها = –٧٢ .

ب) عددان موجبان وسطهما الهندسي ٦ ، ووسطهما الحسابي $٧ \frac{١}{٢}$.

جـ) الوسط الهندسي للحدين الثاني والسادس للمتتالية التي حدها العام $ح_د = ٣^{١-د}$.

د) قيمة ﺃ (عدداً صحيحاً) إذا كانت (٢ﺃ – ٢) ، (٣ﺃ – ١١) ، (ﺃ–٣) هي الثلاثة الحدود الأولى من متتالية هندسية .

[٢٦] أوجد ما يأتي :

أ) مجموع التسعة الحدود الأولى من المتتالية الهندسية : <١ ، $\sqrt{٣}$ ، ٣ ، ...> .

ب) مجموع المتتالية الهندسية التي حدها الأول = ٢٤٠ ، وحدها الأخير = ١٥ وأساسها = $\frac{١}{٢}$.

جـ) المتتالية التي حدودها موجبة ومجموع حديها الأول والرابع = ٣ أمثال مجموع حديها الثاني والخامس ، وحاصل ضرب الحدين الثاني والرابع = ٤ .

د) عدد حدود المتتالية الهندسية التي مجموع حدودها $٦٣\frac{٣}{٤}$ ، وحدها الأول = $\frac{١}{٤}$ وحدها الأخير = ٣٢ .

[٢٧] أوجد المتتالية الهندسية التي فيها : $ح_١ = \frac{٢}{٣}$ ، $ر = -\frac{٢}{٣}$ ، ثم أوجد عدد الحدود اللازم أخذه منها ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها = $\frac{٩٢٦}{٢١٨٧}$.

[٢٨] أثبت أن الوسط الحسابي لعددين حقيقيين موجبين أكبر من أو يساوى الوسط الهندسي لهما .

[٢٩] بيّن أيّاً من المتسلسلات الآتية حسابية وأيهما هندسية .

أ) $\sum_{د=١}^{٨} ٣^د$.

ب) $\sum_{د=١}^{١٠} (٣د - ٢)$.

جـ) $\sum_{د=١}^{٦} (-\frac{١}{٣})^د$.

د) $\sum_{د=١}^{٨} (-\sqrt{٣})^د$.

[٣٠] خزان مياه فارغ ، صب فيه في اليوم الأول ٢٤٣ جالون ، وصب فيه بعد ذلك وفي كل يوم قدر ما صب فيه في اليوم السابق مباشرة مرة وثلثاً . أوجد سعة الخزان . علماً بأنه امتلأ في ٦ أيام .

[٣١] يريد مدرس أن يوفر مبلغاً من المال من خلال توفير ١٠٠ ريال في اليوم الأول ، ثم ٢٠٠ ريال في اليوم الثاني ، ثم ٤٠٠ ريال في اليوم الثالث ، وهكذا يوفر كل يوم ضعف ما يوفره في اليوم السابق مباشرة . أوجد مجموع ما يوفره بعد ١٥ يوماً ، ومجموع ما يوفره في ٣٠ يوماً .

[٣٢] سيارة تنقص قيمتها ١٥٪ كل سنة . أوجد قيمتها بعد ٥ سنوات إذا كان ثمنها ١٧٠٠٠٠٠ ريال .

[٣٣] قيمة ما تنتجه بئر من البترول في كل عام = $\frac{٢}{٣}$ قيمة الانتاج في العام السابق .

فإذا كانت قيمة ما تنتجه البئر في هذه السنة = ٣ ملايين دولاراً من قيمة إنتاج البئر من ٦ سنوات ، فبعد كم سنة تقريباً ستصبح قيمة ما تنتجه البئر = ١٠٠٠٠٠ دولاراً في السنة فقط .

تماريـــن عامـــة

[١] أي العبارات التالية صحيحة وأيها خاطئة .

أ) كل دالة حقيقية مجالها ط* هي متتالية .

ب) كل دالة حقيقية مجالها ط* ومداها ص* متتالية .

جـ) كل دالة حقيقية مداها ط* متتالية .

د) كل دالة مجالها { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٧ } متتالية منتهية .

هـ) كل دالة حقيقية مجالها { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } متتالية منتهية .

و) الدالة د (س) = (٢ س)^{٢} ، س $\in$ ط متتالية .

ز) إذا كانت المتتالية ‹ح ن › متتالية هندسية فإن ح ن $\neq$ ٠ لكل ن في مجال المتتالية .

د) إذا كان أساس متتالية هندسية موجباً فإن جميع حدودها تكون موجبة أو سالبة .

ل) إذا كان مجموع الحدين الأول والثاني في متتالية هندسية = صفراً ، فإن الأساس = -1 .

ك) المتتالية : ‹ ا ، ا ، ا ، ... › حيث ا ∈ ح متتالية هندسية .

[٢] أ) أثبت أن مجموع ٢ ن من حدود المتتالية الحسابية ١٠ ، ١٤ ، ١٨ ، ...
يساوى ٨ ن (ن + ٢) ، ثم أثبت أن :

$$\frac{١٠ + ١٤ + ١٨ + \ldots \text{ إلى } ٢\text{ن من الحدود}}{٣ + ٥ + ٧ + \ldots + \text{ إلى ن من الحدود}} = ٨ \; .$$

ب) متتاليــة حسابيــة حدها الثاني = ٧ ، حدها الخامس = ١٩ ، وحدها الأخير = ٣٩ . أوجد الحد الأول والأساس ومجموع حدودها .

جـ) مجموع الحدين الأول والثاني من متتالية هندسية =٩ ، ومجموع الحدين الرابع والخامس منها ٧٢ .أوجد المتتالية ،ثم أوجد رتبة الحد الذي يكون مساوياً ٩٦ .

[٣] أوجد الثلاثة الحدود الأولى للمتتالية ‹ $\frac{١}{٢\text{ن}}$ › ثم بين نوعها ، وأوجد السبعة الحدود الأولى منها .

[٤] ثلاثة أعداد تكون متتالية هندسية مجموعها ١٩ فإذا أضيف إليها على الترتيب ٣ ، ٥ ، ٦ كوّنت النواتج متتالية حسابية . أوجد هذه الأعداد .

[٥] أ) كم حداً يلزم أخذها مـن متتالية حسابية حدها الرابع ٩ ومجموع حديها الخامس والتاسع = صفر ليكون المجموع مساوياً ٥٤ ؟ فسر معنى اجابتك .

ب) أوجد المتتالية التي مجموع ن حداً الأولى منها يتعين بالقاعدة :

$\frac{٣}{٢}$ ($٣^{\text{ن}}$ – ١) ، ثم عين نوعها .

[٦] متتالية هندسية فيها الحد الثاني = حاصل ضــرب حديهـا الثالث والرابع وحدهــا السادس = $\frac{١}{٢}$. أوجد مجموع الثمانية الحدود الأولى منها .

[٧] متتالية هندسية حدها الرائي = ($\frac{٣}{٥}$ $)^{\text{ن}-١}$. أوجد المتتالية ، ثم أوجد كلاً من الوسط الحسابي والوسط الهندسي لحديها الثاني والسادس .

[٨] متتاليــة حسابيــة حــدها الأول = ١٢ ، وحدهــا الأخير = ٨٨ ، وإذا كان مجموعهما = ١٠٠٠ ما مجموع النصف الأخير من هذه المتتالية .

[٩] الأعداد ٦ ، ١٠ ، $٢\sqrt{٣}$ ، −٢ ، ٢٢ ، ٢ بعضها يكون متتالية حسابية والآخر يكون متتالية هندسية . أكتب منها متتاليتين في ترتيب تصاعدي إحداهما حسابية والأخرى هندسية . وأوجد $ح_{١٠}$ في كل منها .

[١٠] أي حد في المتتالية : < ١ ، $\sqrt{٢}$ ، ٢ ، .... > يساوى الحد الذي ترتيبه ٨٠ في المتتالية < $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، ... > .

[١١] متتالية حسابية مجموع الحدود السبعة الأولى منها ٥٦ وحدودها الأول والثاني والرابع في تتال هندسي . أوجد المتتالية .

[١٢] أثبت أنه إذا كانت الأعداد أب ، $ب^٢$ ، $جـ^٢$ تكون متتالية حسابية ، فإن الأعداد ب ، جـ ، ٢ ب − أ تكون متتالية هندسية .

[١٣] عددان موجبان الوسط الحسابي لهما ١٧ والوسط الهندسي لهما = ١٥ . أوجد العددين ، وإذا كوّن العددان ووسطهما الهندسي الثلاثة الحدود الأولى لمتتالية هندسية أساسها أصغر من الواحد ؛ فاوجد مجموع الأربعة الحدود الأولى منها .

[١٤] مجمــــوع ثلاثة أعداد تكون متتالية حسابية هو ٢٤ ، وإذا طرح مــن العــدد الأوسط ٢ كونــت مقلوباتهـا عنــدئذ متتالية عددية أخرى . فما هي هذه الأعداد ؟ وإذا رتبت هذه الأعداد ترتيباً تنازلياً بحسب قيمتها مكونة المتتالية الحسابية ؛ فأوجد كم حداً من حدودها ابتداء من الحد الأول يكون مجموعها مساوياً −١٢٠ .

[١٥] إذا كان الوســـط الحسابــي بــين س ، ص هو ٧ والوسط الهندسي بين $\frac{١}{س + ٢}$ ، $\frac{١}{ص − ٦}$ هو $\frac{١}{٥}$. فاوجد قيمة كل من س ، ص ، ثم أوجد عدد الحدود التي يجب أخذها من المتتالية الحسابية س ، ص ، .... ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع مساوياً ٥٦٤ .

اختبار الوحدة

[١] أ) عيّن أيّاً من الدوال التالية تمثل متتالية :

أ) ح (ﻫ) = $\frac{١}{٢ﻫ}$ ، ﻫ ∈ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } .

ب) د (ﻫ) = (-١)^{٢ﻫ} (ﻫ + ١)^{٢} ، ﻫ ∈ ط* .

جـ) ك (ﻫ) = $\frac{١}{ﻫ}$ ، ﻫ ∈ ح .

[٢] بيِّن نوع كلاً من المتتاليات الآتيـة (من حيــث كونها حسابية أو هندسية أو غير ذلك) ، ثم أوجد حدها العام – إن أمكن – .

أ) < ٥ ، ٢٥ ، ٦٥٢ ، ... > .

ب) < -٣٦ ، ٦ ، -١ ، ... > .

جـ) < ٣ ، ٧ ، ١١ ، ... > .

د) < ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ... > .

[٣] متتالية عددية عدد حدودها = ٦ وحدها الأخير = ٢٧ ، ومجموعها = ١٠٢ . أوجد الحد الأول والأساس .

[٤] متتالية هندسية حدها الأول = $\frac{١}{٢}$ ، وحدها الثاني $\frac{١}{٦}$. فما هو ترتيب الحد الذي يساوي = $\frac{١}{٤٨٦}$.

[٥] ثلاثة أعداد تكون متتالية هندسية وحاصل ضرب هذه الأعداد = ٢٧ ، فإذا وضعنا العدد الثالث مكان العدد الثاني والعدد الثاني مكان العدد الثالث كونت الأعداد الثلاثة متتالية عددية . أوجد هذه الأعداد الثلاثة .

[٦] سقط جسم من السكون رأسياً في الفضاء فقطع في الثانية الأولى ٦ أمتار ، ثم قطع ١٢ متراً زيادة في كل ثانية عن الثانية السابقة لها مباشرة . فما هي المسافة التي يقطعها الجسم في ١١ ثانية .

الوحدة الرابعة اللوغاريتمات

(٤ – ١) الدالة الأسية :

[١] ارسم منحنى الدالة : $\text{د}(\text{س}) = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{\text{س}}$.

[٢] حل المعادلة : $\left(\sqrt[٥]{٣}\right)^{٢} = ٣^{\text{س} - \frac{١}{٢}}$.

[٣] أوجد مجموعة تعريف الدالة : $\text{ص} = \text{أ}^{\text{س}}$.

(٤ – ٢) اللوغاريتم والدالة اللوغاريتمية :

[١] حول كلاً مما يأتي إلى صيغة اللوغاريتم :

أ) $٣٢ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{-٥}$.　　ب) $٧\sqrt{٧} = \left(\sqrt{٧}\right)^{٣}$.

[٢] أجب عن الأسئلة التالية :

أ) حول ما يأتي إلى الصيغة الأسية : $\text{لو}_{٥}\, ٦٢٥ = ٤$.

ب) إذا كانت : $\text{لو}_{\sqrt{٢٧}}\, \text{س} = ٦$. فما قيمة س .

جـ) حل المعادلة : $\text{لو}\, ٧ + \text{لو}\, \text{س} = ٢\, \text{لو}\, ٧$.

د) أوجد مجموعة تعريف الدالة : $\text{ص} = \text{لو}_{\text{أ}}\, \text{س} - ٣$.

[٣] ارسم كلاً من الدوال التالية :

أ) $\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\, \text{س} = \text{ص}$.　　ب) $\text{ص} = \text{لو}_{٩}\, \text{س}$.

(٤ – ٣) قوانين اللوغاريتمات :

[١] ضع المقدار : لو $\frac{٥}{٣}$ + لو $\frac{١٥}{٦٢٥}$ – لو $\frac{٩}{٢٥}$ + لو $\frac{٢٧}{٥}$ في ابسط صوره .

[٢] أوجد قيمة كل من :

أ) لو ٠,٠٠٠١٠ .　　ب) $لو_{٣}$ ($لو_{٦}$ ٦) .

[٣] أثبت أن : $لو_{٥}$ ٢٥ + $لو_{٥}$ ١٢٥ = $لو_{٥}$ ٣١٢٥ .

(٤ – ٤) اللوغاريتم المعتاد :

[١] أوجد باستخدام الجداول : $لو_{١٠}$ ٠,٠٠٢٣ .

[٢] أوجد باستخدام الآلة الحاسبة :

أ) $لو_{١٠}$ ٢٥ .　　ب) $لو_{١٠}$ ٠,٠٠٧ .　　جـ) $لو_{٢,٣}$ ٣,٢٥ .

[٣] إِذا كانت $لو_{١٠}$ س = ٠,٠٠٥٢٧ . أوجد باستخدام الآلة الحاسبة قيمة س .

(٤ – ٥) اللوغاريتم الطبيعي :

[١] أوجد قيمة : $هـ^{٢ لو_{هـ} ٣}$.

[٢] أوجد قيمة ما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة :

أ) $لو_{هـ}$ ٢٣٥ .　　ب) $لو_{هـ}$ ٦,٠٢٥ .

[٣] باستخدام الآلة الحاسبة . أوجد قيمة س إِذا كانت :

أ) $لو_{هـ}$ س = ٢,٣٥ .　　ب) $لو_{هـ}$ س = ٠,٠٠٥٣ .

(٤ – ٦) التبسيط باستخدام اللوغاريتمات :

[١] أوجد قيمة : $\frac{٣,٢١ \times \sqrt{٠,٤٢٣}}{١,٤٠٢}$ باستخدام اللوغاريتمات .

[٢] مثلث أ ب جـ فيه $|أ ب| = |أ جـ| = ٢,٨١$ ، وقياس زاوية أ ب جـ $= ٣٠^\circ$

أوجد باستخدام اللوغاريتمات مساحة Δ أ ب جـ .

[٣] أحسب قيمة ما يأتي باستخدام اللوغاريتمات :

$$\sqrt[٥]{٣٢٣} \times \sqrt[٣]{(٢٤)^{٦}} \times \sqrt[٤]{(١٦,٢٣٥)^{٣}}$$.

تمارين عامة

[١] حل المعادلات التالية :

أ) $\sqrt[٣]{\frac{١}{٩}} = ٢٧^{س+٢}$.

ب) $(س - \frac{٢}{٣})^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{٦}$.

جـ) $٥^{س} = ١٢٥\sqrt{٥}$.

د) $(٢^{س} - ٨)(٣^{س} - ٢٧) = ٠$.

هـ) $(٢٥)^{س-١} - ٦ \times ٥^{س-١} + ٥ = ٠$.

و) $٣^{\frac{١}{س}} \times ٣^{\frac{١}{ص}} = ٢٤٣$.

ز) $٣^{س} \times ٣^{ص} = \sqrt{٧٢٩}$.

ح) $٢^{س} \times \sqrt[٣]{٤} = (\frac{١}{١٦})^{\frac{١}{٣}}$.

ط) $\sqrt{٣} \times ٩^{س+١} = \sqrt[٣]{٩}$.

[٢] ارسم بيان كل من الدوال التالية :

أ) $ص = (\frac{١}{٢})^{س}$. ب) $ص = (\frac{١}{٢})^{-ص}$. جـ) $ص = هـ^{|س|}$.

[٢] ما هو أساس الدالة الأسية التي يمر بيانها بالنقطة (–٤ ، ٨١) ؟

[٣] اكتب كلاً مما يأتي بالصورة اللوغاريتمية :

أ) $٢١٦ = ٦^{٣}$. ب) $٧^{-٣} = \frac{١}{٣٤٣}$.

[٤] ضع ما يأتي في الصورة الأسّية :

أ) $\text{لو}_{١٠}\, ٠,٠٠٠١ = -٤$.   ب) $\text{لو}_{١٣}\, ٢١٩٧ = ٣$.

[٥] أحسب قيمة كل مما يأتي :

أ) $\text{لو}_{\sqrt{٥}}\, ٥\sqrt{٢٥}$.   ب) $\text{لو}_{٢}\, ٣٢\sqrt{٢}$.

جـ) $\text{لو}_{\sqrt{٢}}\, ٣٢\sqrt{٢}$.   د) $\text{لو}_{\sqrt{٢}}\, ١٦$.

هـ) $\text{لو}_{٢}\, ٨\sqrt{٣٢}$.

[٦] حل المعادلات التالية :

أ) $\text{لو}_{٣}\, \frac{١}{٨١} = \text{س} - ٢$.   ب) $\text{لو}_{\text{س}}\, ٣\frac{٣}{٨} = \frac{٣}{٢}$.

جـ) $\text{لو}_{٨}\, (\text{س} + ٣) = \frac{١}{٣}$.   د) $\text{لو}_{١٠}\, \sqrt[٣]{١٠} = \frac{\text{س}}{٦}$.

هـ) $\text{لو}_{\text{س}+١}\, ٤ = -\frac{٢}{٧}$.   و) $\text{لو}_{٢\sqrt{٣٢}}\, (\text{س}^{٢} - \text{س}) = ٢$.

ط) $\text{لو}_{٤}\, (\text{لو}_{٢}\, (\text{لو}_{٢}\, ١٦)) = \text{س}$.

[٧] أثبت أن :

أ) $\text{لو}_{٣}\, ٢٧ = \text{لو}_{٣}\, ٢١٨٧ - \text{لو}_{٣}\, ٨١$.   ب) $\text{لو}_{٢}\, ٢٣ + \text{لو}_{٢}\, ١٢٨ = \text{لو}_{٢}\, ١٠٢٤$.

[٨] اختصر كلاً مما يأتي :

أ) $\text{لو}\frac{٧}{١٥} + \text{لو}\frac{٣٥}{٣} + \text{لو}\frac{٢٥}{٢} - \text{لو}\frac{٣}{٤}$.   ب) $\text{لو}_{٤}\, ٤٥ - ٢\, \text{لو}_{٤}\, ٣ + \text{لو}_{٤}\, ١٢$.

جـ) $\text{لو}_{٣}\, ٣٦ = \text{لو}_{٣}\, ٤ - \text{لو}_{٥}\, ٢٥$.   د) $\frac{٣}{٢}\, \text{لو}_{١٠}\, \text{س} - \frac{٣}{٤}\, \text{لو}_{١٠}\, \text{ص} - \frac{٤}{٥}\, \text{لو}_{١٠}\, \text{ع}$.

[٩] ما هو العدد الذي لوغاريتمة للأساس ٥ يساوي −٤ ؟

[١٠] أيهما أكبر $لو_{\frac{١}{٢}} ٣$ ، $لو_{\frac{١}{٥}} ٣$ ؟

[١١] أثبت أن :

أ) $\frac{لو ٨ - ٣ لو ٩}{لو ٤ - ٤ لو ٣} = \frac{٣}{٢}$.

ب) لو ٣,٤٣ + لو ١٢٥ − ٣ لو ١,٤ + لو ٠,٦٤ = ٢ .

جـ) $لو \frac{٢٤٥}{٢٩٧} - لو \frac{٤٩}{٨١} + لو \frac{١١}{٥١} = ٠$.

د) ٢ لو ٠,٦ − لو ٢١٦ + لو ٨ + لو ١٢٥ = −٣ .

هـ) $لو \frac{٢٥٦}{٣} + ٣ لو \frac{٥}{٣} + لو \frac{٨١}{٣٢} = ٣$.

[١٢] أوجد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية :

أ) د (س) = لو (س − ٣) .   ب) لو (٤ − $س^{٢}$) = ص .

جـ) ص = $لو_{٣}$ (س + ١) .   د) $ص = \frac{لو_{أ} س}{١ + لو_{أ} س}$.

[١٣] ارسم بيان كل من الدوال التالية :

أ) ص = ٢ + $لو_{٢}$ س .   ب) ص = $لو_{٢}$ (س + ٣) .

جـ) ص = $لو_{٢}$ س .   د) ص = $لو_{\frac{١}{٣}}$ (٣ − س) .

هـ) ص = $لو_{٢}$ (س − ١) .   و) ص = $لو_{١٠}$ س .

[١٤] أوجد نقاط تقاطع بيان كل دالة من دوال تمرين [١٣] مع أحد المحورين .

[١٥] ما هو أساس الدالة اللوغاريتمية التي يمر بيانها بالنقطة ($٢٥\sqrt{١٢٥}$ ، $\frac{٧}{٢}$).

[١٦] باستخدام قوى العدد عشرة اكتب كلَّ عددٍ فيما يلي على صورة عدد صحيح وكسر بحيث يكون العدد الصحيح أقل من العشرة :

أ) ٣٢ .　　　ب) ٠,٠٠٦٥ .　　　جـ) ٤١٢,٣ .

د) ٠,٦١ .　　　هـ) ٠,٢ .

[١٧] أثبت أن :

أ) لو$_{١٠}$ ٣٥٠ = لو$_{١٠}$ ٣٥ + ١ .　　　ب) لو$_{١٠}$ ٣٢٥ = لو$_{١٠}$ ٣,٢٥ + ٢ .

جـ) لو$_{١٠}$ ٠,٠٠١ = لو$_{١٠}$ ١ − ٣ .　　　د) لو$_{١٠}$ ٠,٠٠٢٣ = لو$_{١٠}$ ٢,٣ − ٣ .

[١٨] أوجد كلاً مما يأتي باستخدام الجداول، وتأكد من الإجابة باستخدام الآلة الحاسبة :

أ) لو$_{هـ}$ ٤,٣٢ .　　　ب) لو$_{هـ}$ ٠,٠٠٢٧ .

جـ) لو$_{هـ}$ ١٣,٠٠١٢ .　　　د) لو$_{١٠}$ ٠,٠٠٢٦٥ .

هـ) لو$_{١٠}$ ٠,٢٦ .　　　و) لو$_{١٠}$ ٢٥٦,٣٨ .

[١٩] (باستخدام الجداول) . أوجد قيمة س لما يأتي إذا كان :

أ) لو$_{١٠}$ س = ١,١٩٢٧ .　　　ب) لو$_{١٠}$ س = ٠٠,٥٥٦ .

جـ) لو$_{١٠}$ س = − ٠,٩٩٦٥ .

[٢٠] أوجد قيمة س فيما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة إذا كان :

أ) لو$_{هـ}$ س = ٣,٢٤ .　　　ب) لو$_{١٠}$ س = ١,٢٣ .

جـ) $لو_{هـ} س = ٠,١٠٠٢$. د) $لو_{١٠} س = ٠,٠٢٨٤$.

هـ) $لو_{هـ} س = -٠,٤٣٢$. و) $لو_{١٠} س = -٠,٠١٤$.

[٢١] أوجد : أ) $لو_{٤} ٦٠$. ب) $لو_{٢} ٧$. جـ) $لو_{٧} ٧٥$. د) $لو_{٠,٢} ٥٣$.

[٢٢] أحسب ما يأتي باستخدام اللوغاريتمات :

أ) $\sqrt{٠,٣٤٨٢} \times \sqrt[٣]{٥,٣٧٨}$.

ب) $(١٣,٨٤)^{٩}$.

جـ) $\dfrac{٠,٧٣٥٢ \times (٤,٠٠٧)^{٣}}{٠,٨٣٤٢ \times \sqrt[٣]{٨٠٩,٦}}$.

د) $\sqrt[٣]{\dfrac{(٩,٢٧)^{٣} + (١٤,٣٧)^{٢}}{(٣٥,٤٤)^{٢} \times ٠,٧٣}}$.

هـ) $\sqrt[٥]{(٧١,٣٢)^{٣}}$.

و) $\sqrt[٤]{٠,٠٠٣٨}$.

[٢٣] حل المعادلات التالية :

أ) $لو_{٥} ٢ = س$. ب) $لو_{هـ} (لو_{هـ} س) = ١$.

جـ) $لو_{٢} ٣ = س$. د) $لو_{٥} س + لو_{٥} \sqrt{٦ س + ٥} = ١$.

هـ) $لو_{س} س^{٢} = (لو س)^{٢}$. و) $لو_{هـ} س = ٢ + لو_{هـ} (١ - س)$.

ز) $لو_{هـ} هـ = ٢$.

[٢٤] إذا كانت $لو_{هـ}(\dfrac{أ + ب}{٣}) = \dfrac{١}{٢} (لو_{هـ} أ + لو_{هـ} ب)$. أثبت أن : $أ^{٢} + ب^{٢} = ٧ أ ب$.

[٢٥] إذا كانت $لو_{هـ} (س + ص) = لو_{هـ} س + لو_{هـ} ص$. أوجد قيمة ص بدلالة س .

اختبار الوحدة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول :

١ ■ حل المعادلة : $٣^{س^٢ - ٣ س} = ٩$.

٢ ■ أرسم بيان الدالة ، $ص = ٣^{س}$.

٣ ■ أوجد مجموعة تعريف الدالة : $ص = لو_{٢} (س - ٣)$.

السؤال الثاني :

١ ■ حل المعادلة : $لو_{٢\sqrt{٢}} ٣٢ \sqrt[٥]{٤} = س$.

٢ ■ أثبت أن : $لو_{٢} ٣٢ + لو_{٢} ١٢٨ = لو_{٢} ٤٠٩٦$.

٣ ■ حل المعادلة : $لو_{٢} (س - ٣) + لو_{٢} (س + ٥) = لو_{٢} ٨$.

٤ ■ أثبت أن : $لو_{١٠} \frac{١٧٠}{٧} - لو_{١٠} \frac{١٨}{٣٥} + لو_{١٠} \frac{٧٢}{٢٤} = ٢$.

السؤال الثالث :

١ ■ اكتب ما يأتي على شكل [عدد قياسي × ١٠ ^{ن}] : ٠,٣٢٥ ، ٣٢٥ .

٢ ■ أوجد باستخدام الآلة الحاسبة كلاً من :

أ) $لو_{هـ} ٠,٠٠٣٢٥$. ب) $لو_{١٠} ١,٠٠٣٥$. جـ) $لو_{هـ} ١٨$. د) $لو_{١٠} ٠,٠٠٩$.

٣ ■ ما هو أساس الدالة اللوغاريتمية التي يمر بيانها بالنقطة (٣٢ ، جـ) .

السؤال الرابع :

١ ■ إِذا كان $لو_{١٠} س = ٣,٤٥٢٣$. أوجد قيمة س باستخدام الآلة الحاسبة .

٢ ■ احسب باستخدام اللوغاريتمات كل من :

أ) $\dfrac{(0,0087)^{2} \times (1,25)^{3}}{(1,36)^{6} \times \sqrt[5]{434}}$.

ب) $\dfrac{(3,23)\ \sqrt[5]{13}\ \sqrt[6]{87}}{(6,543)^{\frac{3}{2}}}$.

٣ ■ إذا كانت نصف قطر قاعدة اسطوانة دائرية قائمة من القانون نق = $\sqrt{\dfrac{ح}{ط\ ع}}$ احسب

قيمة نق حيث ح = ٤٨٢,٣سم^{2} ، ع = ١٢,٤٢سم ، ط = ٣,١٤١٦ .

٤ ■ ارسم الدالة : ص = لو$_{4}$ س مستفيداً من بيان الدالة ص = لو$_{2}$ س .

البند (٥ − ١) نهاية متتالية :

[١] أوجد كلاً من النهايات الآتية $\forall$ ﻫ $\in$ ص$^+$.

أ) $\underset{ﻫ \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{١ + ٣ + ٥ + ... + (٢ ﻫ - ١)}{١ + ٤ + ٧ + ... + (٣ ﻫ - ٢)}$.

ب) $\underset{ﻫ \to \infty}{\text{نهـا}}\ ١ + \dfrac{١}{٢} + (\dfrac{١}{٢})^٢ + ... + (\dfrac{١}{٢})^{ﻫ}$.

جـ) $\underset{ﻫ \to \infty}{\text{نهـا}} (\sqrt{ﻫ + ١} - \sqrt{ﻫ + ١})$

البند (٥ − ٢) نهاية الدوال الحقيقية :

أولاً : نهاية الدوال الحقيقية عند نقطة :

أوجد :

١) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (٢ س + ١)$.

٢) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} (س - ١)$.

٣) $\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٤ س^٢ - ١}{٢ س - ١}$.

٤) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} (٣ س - ١)$.

٥) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} (\sqrt{س} - \dfrac{٤}{س^٢})$.

٦) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٢ - ٢٥}{\sqrt{س^٣ + ١١}}$.

ثانياً : نهاية الدوال عند اللانهاية :

أوجد :

١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٣ + ٢ س^٢ + ١}{٣ س^٣ - س - ٣}$.

٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{٨ س^٣ - ٥ س^٢ + ١}}{٣ س - ٢}$.

٣) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٢ \times ٣^{س} - ٤ \times ٥^{س}}{٣ \times ٥^{س} - ٢ \times ٤^{س}}$. ٤) $\lim\limits_{م \to \infty} \dfrac{٣^{م+١} - ٤ \times ٢^{م-٢}}{١ + ٣^{م}}$.

٥) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^{٢} - س + ١} - \sqrt{س^{٢} - س + ١} \right)$.

٦) $\lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{٣ س + ٥}{\sqrt{٤ س^{٢} + ١}}$. ٧) $\lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{\sqrt{س^{٢} + ١}}{\sqrt[٤]{س^{٤} + ١}}$.

البند (٥ - ٣) الاتصال :

[١] ابحث إِتصال الدوال الآتية عند النقاط المذكورة :

أ) $د(س) = \dfrac{س - ٢}{٢ |س - ٢|}$ عند $س = ٣$

ب) $ق(س) = \begin{cases} ٣ - س & : س \neq -١ \\ ١ & : س = -١ \end{cases}$

جـ) $م(س) = س^{٢} - |س|$ عند $س = ٠$

د) $ك(س) = \begin{cases} |س| - س & : س \neq ٠ \\ ٢ & : س = ٠ \end{cases}$

[٢] ابحث إِتصال الدوال الآتية على الفترات المذكورة :

أ) $هـ(س) = \begin{cases} ٢ س & : س = -١ \quad \text{إذا كانت } ٠ \leq س < ١ \\ ٤ & : س = ١ \\ ٥ - ٣ س & : \text{إذا كانت } ١ < س \leq ٣ \end{cases}$.

ب) $ق(س) = \begin{cases} ٥ - ٢س & : -١ \leq س < ٣ \\ ٢ س - ٣ & : ٢ \leq س \leq ٣ \end{cases}$

البند (٥ – ٤) معدل تغير الدالة :

[١] أوجد دالة التغير د للدوال الآتية :

أ) د : س ⟵ ٢ س + ١ عند س = ٢ ، ثم أوجد د (–١) .

ب) د : س ⟵ س^{٣} عند س = ١ ، ثم أوجد د (٠٫٢) .

[٢] أوجد دالة متوسط التغير للدوال الآتية عند س = س$_{١}$ لما يأتي :

أ) د (س) = ٢ س^{٢} – ٣ س + ٢ ، ثم أحسب متوسط التغير عندما تتغير س من ٣ ⟵ ٣٫١ .

ب) ص = $\frac{١}{س + ١}$ حيث س ≠ –١ ، ثم أحسب متوسط التغير عندما تكون س$_{١}$ = ١ ، هـ = ١ .

جـ) د : س ⟵ $\sqrt{س}$ حيث س ≥ ٠ ، ثم أحسب متوسط التغير عندما تتغير س من ٩ إلى ١٠٫٢٤ .

د) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، \text{ كان } ١ \leq س < ٣ \\ ٢\,س + ١ & ، \text{ كانت } س \geq ٣ \end{cases}$

فأوجد معدل تغير الدالة د (س) عندما تتغير س من ١ إلى ٢٫٥ ، ومن ٣ إلى ٤ .

[٣] افرض أن مجتمع ما ينمو متبعاً العلاقة ح$_{ن}$ = ٣٠٠٠ + ٦٠ ن^{٢} ، حيث (ن) الزمن مُقاساً بالأيام . أوجد معدل النمو عندما (ن) = صفر ، ٢ ، ٥ .

البند (٥ – ٥) المشتقـة :

[١] أوجد باستخدام تعريف المشتقة .

أ) ص = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$.

ب) ص = س – $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} .

جـ) ص = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$.

د) ص = $\sqrt{س + ٢}$.

هـ) ص = $|س - ١|$.

[٢] أوجد ميل المماس للمنحنيات الآتية عند النقاط المبينة أمام كل منها :

أ) د (س) = س^{٢} - ٦ س + ٣ عندما س = ٢ .

ب) د (س) = س^{٢} + س + ١ عندما س = ٠ .

البند (٥ - ٦) المشتقة عند نقطة وعلى فترة :

[١] ابحث قابلية الدوال الآتية للإشتقاق عند النقاط المبينة أمام كل منها :

أ) د(س) $\begin{cases} ٢\ س & \text{إذا كانت } س \leq ١ \\ س^{٢} + ١ & \text{إذا كانت } س > ١ \end{cases}$ عند النقطة س = ١

ب) د(س) = $\begin{cases} ٢\ س + ١ & \text{إذا كانت } س < ٣ \\ ٣\ س + ٤ & \text{إذا كانت } س \geq ٣ \end{cases}$ عند النقطة س = ٣ .

جـ) د (س) = $\begin{cases} س + ٢ & \text{إذا كانت } ٢ \leq س \leq ٠ \\ ٣\ س - ١ & \text{إذا كانت } ٥ \leq س < ٢ \end{cases}$

عند النقاط الآتية : س = ٢ ، س = ٠ ، س = ٥ .

[٢] الدالة د (س) = $\begin{cases} ٠ & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{١}{٢} & \text{عندما } س = ٠ \\ ١ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

أثبت أن :

أ) د (س) ليست متصلة وليست قابلة للإشتقاق عند س = ٠ .

ب) الدالة $م$ (س) = س د (س) متصلة عند س = صفراً ، ولكنها غير قابلة للإشتقاق عند س = ٠ .

جـ) الدالة $هـ$ (س) = س^{٢} ،د(س) متصلة وكذلك قابلة للإشتقاق عند س = ٠ .

البند (٥ – ٧) قواعد الدوال القابلة للاشتقاق :

[١] أ) إذا كان ص = س^{٢} – ٢ س ، س = $\frac{١}{٢}\sqrt{هـ}$ ، فأوجد $\frac{ء ص}{ء هـ}$.

ب) إذا كان ص = $\sqrt{م^{٣}}$ ، $م$ = (ع – ٢)^{٤} ، ع = ٢ س + ١ ، فأوجد $\frac{ء ص}{ء س}$.

جـ) أوجد المشتقة الأولى للدالتين التاليتين :

١ ■ ص = (س^{٣} – ٣ س^{٢} + ٥)^{٧}

٢ ■ ص = $\frac{س}{\sqrt{س – ١}}$.

[٢] أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية مع ذكر قيم س التي تكون عندها الدالة غير قابلة للإشتقاق :

أ) ص = $\sqrt[٣]{(س^{٢} + س)^{٢}}$.

ب) ص = $\sqrt[٥]{(٤ س + ١)^{٤}}$.

جـ) ص = $\frac{س}{س + ١}$.

تمارين عامة

[١] أ) عرف المتتالية ، ثم مثّل على خط الأعداد الخمسة الحدود الأولى للمتتالية $\langle ح_د \rangle$ ، حيث $ح_١ = ٠,٩$ ، $ح_٢ = ٠,٩٩$ ، $ح_٣ = ٠,٩٩٩$ ، $ح_٤ = ٠,٩٩٩٩$ ، ... وهكذا .

أ) استنتج من الرسم القيمة التي تقرب منها $\langle ح_د \rangle$ عندما $د \leftarrow \infty$.

ب) أثبت باستخدام التعريف صحة (أ) .

جـ) برهن على أن المتتالية التي حدها النوني $ح_د = \frac{٤ د^٢ + ١}{٣ د^٢ + ٢}$ تتزايد مع تزايد د . ثم أوجد $\underset{د \leftarrow ح_د}{\text{نهـا}} ح_د$.

[٢] أ) اذكر المعنى الرياضي للجملة $\underset{س \leftarrow س.}{\text{نهـا}} د(س) = ا$ حيث د(س) دالة معرفة في جوار محذوف للنقطة س. وبناء على ذلك أثبت أن :

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (٢ س + ١) = ٣ \ .$$

ب) عرف اتصال الدالة د (س) عند النقطة $س = س_١$ ، ثم أثبت إن كانت د (س) قابلة للاشتقاق عند $س = س_١$ ، فإنها تكون متصلة عند نفس النقطة موضحاً بمثال أن العكس غير صحيح .

[٣] أوجد قيمة ما يأتي :

أ) $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٣٢ س^٧ - س^٢}{٨ س^٤ - س}$.

ب) $\underset{د \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢^د - ٣^د}{٢^د + ٣^د}$.

[٤] ابحث اتصال الدالة $د(س) = \begin{cases} |س| + س & : س \neq ٠ \\ ٢ & : س = صفر \end{cases}$

وذلك عند النقطة س = صفر .

[٥] ابحث قابلية إشتقاق الدالة :

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & : س \leq ١ \\ ٢س & : س > ١ \end{cases}$$ وذلك عند س = ١

[٦] تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بسرعة تتعين بالعلاقة :

ع = ٣٦ ن − ٣ ن^{٢} سم/ث . احسب أقصى سرعة يتحرك بها الجسم وازاحته حتى يصل إلى هذه السرعة .

[٧] باستخدام تعريف المشتقة . أوجد المشتقة للدالة : د (س) = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٥ .

[٨] إذا كانت $\lim_{س \to أ}$ د$_{١}$ (س) = ل$_{١}$ ، $\lim_{س \to أ}$ د$_{٢}$ (س) = ل$_{٢}$ ≠ صفراً .

أ) أوجد $\lim_{س \to أ} \left[د_{١}(س) + د_{٢}(س) − د_{١}(س) \bullet د_{٢}(س) + \frac{د_{١}(س)}{د_{٢}(س)} \right]$.

ب) بيّن أن : الدالة $د(س) = \frac{س + ٢}{س^{٢} − ٥س + ٤} + \frac{س − ٤}{س^{٢} − ٣س + ٢}$ غير معرفة عند س = ١ .

[٩] عرف الاشتقاق الأيمن والإشتقاق الأيسر للدالة د(س) عند النقطة س = س. ، موضحاً علاقته بقابلية الدالة د(س) للإشتقاق عند س ، ثم أوجد دَ(٠) إذا كان:

$$د(س) = \begin{cases} س^{\frac{٥}{٤}} & : س \geq ٠ \\ س^{٣} + ٥س^{٢} & : س < ٠ \end{cases}$$

[١٠] أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = س^{٣} + ٣س^{٣} − ٥ العمودي على المستقيم ٢س − ٦ص + ١ = صفر .

[١١] أوجد قيمة ما يلي :

أ) $\lim_{ن \to \infty} (١ − \frac{٢}{ن})$. ب) $\lim_{س \to \infty} \frac{١}{س^{٢}} \sqrt{١ − \frac{١}{س}}$.

جـ) $\lim_{س \to -1} \frac{س^3 - س^2 + س + 3}{س^3 + س^2}$.

[١٢] أوجد قيمة ﺃ التي تجعل الدالة :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س - 1}{\sqrt{3س - 2 - \sqrt{س}}} & : س \neq 1 \\ ﺃ & : س = 1 \end{cases}$$

متصلة عند س = ١

[١٣] عرف النهاية اليمنى $\lim_{س \to ﺃ^+} د(س)$ والنهاية اليسرى $\lim_{س \to ﺃ^-} د(س)$.

ثم أوجد هاتين النهايتين للدالة $د(س) = \frac{|س - 4|}{س - 4}$ عندما س ← ٤ .

[١٤] إذا كانت الدالة معرفة بالقاعدة التالية :

$$د(س) = \begin{cases} س + 1 & : س \leq 1 \\ 3 - ﺃس^2 & : س > 1 \end{cases}$$

أوجد قيمة ﺃ بحيث تصبح للدالة نهاية عندما س ← ١ ، ثم أثبت أنها متصلة عند س = ١ .

[١٥] أوجد مشتقة كل مما يأتي :

أ) $د(س) = |س|^2$.   ب) $ر(س) = س|س|$.

[١٦] مثل المتتالية ‹ ح ن › حيث $ح_ن = \frac{(-1)^ن}{2}$ بيانياً :

أ) بعد كم حد من المتتالية $\left|\frac{(-1)^ن}{2}\right| < 0{,}01$ (لو ٠,٥ = −٠,٣٠١) .

ب) أثبت أن المتتالية تقاربية ، ثم أوجد نهايتها .

[١٧] أحسب قيمة ما يلي :

أ) $\lim_{ن \to \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \ldots + (2ن - 1)}{ن^2 - ن + 1}$.

ب) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{س^٢ - \dfrac{١}{س^٢}}{(س + \dfrac{١}{س})^٢}$.

جـ) $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \dfrac{\sqrt{س^٢ - س - ٢} - ٢}{س^٣ - ٨}$.

د) $\lim\limits_{ى \leftarrow \infty} \dfrac{ى \sqrt{ى} - ٣ \sqrt{ى - ١}}{(\sqrt{ى} + ٢)\sqrt{ى(ى^٢ + ١)}}$.

[١٨] ارسم الدالة د(س) = $\begin{cases} س & : س < ١ \\ \dfrac{١}{٢}(س^٢ + ١) & : س \geq ١ \end{cases}$

أ) أثبت أن الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق عند س = ١ .

ب) ارسم الدالة المشتقة .

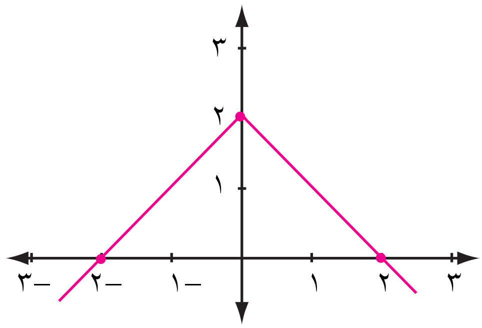
[١٩] إِذا كانت د : س $\longrightarrow \dfrac{٥}{٢ س - ١}$.

أ) أوجد دالة متوسط التغير د(هـ) عندما تتغير س من $س_٠$ إِلى $س_٠$ + هـ .

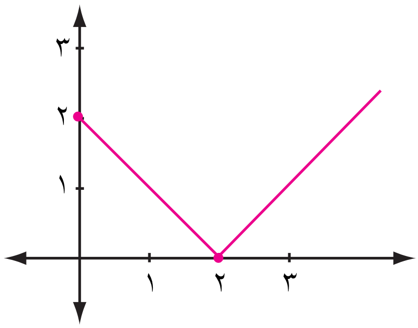
ب) أحسب متوسط التغير خلال الفترة [٢ ، ٢,٠١] .

اختبار الوحدة

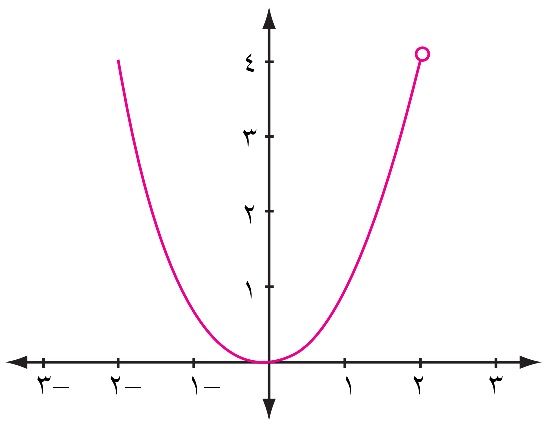
[١] استعن بالأشكال التالية :



$ر(س) = \begin{cases} -س + ٢ \ ، & س > ٠ \\ س + ٢ \ ، & س < ٠ \end{cases}$



$هـ(س) = |س - ٢|$.



$د(س) = \begin{cases} س^{٢} \ ، & س < ٢ \\ ٣ \ ، & س > ٢ \end{cases}$

أحسب قيمة النهايات إن وجدت فيما يلي :

أ) $\lim_{س \to ٠} ر(س)$.   ب) $\lim_{س \to ٢} هـ(س)$.

جـ) $\lim_{س \to ٢^{-}} هـ(س)$.   د) $\lim_{س \to ٢} د(س)$.

[٢] إذا كانت هـ(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ + \text{ا} & : \text{س} < -١ \\ ٦ & : \text{س} = -١ \\ ٢\text{س} - \text{ب} & : \text{س} > -١ \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{\text{س} \to -١}$ هـ(س) = ٢ . أوجد كلاً من ا ، ب

[٣] لتكن د(س) = $\begin{cases} \dfrac{|\text{س} + ١|}{\text{س} + ١} & : \text{س} \neq -١ \\ \text{صفر} & : \text{س} = -١ \end{cases}$

ابحث إتصال الدالة عند س = -١ .

[٤] أوجد قيمة الدالة ص = $\dfrac{١}{\text{س}^٣}$ ، حيث س ≠ ٠

أولاً : باستخدام تعريف المشتقة .

ثانياً : باستخدام خواص قواعد الاشتقاق .

[٥] أوجد معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى الدالة :

د(س) = س^٢ + ٢ س − ٣ ، عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص = س + ١ .

بند (٦ − ١) :

[١] إذا كانت :

$$\begin{bmatrix} \text{ب} + ٥ & ٧ & \text{أ} - ٢ \\ ٩ & \text{د} & \text{جـ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٧ & ٣ \\ ٩ & -٥ & ٠ \end{bmatrix}$$

أوجد قيم أ ، ب ، جـ ، د .

[٢] اكتب المصفوفات الآتية :

أ) $\underline{\text{ص}}$ من الشكل ٢ × ٣ إذا علمت أن عناصر الصف الأول ٣ ، −٤ ، ٢ ، وعناصر الصف الثاني −٧ ، ٠ ، ٨ .

ب) $\underline{\text{س}}$ من الشكل ١ × ٣ عناصر الصف الأول أ ، ب ، جـ .

[٣] أوجد قيم س ،ص ، ع ، ل إذا كان :

$$\begin{bmatrix} ٢\text{ل} & ٥ & ٤ & ٢\text{س} \\ ٠ & -٣ & ٣\text{س} & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٥ & ٤ & \text{ع} \\ ٠ & \text{ص} & ٩ & ٦ \end{bmatrix}$$

[٤] إذا كان لدينا ثلاثة طلاب أ ، ب ، جـ ، وكانت درجاتهم في إختبار مادة الرياضيات هي ٧٠ ، ٦٠ ، ٥٥ على الترتيب ، وفي مادة الأحياء هي ٧٥ ، ٦٥ ، ٦٤ على الترتيب ، وفي مادة الفيزياء هي ٧٤ ، ٥٠ ، ٥٩ على الترتيب . اكتب المصفوفة $\underline{\text{س}}$ لهذه المعلومات .

بند (٦ − ٢) :

[١] اذكر اسم كل من المصفوفة الآتية محدداً نوعها :

أ) $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب) $\underline{\text{ع}} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٥ \\ ٦ & ٢٠ & ٣ \\ -١ & -٧ & ٤ \end{bmatrix}$

جـ) $\underline{\text{ل}} = [\,١٠ \quad ٢١ \quad -٣\,]$ ، د) $\underline{\text{هـ}} = \begin{bmatrix} ١١ \\ ٢٠ \\ -١٥ \end{bmatrix}$

هـ) $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٧ & ٢ & ٣ \\ ٠ & -٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، ز) $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٥ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

[٢] اكتب المصفوفة $\underline{\text{أ}} = [\,\text{أ}_{\text{هـ و}}\,]$ التي من الشكل ٣ × ٤ . بحيث :

$$\text{أ}_{\text{هـ و}} = \begin{cases} ٧ & \text{عند}\quad \text{هـ} + \text{و} = ٥ \\ -١ & \text{عندما}\quad \text{هـ} + \text{و} \neq ٥ \end{cases}$$

[٣] اكتب المصفوفة $\underline{\text{ب}} = [\,\text{ب}_{\text{هـ و}}\,]$ التي من الشكل ٢ × ٥ حيث :

$$\text{ب}_{\text{هـ و}} = \begin{cases} ٧ & \text{عند}\quad \text{هـ} + \text{و} \leq ٤ \\ ٢ & \text{عندما}\quad \text{هـ} + \text{و} > ٤ \end{cases}$$

[٤] إذا علمت أن المصفوفة $\underline{\text{س}} = [\,\text{س}_{\text{هـ و}}\,]$ التي من الشكل ٤ × ٤ حيث :
$\text{س}_{\text{هـ و}} = ٣\,\text{هـ} - \text{و}$. اكتب عناصر المصفوفة س .

بند (٦ – ٣) :

[١] اجرِ العمليات التالية – إن أمكن – مع ذكر السبب في حالة عدم إمكانية إجراء العملية :

أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & -٣ \\ ٤ & -٧ & -٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٥ & ٤ & ٧ \\ ٣ & -٤ & ٦ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٧ \\ ١١ & -١٠ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٢ & -٣ \\ ٦ & -٤ & -٦ \\ ٩ & -٨ & ٨ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

د) $[\text{س} \quad \text{ص} \quad \text{ع}] - [2\text{س} \quad -4\text{ص} \quad -\text{ع}]$.

[٢] لتكن :

$\text{ص} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$ ، $\text{ع} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\text{هـ} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

احسب : أ) $(\underline{\text{ص}} + \underline{\text{ع}}) - \underline{\text{هـ}}$ ، ب) $\underline{\text{ص}} - (\underline{\text{هـ}} - \underline{\text{ع}})$.

[٣] أوجد قيم س ، ص ، ع إذا كان :

$$\begin{bmatrix} 3\text{س} & 5 & 3\text{ص} \\ 6 & 1 & 5\text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\text{س} & 6 & 5 \\ -1 & \text{س} & \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ع} & -3 \\ 7 & 4 & 4\text{ع} \end{bmatrix}$$

بند (٦ – ٤) :

[١] إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

أوجد ناتج ما يلي :

أ) $\underline{\text{أ}} + 3\,\underline{\text{ب}}$. ب) $2\,\underline{\text{ب}} - 3\,\underline{\text{أ}}$.

جـ) $[\,\underline{\text{أ}}'\,]$. د) $\underline{\text{ب}}^2$.

[٢] أوجد ناتج ما يلي :

أ) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

[٣] إِذا كانت :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢- & \frac{١}{٢} \\ ٤ & \frac{١}{٣} \end{bmatrix} = \underline{س}$$

أوجد أ) [$\bar{\underline{س}}$] . ب) ٤ • $\underline{س}$. جـ) $\underline{س}$ • $\underline{س}$.

[٤] احسب ما يلي :

أ) $$\begin{bmatrix} ٤\,و \\ ٠ \\ ١\,و \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٧- & ٤ & ٣- \end{bmatrix}$$

ب) $$\begin{bmatrix} ٢٥ & ٣٠ \\ ٤- & ١٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٣- \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ٧- & ٥ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$$

بند (٦ – ٥) :

أحسب قيمة المحددات الآتية :

$$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٥ & ١- \\ ٣ & ٣ & ٤ \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٦ & ٣ \\ ٥ & ١٢ & ٦ \\ ٢ & ١٨ & ٩ \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & ١ \\ ١ & ٥ & ٧- \\ ٠ & ٨ & ٤ \end{vmatrix}$$

بند (٦ – ٦) :

أوجد المعكوس الضربي للمصفوفات الآتية :

$$\begin{vmatrix} ٦ & -١ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} -٣ & -٢ & ٠ \\ ٣ & ٣ & ١ \\ -٢ & -٢ & -١ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٢ \\ ٨ & ٧ & ٣ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٦ & ٥ & -٣ \\ ٢ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

بند (٦ – ٧) :

حل نظام المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات ثم المحددات :

١) ٦ س – ص = ١
–٢ س + ٣ ص = ٤

٢) ص + ٢ س – ٤ = ٠
٣ س – ١٣ = –٥ ص

٣) ع = –٢ س – ص
٤س + ٣ ص + ٢ ع = ٢
٢ س – ص = ٣ ع

٤) ٦ س + ٩ ع = ١ + ٨ ص
٣ س + ص = –٢ + ع
٦ – ص + ٢ ع = ٠

تمارين عامة

[١] إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٤ & ٣ & -١ \\ ٦ & ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

فأوجد ما يلي : أ + ب ، أ – ب ، ٤ أ – ٥ ب .

[٢] أوجد قيم س ، ص ، ع ، ل إذا كان :

$$\begin{bmatrix} ٨ & ٥ & ٤ & ع \\ ٠ & ص & ٩ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ل & ٥ & ٤ & ٢س \\ ٠ & -٣ & ٣س & ٦ \end{bmatrix}$$

[٣] إذا كانت $\underline{أ} = [\, أ_{هـ و} \,]$ مصفوفة من النوع ٣ × ٣ . اكتب المصفوفة أ بحيث :

$$أ = \begin{cases} ٥ & \text{عند } هـ + و = ٤ \\ -١ & \text{عندما } هـ + و \neq ٤ \end{cases} .$$

[٤] أختصر إلى أبسط صورة كل مما يأتي :

أ) $$\begin{bmatrix} ٩ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} ٥ + \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٧ & -١ \end{bmatrix} ٣$$

ب) $$\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٠ \\ -٥ & ١ \end{bmatrix} -٣ \begin{bmatrix} -١ & ٦ \\ ٣ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$$

جـ) $$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ١ & ٥ & ٢ \\ ٢ & ٠ & -١ \end{bmatrix} ٢$$

[٥] إذا كانت :

$$\underline{ع} = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ٠ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$$ فأوجد $\overline{\underline{ع}}$ ، $\underline{ع} \bullet \overline{\underline{ع}}$.

[٦] أوجد قيمة المحددات التالية باستخدام فروق الأقطار :

أ) $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix}$ ، ب) $\begin{vmatrix} -٢ & ٤ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix}$ ، جـ) $\begin{vmatrix} ٦ & ٠ \\ ١ & ٨ \end{vmatrix}$

د) $\begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٦ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ٤ & ٩ & ٨ \end{vmatrix}$ ، هـ) $\begin{vmatrix} ١٢ & ٩ & ٦ \\ ٦ & ٤ & ٢ \\ ٧ & ٧ & ٧ \end{vmatrix}$

[٧] أثبت بدون حل أن المحددات التالية متساوية :

أ) $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ٤ \\ ٠ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ ، ب) $\begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$

ب) $$\begin{vmatrix} ٨ & ٣ & ٢ \\ ١٥ & ١٥ & ٥ \\ -١٢ & ٤ & ٧ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١٠ & ٣ & ٢ \\ ٢٠ & ١٥ & ٥ \\ ٥ & ٤ & ٧ \end{vmatrix}$$

[٨] أثبت أن قيمة كلٍ من المحددات التالية تساوي = صفر .

$\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٨ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٢ & -١ \\ ٤ & ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} -١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & -٩ & ١ \\ -٢ & ٦ & ٤ \end{vmatrix}$

[٩] بدون نشر المحدد برهن أن :

$$٠ = \begin{vmatrix} \text{ب} + \text{جـ} & \text{أ} & ١ \\ \text{أ} + \text{جـ} & \text{ب} & ١ \\ \text{أ} + \text{ب} & \text{جـ} & ١ \end{vmatrix}$$

[١٠] أوجد المعكوس الضربي لكل من المصفوفات التالية إن أمكن :

$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٨ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٩ & ٢ \\ ٥ & ٨ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -١ & ٥ & ٤ \\ -٣ & -٤ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$

[١١] حل نظام المعادلات التالية باستخدام المصفوفات والمحددات :

١) ٢ س + ٣ ص = ٧
– س + ٢ ص = ٥

٢) ٢ س + ٣ ص = ٧
٤ س + ٦ ص = ٢٧

٣) س + ٢ ص = ١
٣ س + ٤ ص = ٢

٤) س + ص + ع = ٢
٣ س + ٢ ص + ٥ ع = ٢
٢ س – ص + ع = ٠

٥) $\frac{٣}{٢}$ س – $\frac{١}{٤}$ ص = ١
س + ص = ٢

٦) ع = – ٢ س – ص
٤ س + ٣ ص + ٢ ع = ٢
٢ س – ص = ٣ ع .

[١٢] أوجد قيمة هـ لكي يكون للمعادلتين :

أ) حل وحيد .   ب) حل لانهائي .

جـ) حل مستحيل .

■١ ٣ س + ٤ ص = ٥
٦ س + هـ ص = ١٠

■٢ س + ص – ع = ١
٢ س – ٣ ص + هـ ع = ٣
س – هـ ص + ٣ ع = ٢ .

اختبار الوحدة

[١] ضع علامة ($\surd$) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة الخاطئة في كل مما يأتي :

أ) إذا كانت المصفوفة من النوع م X ﻫ فإنها مصفوفة مربعة . (   )

ب) المصفوفة الصفرية جميع عناصرها أصفاراً . (   )

جـ) لايمكن ضرب مصفوفتين إلا إذا كان عدد أعمدة الأولى يساوى عدد صفوف الثانية . (   )

د) $\begin{vmatrix} ٠ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$. (   )

[٢] إذا كانت : $\begin{bmatrix} س & ل \\ ٩ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٩ & ٧ \end{bmatrix}$

فأوجد قيمة س ، ل .

[٣] إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٧ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

فأوجد أ – ب ، أ + ٣ ب ، $أ^{٢} + ب^{٢}$.

[٤] أوجد المعكوس الضربي للمصفوفات التالية إذا كان ممكناً :

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ١ & ٥ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \\ -١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

[٤] حل نظام المعادلات التالية باستخدام المحددات :

س + ٢ ص = – ٣ ع

س + ص = –١

س + ٢ ع = ٣ .

بند (٧ – ١) .

[١] أوجد معادلة كل من الدوائر الآتية :

أ) مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $\sqrt{٥}$.

ب) مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٢ ، ١) .

جـ) مركزها (–١ ، ٢) ، نق = ٣ .

د) مركزها (١ ، ٢) وتمر بالنقطة (٠ ، –٢) .

[٢] أوجد معادلة الدائرة التي تكون النقطتان ء (٢ ، –٣) ، هـ (٦ ، ٥) نهايتي قطر فيها .

[٣] أوجد معادلة الدائرة التي تمس محوري الاحداثيات ، وتقع في الربع الثاني ونصف قطرها ٨ وحدات .

[٤] أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (١ ، –٣) وتمس المستقيم ٢ س – ص – ٤ = ٠ .

بند (٧ – ٢) .

[١] أوجد مركز ونصف قطر كل من الدوائر الآتية :

أ) $س^٢ + ص^٢ = ١٠$.

ب) $س^٢ + ص^٢ – ٢ س + ٤ ص + ١ = ٠$.

جـ) $٤ س^٢ + ٤ ص^٢ + ١٦ س – ٤ ص + ١٥ = ٠$.

د) $س^٢ + ص^٢ + ٩ س + ٥ ص + ١,٥ = ٠$.

[٢] أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط الآتية :

أ) (٠ ، ٠) ، (أ ، ٠) ، (٠ ، ب) .

ب) (١ ، ١) ، (٢ ، –١) ، (٣ ، ٢) .

جـ) (١ ، ٢) ، (٣ ، –٤) ، (٥ ، –٦) .

عين المركز ونصف القطر في كل حالة .

[٣] أوجد معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل وتقطع أجزاء تساوى ٣ و ٤ من محوري الاحداثيات .

[٤] بين أن النقطة (١ ، ١) تقع على الدائرة :

س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٦ ص – ١٢ = ٠ ، ثم أوجد النهاية الأخرى للقطر المرسوم من هذه النقطة .

بند (٧ – ٣) .

[١] عين وضع كل من المستقيمات الآتية بالنسبة للدائرة :

س^{٢} + ص^{٢} – ٨ س + ٦ ص + ٩ = ٠ .

أ) ص – ١ = ٠ .

ب) ٢ س + ٣ ص – ١ = ٠ .

جـ) ٢ س + ٣ ص + ١٥ = ٠ .

عين في حالة التقاطع نقطتي التقاطع ، وفي حالة التماس نقطة التماس .

[٢] أوجد نقطتي تقاطع المستقيم س + ص – ١ = ٠ ، مع الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٤ .

[٣] أثبت أن المستقيم ص – ٢ س = ١ يمس الدائرة س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ص – ٤ = ٠ ، ثم أوجد نقطة التماس .

بند (٧ – ٤) .

[١] أوجد معادلة المماس للدائرة : س^{٢} + ص^{٢} – ٤ س + ٦ ص – ١٣ = ٠ عند النقطة (١ ، ٢) .

[٢] أثبت أن الدائرة س^{٢} + ص^{٢} – ٤ س – ١ = ٠ تمر بالنقطة (٣ ، –٢) ، ثم أوجد معادلة المماس عند هذه النقطة .

[٣] أوجد معادلة المماس للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٠ عند النقطة ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$) .

بند (٧ – ٥) .

[١] أوجد معادلة المماسات للدائرة : ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} – ٤ س – ٤ ص – ٤ = ٠

التي ميلها $-\frac{١}{٢}$.

[٢] أوجد معادلتي المماسين للدائرة : س^{٢} + ص^{٢} = ٣٧ ، الموازين للمستقيم س + ٦ ص = ٠ .

[٣] أوجد معادلة المماسات للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٤ ، المتعامده مع المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، $-\frac{٣}{٢}$) ، (–٣ ، ٠) .

بند (٧ – ٦) .

[١] أوجد معادلتي المماسين المرسومين من النقطة (١١ ، ٣) إلى الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٦٥ .

[٢] أوجد معادلة المماسات المرسومة من النقطة (٤ ، ٥) إلى الدائرة ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} – ٨ س + ١٢ ص + ٢١ = ٠ .

بند (٧ – ٧) .

[١] أحسب طول المماس المرسوم من النقطة (–٤ ، ٣) للدائرة :

س^{٢} + ص^{٢} – ٤ س + ٢ ص + ١ = ٠ .

[٢] أثبت أن طول المماسات المرسومة من النقطة (–١ ، ٤) للدوائر الآتية متساوية :

س^{٢} + ص^{٢} = ١٠ ، ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ١٥ ص – ٨٠ = ٠ .

[٣] عين نقطة على محور السينات حيث طول المماس المرسوم منها للدائرة :

س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س = ٠ مساوياً ٤ .

تمارين ومسائل عامة

[١] النقطتان ء (٥ ، ٣) ، هـ (–٢ ، ١) نهايتا قطر في دائرة . أوجد معادلة هذه الدائرة .

[٢] اكتب معادلة الدائرة في الحالات الآتية :

أ) مركزها (أ ، – ب) ، نق = أ + ب .

ب) مركزها (–أ ، ب) ، نق = $\sqrt{\text{ب}^2 - \text{أ}^2}$.

[٣] أوجد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم س + ٢ = ٠ ، وتمس كلاً من محوري الاحداثيات .

[٤] أوجد مركز ونصف قطر الدائرة : ٨س^2 + ٨ص^2 – ١٢س – ١٦ ص = ٠ .

[٥] أوجد معادلة الدائرة المارة برؤوس المثلث ء (–١ ، ١) ، هـ (٦ ، ٠) ، ﻭ (–٢ ، ٤) .

[٦] عين وضع المستقيم ص = س + ٢ بالنسبة للدائرة س^2 + ص^2 = ٤ . عين في حالة التقاطع نقطتي التقاطع ، وفي حالة التماس نقطة التماس .

[٧] أحسب طول الوتر الذي تقطعه الدائرة : س^2 + ص^2 + ٧ س – ٤ص + ١٠ = ٠ من المستقيم س + ٢ ص – ٣ = ٠ .

[٨] أحسب طول الوتر الذي تقطعه الدائرة : س^2 + ص^2 – ٢ س + ٢ص – ٣ = ٠ من محوري الاحداثيات .

[٩] أوجد قيمة ك بحيث يكون المستقيم ص = ك س مماساً للدائرة س^2 + ص^2 – ١٠س + ٦ص + ٢ = ٠ .

[١٠] أوجد معادلة المماس لدائرة مركزها (١ ، ٢) المرسوم من النقطة (٢ ، ٥) الواقعة عليها .

[١١] أثبت أن النقطة (–١ ، ٣) تقع على الدائرة س^2 + ص^2 – ٥س + ٨ص = ٣٩ ، ثم أوجد معادلة مماس الدائرة عند تلك النقطة .

[١٢] أوجد معادلات المماسات للدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٢ س - ٢ص - ٢ = ٠$

أ) الموازية للمستقيم الواصل بين النقطتين (١ ، ٣) ، (-١ ، ١) .

ب) المتعامدة مع المستقيم $س - ص - ٢ = ٠$.

[١٣] أوجد معادلتي المماسين المرسومين من النقطة (٤ ، ٤) إلى الدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٦ س - ٤ص - ٩ = ٠$.

[١٤] أحسب طول المماس المرسوم من النقطة (-٣ ، ٢) للدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٢ص - ٦ = ٠$.

[١٥] أثبت أن طول المماسات المرسومة من النقطة (٠ ، ٤) للدوائر الآتية متساوية :

$س^٢ + ص^٢ - ٥س + ٩ ص - ٤٦ = ٠$.

$٢ س^٢ + ٢ ص^٢ + ١٥ ص - ٨٠ = ٠$.

اختبار الوحدة

[١] أ) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (ا ، ب) ، ونصف قطرها نق .

ب) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط ء(١ ، ٠)، هـ(٥ ، ٤) ، و(٧ ، ٢)، ومعادلة المماس لها عند النقطة هـ .

[٢] أ) اكتب طول المماس المرسوم من النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) للدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٢ ا س - ٢ ب ص + جـ = ٠$.

ب) أوجد مركز ونصف قطر الدائرة : $س^٢ + ص^٢ + ٦ س - ٨ ص = ٠$ ، وطول المماس المرسوم من النقطة (١ ، -١) لهذه الدائرة .

الوحدة الثامنة الهندسة الفضائية

(٨ – ١) المستوى والفضاء :

[١] إذا كان $\overleftrightarrow{ل}_1$ ، $\overleftrightarrow{ل}_2$ مستقيمان متقاطعان $\overleftrightarrow{ل}_2$ // $\overleftrightarrow{ل}_3$. فما هي الأوضاع الممكنة لكلٍ من المستقيمين $\overleftrightarrow{ل}_1$ ، $\overleftrightarrow{ل}_3$.

[٢] $ل_1$ ، $ل_2$ مستقيمان متخالفان ، $\overleftrightarrow{ل}_1$ // $\overleftrightarrow{ل}_3$ فما علاقة $\overleftrightarrow{ل}_2$ بـ $\overleftrightarrow{ل}_3$.

[٣] إذا كان المستقيم ل يشترك مع المستوى ك بنقطة . فما علاقة $\overleftrightarrow{ل}$ بـ ك .

[٤] إذا كان المستقيم ل يشترك مع المستوى سـ بأكثر من نقطة . فما علاقة $\overleftrightarrow{ل}$ بـ سـ .

[٥] إذا اشترك مستويان سـ ، صـ بأكثر من نقطة . فما علاقة سـ بـ صـ .

[٦] ا نقطة خارج المثلث ب جـ ء ، والمطلوب تحديد الفصل المشترك لكلٍ من أزواج المستويات التالية :

١■ (ب جـ ء) ، (ا ب ء) . ٢■ (ا ب جـ) ، (ء جـ ب) .

[٧] س نقطة خارج مستوى المربع ا ب جـ ء ، والمطلوب تحديد الفصل المشترك بين أزواج المستويات التالية :

١■ (ا ب س) ، (ا ء س) . ٢■ (ا ب س) ، (جـ ء س) .

٣■ (ا ء س) ، (ب جـ س) . ٤■ (ا ء س) ، (ب ء س) .

(٨ – ٢) المستقيمات المتوازية :

[١] ا : ب جـ ء هرم ثلاثي أُخذت النقطة م على الحرف $\overline{ا ب}$ ثم ، مررّنا بالنقطة م المستوى ك بحيث يوازي مستوى القاعدة (ب جـ ء) وقاطعاً الحرفين $\overline{ا جـ}$ ، $\overline{ا ء}$ في ڡ ، هـ على الترتيب . المطلوب : أثبت أن :

١■ $\overline{م ڡ}$ // $\overline{ب جـ}$. ٢■ $\overline{ڡ هـ}$ // $\overline{ء جـ}$. ٣■ $\overline{م هـ}$ // $\overline{ب ء}$.

[٢] إذا كان سـ // صـ ، $\overleftrightarrow{ل}_1$ // $\overleftrightarrow{ل}_2$ حيث سـ ، صـ يقطعان $\overleftrightarrow{ل}_1$ ، $\overleftrightarrow{ل}_2$ وفق (ا ، ب) ، (ء ، جـ) .

المطلوب : أثبت أن الشكل ا ب جـ ء متوازي الأضلاع .

[٣] ﺍ نقطة خارجة عن مستوى المثلث ب جـ ء والنقاط ب١ ، جـ١ ، ء١ منتصفات الحروف $\overline{\text{ﺍ ب}}$ ، $\overline{\text{ﺍ جـ}}$ ، $\overline{\text{ﺍ ء}}$ على الترتيب .

أثبت أن : المستويان (ب جـ ء) ، (ب١ جـ١ ء١) متوازيان .

[٤] أضلاع الشكل الرباعي ﺍ ب جـ ء غير واقعة في مستوٍ واحد أخذنا على $\overline{\text{ﺍ ب}}$ ، $\overline{\text{ﺍ و}}$ ، $\overline{\text{ﺍ ء}}$ النقاط ل ، م ، ﻥ على الترتيب بحيث يكون $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ثم مددنا $\overline{\text{ل ﻥ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ تلاقيا في هـ ومددنا $\overline{\text{م ﻥ}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ تلاقيا في و .

المطلوب : أثبت أن : $\overline{\text{و هـ}}$ // $\overline{\text{ل م}}$.

(٨ - ٣) المستويات المتوازية :

[١] ﺍ ، ب ، جـ ، ء أربع نقاط غير واقعة في مستوٍ واحد، نُصِّفت الحروف ﺍ ب ، ﺍ جـ ، ﺍ ء بالنقاط س ، ص ، ع على الترتيب .

المطلوب :

١ ■ أثبت أن المستويين (ب جـ ء)، (س ، ص ع) متوازيان .

٢ ■ أثبت أن $\Delta\Delta$ (س ص ع) (ب جـ ء) متشابهان .

٣ ■ إذا كانت ﻥ ، م منتصفي الضلعين $\overline{\text{ء ب}}$ ، $\overline{\text{ء جـ}}$.

فاثبت أن الشكل س ص م هـ متوازي الأضلاع .

[٢] ﺍ ب جـ ء مستطيل والنقطة م غير واقعة في مستويه لتكن النقاط س ، ص ، ع ، ﻥ منتصفات الأضلاع $\overline{\text{ﺍ م}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{م ء}}$ على الترتيب . والمطلوب :

١ ■ أثبت أن الشكل س ص ع ﻥ شبه منحرف .

٢ ■ أثبت أن المستويين (ﺍ ب جـ ء) ، (س ص ع ﻥ) متوازيان .

[٣] ﺍ ب جـ ، ء ب جـ مثلثان غير واقعان في مستوٍ واحد ، فإذا كانت س منتصف $\overline{\text{ء ﺍ}}$ مررّ بالنقطة س المستوى سہ بحيث يوازي المستوى (ﺍ ب جـ) ويقطع الضلعين ء ب ، ء جـ في ص ، ع على الترتيب . المطلوب :

١ ■ أثبت أن : $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ﺍ ب}}$.

٢ ■ أثبت أن : ﻭہ (∡ ﺍ ب جـ) = ﻭہ (س ص ع) .

[٤] ا ب جـ ء ، ا ب جـ ء مستطيلان غير واقعان في مستوٍ واحد . المطلوب :

١ ■ أثبت أن الشكل ا ا١ ب ب١ مستطيل .

٢ ■ إذا كان |ا ا١| = |ا ب| فأثبت أن الشكل ا ا١ ب ب١ مربع .

٣ ■ أثبت أن المستويان (ب جـ ب١) ، (ا ء ا١) متوازيان .

تمارين عامة

[١] أكمل العبارات الآتية :

أ) يتعين المستوى بمستقيم و ... . ب) يتوازى مستقيمان إذا ... .

جـ) إذا اشترك مستويان بنقطة فإنهما ....

د) أضلاع الشكل الرباعي تقع في مستوٍ واحد إذا .... أو ....

هـ) إذا قطع مستوى ك مستويين متوازيين فإن الفصول المشتركة ....

و) المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث ....

ز) المستويان الموازيان لمستو ثالث ....

ح) إذا كان $\overleftrightarrow{ل} // \overleftrightarrow{ق}$ ، $\overleftrightarrow{ق} \subset$ ك فإن ....

ط) إذا كان ك $\cap$ ك = $\varnothing$ فإن ....

ى) المستقيم الموازي لمستويين متقاطعين ....

ك) يتساوى قياس زاويتين في الفضاء إذا ....

ل) من نقطة خارج مستو ....

[٢] أي العبارات الآتية صائبة وأيها خاطئة مع تصويب الخطأ أينما وجد :

أ) المستقيمان المتحالفان يجمعهم مستوٍ واحد .

ب) إذا وازى مستقيم مستويين كان المستويان متوازيان .

جـ) لايمكن أن يمر بنقطة معلوم مستويان موازيان لمستو ثالث .

د) جميع النقاط التى على أبعاد متساوية عن مستوٍ معلوم تقع في مستوٍ يوازى المستوى المعلوم .

هـ) إذا وازى مستقيمان متوازيان مستوى ك فإن مستوى المستقيمين يوازى المستوى ك .

و) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1 \cap \overleftrightarrow{\text{ل}}_2 = \emptyset$ فإن $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1 \,//\, \overleftrightarrow{\text{ل}}_2$.

ز) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}} \,//\,$ ے ، $\overleftrightarrow{\text{ق}} \,//\,$ ے ، فإن $\overleftrightarrow{\text{ل}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{ق}}$.

ح) إذا كان ے$_1$ // ے$_2$ والمستقيم ل يقطع ے$_1$ فإنه $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يقطع ے$_2$.

ط) إذا كان ے // ك فإن ے $\cap$ ك $= \emptyset$.

ى) إذا كان ے $\cap$ ك $= \emptyset$ فإن ے // ك .

ك) إذا توازى مستقيمان وكان أحدهما موازياً لمستوٍ معلوم كان الآخر منطبقاً على هذا المستوى .

ل) $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}_2$ متقاطعان ، ل$_1$ // ے فإن $\overleftrightarrow{\text{ل}}_2$ يقطع ے .

[٣] أ ب جـ ، ء ب جـ مثلثين غير واقعين في مستوٍ واحد نُصِّف $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ في س ، ص على الترتيب . المطلوب :

أولاً : أوجد الفصول المشتركة لأزواج المستويات الآتية :

أ) (أ ب جـ) ، (ء ب جـ). ب) (أ ب جـ) ، (ء س ص) .

جـ) (ء س ص) ، (ء ب جـ) .

ثانياً : أثبت أن : $\overline{\text{ب جـ}}$ // المستوى (ء س ص) .

[٤] أثبت أن المستويين الموازيين لمستو ثالث متوازيان .

[٥] أ ب جـ ء ، أ ب س ص متوازيا أضلاع لايجمعهم مستوٍ واحد .

أثبت أن : ء جـ س ص متوازي أضلاع .

[٦] أ ب جـ ء رباعي وجوه . برهن أن المستقيم الواصل بين منتصفي $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ يوازي المستقيم الواصل بين منتصفي $\overline{\text{ءب}}$ ، $\overline{\text{ءجـ}}$.

[٧] أ ب جـ ، أ ء هـ مثلثان غير واقعين في مستوٍ واحد . أوجد الفصل المشترك بين مستويي المثلثين في كلٍ من الحالات الآتية :

أولاً : إذا كان $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$.

ثانياً : إذا كان $\overline{\text{ب جـ}}$ يقطع $\overline{\text{ء هـ}}$ في نقطة ن .

[٨] ب جـ ء هـ متوازي أضلاع فيه الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$ واقع في المستوى ك ، والضلع $\overline{\text{ء هـ}}$ خارج المستوى ك ، برهن أن : $\overline{\text{ء هـ}} \cap$ ك $= \emptyset$.

[٩] ب جـ ء هـ متوازي أضلاع ، م نقطة غير واقعة في مستويه لتكن ب ∋ $\overline{\text{م ب}}$ ،
ولتكن جـ_1 نقطة تقاطع المستوى ب_1 هـ ء مع المستقيم $\overline{\text{م جـ}}$. أثبت أن :
ب جـ ء هـ شبه منحرف .

[١٠] م ب جـ ء رباعي وجوه قطعناه بمستوى ك يوازي مستوى القاعده ب جـ ء
وينصف $\overline{\text{م ب}}$. أثبت أن :
أ) ك ينصف كلاً من $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{م ء}}$ في نقطتين ولتكن جـ ، ء .
ب) Δ Δ ب جـ ء ، ب جـ ء متشابهان .

[١١] المستويان ى_1 ، ى_2 متقاطعان في ل من نقطة ب خارج المستويين نرسم
المستويين ك_1 ، ك_2 بحيث ك_1 // ى_2 ، ك_2 // ى_2 أثبت أن الفصل
المشترك للمستويين ك_1 ، ك_2 يوازي ل .

[١٢] ا ب جـ ء رباعي وجوه لتكن س ، ص ، ع ، م منتصفات $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ ،
$\overline{\text{ا ء}}$ ، $\overline{\text{ا ب}}$ على الترتيب . المطلوب :
أولاً : أثبت أن : $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{م ع}}$.
ثانياً : أثبت أن : الشكل س ص ع م متوازي أضلاع .
ثالثاً : أثبت أن : $\overline{\text{ب ء}}$ // المستوى س ص ع م .
رابعاً : نفرض أن ط منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ ، وأن هـ منتصف $\overline{\text{ا جـ}}$ ، بين نوع الرباعي
س ط ع هـ ، ثم أوجد الفصل المشترك بين المستويين س ط ع هـ ، س ص ع م .

[١٣] تقع دائرة (د) في المستوى ك . أوجد عدد المماسات للدائرة (د) التي توازي
مستوي ى في كل من الحالات الآتية :
أولاً : ك يقطع ى . ثانياً : ك // ى .

[١٤] إذا كان ك_1 ، ك_2 مستويين متوازيين ، وكان المثلث ب جـ ء واقع في المستوى
ك_1 ، ك_1 س ص ⊂ ك_2 ، أوجد الفصل المشترك للمستويين ب ء س ، ب جـ
ص في الحالات الآتية :
أولاً : $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$.
ثانياً : $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.

ثالثاً : $\overline{س ص}$ // $\overline{ء جـ}$.

رابعاً : $\overline{س ص}$ لايوازي أي مستقيم من مستقيمات المثلث .

[١٥] إذا مر من نقطة معلومة م ثلاثة مستقيمات غير واقعة في مستو واحد إلى مستوٍ ے . أثبت أن المستوى ك المار منتصفاتها يوازي المستوى ے .

[١٦] ٩ ب جـ مثلث ، م نقطة خارجة عن مستويه مُدَّت $\overline{٩ م}$ ، $\overline{ب م}$ ، $\overline{جـ م}$ على إستقامتها إلى $٩_١$ ، $ب_١$ ، $جـ_١$ على الترتيب بحيث كان $|م ٩| = |م ٩_١|$ ، $|م ب| = |م ب_١|$ ، $|م جـ| = |م جـ_١|$.

أثبت أن المستوى ٩ ب جـ // المستوى $٩_١ ب_١ جـ_١$.

[١٧] إذا كان $ك_١$ ، $ك_٢$ مستويين متقاطعين في $\overline{٩ ب}$ ، قطعهما مستوٍ ثالث $ك_٣$ ، وفق $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{هـ و}$ على الترتيب فإذا كان $\overline{٩ ب}$ // $ك_٣$. أثبت أن :

٩ ب // جـ ء // هـ و

[١٨] اضلاع الشكل الرباعي ٩ ب جـ ء غير واقعة في مستو واحد أخذنا على $\overline{٩ ب}$ ، $\overline{٩ جـ}$ ، $\overline{٩ ء}$ النقاط ل ، م ، ن على الترتيب بحيث كان $\overline{ل م}$ // $\overline{ب جـ}$ ، ثم مددنا $\overline{ل ن}$ ، $\overline{ب ء}$ فتلاقيا في هـ ، ومددنا $\overline{م ن}$ ، $\overline{جـ ء}$ فتلاقيا في و .

برهن أن : $\overline{هـ و}$ // $\overline{ل م}$.

[١٩] ٩ ب جـ مثلث ، م نقطة غير واقعة في مستويه أخذنا على $\overline{م ٩}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م و}$ النقاط $٩_١$ ، $ب_١$ ، $جـ_١$ على الترتيب بحيث كان :

$|م ٩| = \varnothing\ |م ٩_١|$ ، $|م ب| = \varnothing\ |م ب_١|$ ، $|م جـ| = \varnothing\ |م جـ_١|$.

أثبت أن : Δ ٩ ب جـ ~ $٩_١ ب_١ جـ_١$.

[٢٠] أثبت أن علاقة التوازي على مجموعة المستويات في الفضاء هي علاقة تكافؤ .

[٢١] ب جـ ء مثلث ، ٩ نقطة خارجة عن مستويه ليكن $ب_١$ ، $جـ_١$ ، $ء_١$ منتصفات $\overline{٩ ب}$ ، $\overline{٩ جـ}$ ، $\overline{٩ ء}$ على الترتيب .

أثبت أن :

أ) $٩_١ ب_١$ // المستوى ب جـ ء .

ب) المستويان $٩_١ ب_١ جـ_١$ ، ب جـ ء متوازيان .

[٢٢] ٢ ب جـ مثلث ، م نقطة غير واقعة في مستويه مدّ $\overline{م ٢}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$ على استقامتها إلى ٢$_١$ ، ب$_١$ ، جـ$_١$ على الترتيب بحيث كان :

$|م ٢| = |٢ ٢_١|$ ، $|م ب| = |ب ب_١|$ ، $|م جـ| = |جـ جـ_١|$. أثبت أن :

أولاً : $\frac{|م ٢|}{|٢ ٢_١|} = \frac{|م ب|}{|ب ب_١|} = \frac{|م جـ|}{|جـ جـ_١|}$

ثانياً : المستوى ٢ ب جـ // المستوى ٢$_١$ ب$_١$ جـ$_١$.

ثالثاً : $\Delta\Delta$ ٢ ب جـ ، ٢$_١$ ب$_١$ جـ$_١$ متشابهان .

اختبار الوحدة

[١] أي العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة مع تصويب الخطأ أينما وجد :

أ) إذا كان ى$_١$ // ى$_٢$ ، فإن جميع مستقيمات ى$_١$ توازي ى$_٢$.

ب) إذا توازي مستقيمان وكان أحدهما موازياً لمستوٍ معلوم كان المستقيم الآخر موازياً لهذا المستوى .

جـ) المستوى القاطع أحد مستويين متوازيين يقطع الآخر ويكون الفصلان المشتركان متوازيين .

د) من ثلاث نقاط ليست على إستقامة واحدة يمكن أن يمر أكثر من مستوٍ .

[٢] أثبت أنه إذا قطع مستوٍ ك مستويين متوازيين ى$_١$ ، ى$_٢$ وفق الفصول المشتركة ں ، ل فإن ں // ل .

[٣] ب جـ ء هـ مستطيل ، ٢ نقطة غير واقعة في مستويه . والمطلوب :

أولاً: الفصول المشتركة لأزواج المستويات الآتية :

١■ ٢ ب جـ ، ب جـ ء هـ . ٢■ ٢ ب هـ ، ٢ جـ ء .

٣■ ٢ ب ء ، ٢جـ هـ .

ثانياً : إذا كانت ب١ ، جـ١ منتصفي أب ، أجـ على الترتيب ومررّنا المستوى ك يحوي ب١جـ١ ويقطع ب هـ ، جـ ء في هـ١ ، ء١ على الترتيب .

فأثبت أن :

١■ ب١جـ١ // المستوى ب جـ ء هـ .

٢■ ب١جـ١ // جـ١ء١ .

٣■ أثبت أن الشكل ب١جـ١ء١هـ١ شبه منحرف .

ثالثاً : إذا كانت س منتصف أ ء .

فأثبت أن : ق (∢ ب جـ ء) = ق (∢ ب١ جـ١ ء١) .

البند (٩ – ٢) النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما :

[١] أوجد قيمة ما يأتي :

أ) جا (٤٥° + ٣٠°) .   ب) جتا ٧٥° .

جـ) ظا ٤٦٥° .   د) ظا ٧٥° – ظا ٣٠° – ظا ٧٥° ظا ٣٠° .

[٢] أثبت أن :

أ) جا (جـ + ٣٠) = $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ جا جـ + جتا جـ) .

ب) جتا (٤٥° – ؍) جتا (٤٥° – ب) – جا (٤٥° – ؍) جا (٤٥° – ب) = جا (؍ + ب) .

جـ) جا^{٢} ؍ – جا^{٢} ب = جا (؍ + ب) جا (؍ – ب) .

د) $\frac{\text{ظا (١٥° + س) + ظا (٣٠° – س)}}{\text{١ – ظا (١٥° + س) ظا (٣٠° – س)}}$ = ١ .

البند (٩ – ٣) النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية ونصفها :

[١] إذا كان قياس الزاوية (؍) حادة وكان جتا ؍ = $\frac{٥}{١٣}$ ، فأوجد قيمة :

جتا ٢ ؍ ، جا ٢ ؍ ، ظا ٢ ؍ .

[٢] إذا كانت جا ؍ = $\frac{٤}{٥}$ ، ٠ < ؍ < ٩٠° ، فأوجد كلاً من :

جا $\frac{؍}{٢}$ ، جتا $\frac{؍}{٢}$ ، ظا $\frac{؍}{٢}$.

[٣] أوجد قيمة $\frac{\text{٢ ظا } ٦٧\frac{١}{٢}°}{\text{١ – ظا}^{٢}\ ٦٧\frac{١}{٢}°}$.

البند (٩ – ٤) تحويل مجموع (فرق) جيبي أو جيبي تمام إلى حاصل ضرب والعكس:

[١] حول كلاً مما يأتي إلى حاصل ضرب :

أ) جا ٦٤° + جا ٤٦° .

ب) جتا ٨٥° – جتا ٣٥° .

جـ) جا ٨٥° – جا ٣٥° .

د) جا (ا + ب) + جا ا .

[٢] أثبت أن :

أ) $\frac{\text{جتا ٢ جـ} - \text{جتا ٥ جـ}}{\text{جا ٢ جـ} - \text{جا ٥ جـ}} = \text{ظا} \frac{\text{٣ جـ}}{٢}$.

ب) $\frac{\text{جتا } ٣٥^\circ - \text{جا } ٤٥^\circ}{\text{جتا } ٤٥^\circ - \text{جا } ٣٥^\circ} = \text{ظا } ٤٠$.

البند (٩ – ٥) حل المعادلات المثلثية :

[١] أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية : $٠ \leq$ س $\leq ٢\pi$.

أ) $\sqrt{٢}$ جتاس – ١ = ٠ .

ب) جتا س = –١ .

جـ) جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.

د) جاس = ٠ .

هـ) ٢ جا س – $\sqrt{٣}$ = ٠ .

و) ظا س = –١

ز) ٣ ظا س + ٢ = ٥ .

ح) ٤ جا^{٢} س = ٣ .

ط) ٩ ظا^{٢} س – ٣ = ٠ .

[٢] أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :

أ) ٦ جتا^{٢} جـ + ٥ جتا جـ + ١ .

ب) ٢٠ ظا^{٢} جـ = ٣ – ٧ ظا جـ .

جـ) ٤ جا^{٢} هـ = ٣ جا هـ .

د) ٦ جتا جـ – قا جـ + ١ = صفر .

[٣] أوجد المعادلات الآتية :

أ) جا (س $-$ $\frac{\pi}{٤}$) = جا ٢ س .   ب) ظا ٤ س = ظا ($\frac{٣}{٨}$ س + ١) .

جـ) جتا $\frac{١}{٣}$ س = جتا ($-$س) .

البند (٩ – ٦) حل المثلث وتطبيقاته :

[١] أحسب زوايا المثلث ﺍ ب جـ إذا علمت أن :

أ) $\overline{ﺍ}$ = ٣ ، $\overline{ب}$ = ٣ ، $\overline{جـ}$ = ٥ .

ب) $\overline{ﺍ}$ = ٢$\sqrt{٣}$ ، $\overline{ب}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\overline{جـ}$ = ٣ .

[٢] حل المثلث ﺍ ب جـ إذا علمت أن :

أ) ق ($\measuredangle$ ﺍ) = ٤٥° ، ق ($\measuredangle$ ب) = ٧٠° ، ﺍ = ٧سم .

ب) $\overline{ﺍ}$ = ٩سم ، $\overline{جـ}$ = ١٦سم ، ق ($\measuredangle$ ب) = ٨٠° .

جـ) $\overline{جـ}$ = ١٣سم ، ق ($\measuredangle$ جـ) = ٢٥° ، ق ($\measuredangle$ ﺍ) = ١١٠° .

[٣] ﺍ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، فإذا كانت أطوال أضلاعه $\overline{ﺍ}$ = ٦سم ، $\overline{ب}$ = ٧سم ، $\overline{جـ}$ = ٥سم . احسب محيط المثلث ونصف قطر الدائرة .

تمارين عامة

[١] أوجد القيم الآتية :

أ) جا ٣٠ْ جتا ٦٠ْ + جتا ٣٠ْ جا ٦٠ْ .

ب) جا ٤٥ْ جتا ٣٠ْ – جتا ٤٥ْ جا ٣٠ْ .

جـ) جتا ٤٥ْ جتا ٣٠ْ – جا ٤٥ْ جا ٣٠ْ .

د) جا^{٢} ٣٠ْ + ٢ جتا^{٢} ٤٥ْ + ٣ جا^{٣} ٩٠ْ .

[٢] إذا كانت ﺃ = ٦٠ْ ، ب = ٣٠ْ تحقق من أن :

أ) جا (ﺃ + ب) = جا ﺃ جتا ب + جتا ﺃ جا ب .

ب) جا (ﺃ – ب) = جا ﺃ جتا ب – جتا ﺃ جا ب .

جـ) جتا (ﺃ + ب) = جتا ﺃ جتا ب – جا ﺃ جا ب .

د) جتا (ﺃ – ب) = جتا ﺃ جتا ب + جا ﺃ جا ب .

هـ) ظا (ﺃ – ب) = $\frac{\text{ظا ﺃ – ظا ب}}{\text{١ + ظا ﺃ ظا ب}}$.

و) جتا (ﺃ + ب) = $\frac{\text{ظتا ﺃ ظتا ب – ١}}{\text{ظتا ﺃ + ظا ب}}$.

[٣] إذا كانت ظا ﺃ = $\frac{٥}{٤}$ ، أوجد قيمة ما يأتي $\frac{\text{٣جا ﺃ + ٤ جتا ﺃ}}{\text{٣جا ﺃ – ٤جتا ﺃ}}$.

[٤] إذا كانت ظتا ﺃ = $\frac{٢}{٣}$ ، أوجد قيمة ما يأتي $\frac{\text{٤جا ﺃ + ٣ جتا ﺃ}}{\text{٤جا ﺃ – جتا ﺃ}}$.

[٥] إذا كانت ظتا ﺃ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ أثبت أن : $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ ﺃ}}{\text{١ + قتا}^{٢}\text{ ﺃ}} = \frac{٣}{٥}$.

[٦] إذا كانت جا ﺃ = $\frac{٤}{٥}$ أثبت أن : $\frac{\text{٤ ظا ﺃ – ٥جتا ﺃ}}{\text{قا ﺃ + ظتا ﺃ}} = \frac{٢٨}{٢٩}$.

[٧] إذا كانت جا ﺃ = $\frac{٣}{٥}$ أثبت أن : ٤ ظا ﺃ + ٣ جا ﺃ – ٦ جتا ﺃ = صفر .

[٨] إذا كانت ظا ؏ = $\frac{٤}{٣}$ أثبت أن : $\sqrt{\frac{\text{قا ؏ − قتا ؏}}{\text{قا ؏ + قتا ؏}}} = \frac{١}{\sqrt{٧}}$.

[٩] إذا كانت ظا ؏ = $\sqrt{٧}$ أثبت أن : $\frac{\text{قتا}^{٢}\text{ ؏ − قا}^{٢}\text{ ؏}}{\text{قتا}^{٢}\text{ ؏ + قا}^{٢}\text{ ؏}} = \frac{٣}{٤}$.

[١٠] إذا كانت ظا ؏ = $\sqrt{٢}$ − ١ أثبت أن : جا ؏ جتا ؏ = $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$.

[١١] إذا كانت ظا ؏ = ٢ + $\sqrt{٣}$ أثبت أن : جا ؏ جتا ؏ = $\frac{١}{٤}$.

[١٢] إذا كانت ظا ؏ = $\frac{٥}{١٢}$ أثبت أن : ظا^{٢} ؏ − جا^{٢} ؏ = ظا^{٢} ؏ جا^{٢} ؏ .

[١٣] أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :

أ) جا س − ١ = صفر . ب) جتا س = −١ .

جـ) ٣ ظاس = −٣ . د) ٣ جتا س = ٢ .

هـ) جا س جتا س = $\frac{١}{٤}$. و) جتا^{٢} س − جا^{٢} س = $\frac{١}{٢}$.

ز) ٣ جتا^{٢} س − جتا س = ٢ . ح) جا ٢ س + جتا س = صفر .

[١٤] حل المثلث ؏ ب جـ إذا علمت أن :

أ) ؏ = ٣٤١ ، ب = ٤٠٥ ، ق (∡ جـ) = ١١٦° .

[١٥] إذا كان $\overline{\text{؏}}$ = ٣٥سم ، $\overline{\text{ب}}$ = ٤٥سم ، $\overline{\text{جـ}}$ = ٥٥سم ، أوجد محيط هذا المثلث .

اختبار الوحدة

[١] بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد :

أ) ظا ١٥° . ب) جتا ٢٨٥° . جـ) $\frac{\text{ظا ١٨٠° + ظا ١٢°}}{\text{١ – ظا ١٨° ظا ١٢°}}$.

[٢] أوجد قيمة كل من النسب الآتية :

أ) جا (ا + ب) . ب) جا (ا – ب) .

جـ) جتا (ا – ب) . د) جتا (ا + ب) .

[٣] إِذا كان جا ا = $\frac{٨}{١٧}$ ، ٩٠° < ا < ١٨٠° ، أوجد قيمة جا $\frac{ا}{٢}$ ، جتا $\frac{ا}{٢}$.

[٤] إِذا كان جتا ا = $\frac{٥}{١٣}$ ، ٠° < ا < ٩٠° احسب قيمة :

جا ا ، جا ٢ا ، جتا ٢ا ، ظا ٢ا .

[٥] أوجد مجموعة الحل للمعادلتين الآتيتين ٠ < س ≤ ٢ π .

أ) $\sqrt{٢}$ جا س – ١ = صفر .

ب) ١٢ جا^{٢} س – ٥ جا س – ٢ = صفر .

[٦] حل المثلث ا ب جـ الذي فيه : ق (∢ ا) = ٣٥° ، ق (∢ ب) = ٧٥° ، $\overline{ا}$ = ١٠ سم .

الوحدة العاشرة الاحصاء والاحتمالات

البند (١٠ – ١) مراجعة :

[١] إذا كان لدينا درجات عشرة طلاب في أحد الاختبارات التحصيلية لمادة الرياضيات (الدرجة من ٦٠) مبينة كما يلي : ١٥ ، ٣١ ، ٢٨ ، ٤٣ ، ٢٢ ، ٥١ ، ١٩ ، ٣٧ ، ٢٥ ، ١٧ .

أوجد :

١ ■ الانحراف المتوسط للدرجات .
٢ ■ التباين للدرجات .
٣ ■ الانحراف المعياري للدرجات .

[٢] فيما يلي جدول التوزيع التكراري الذي يمثل ٥٠ طالباً في امتحان تحصيلي (الدرجة من ٦٠) .

الفئات	١٠–١٤	١٥–١٩	٢٠–٢٤	٢٥–٢٩	٣٠–٣٤	٣٥–٣٩	٤٠–٤٤	٤٥–٤٩	٥٠–٥٤
$ك_ر$	٣	٢	٥	٩	١٢	٨	٤	٢	٥

أوجد :

١ ■ الانحراف المتوسط للبيانات .
٢ ■ التباين للبيانات .
٣ ■ الانحراف المعياري للبيانات .

البند (١٠ – ٢) الارتباط وأشكال الانتشار :

[١] إذا كان الجدول التالي يوضح أوزان عينة مكونة من ١٢ أب ، (س) وأكبر الأبناء (ص) .

الوزن (س) للأب بالكيلو جرام	٦٥	٦٣	٦٧	٦٤	٦٨	٦٢	٧٠	٦٦	٦٨	٦٧	٦٩	٧١
الوزن (ص) للأبن الأكبر بالكيلو جرام	٦٨	٦٦	٦٨	٦٥	٦٩	٦٦	٦٨	٦٥	٧١	٦٧	٦٨	٧٠

أ) ارسم شكل الانتشار .

ب) احسب معامل بيرسون للارتباط الخطي بين س ، ص .

جـ) أحسب معامل سبيرمان لارتباط الرتب بين س ، ص .

[٢] تقدم ٨ طلاب في امتحانين الأول في الفيزياء (س) ، والثاني في الكيمياء (ص) (الدرجة من عشرة) وكانت درجاتهم كما هي مبنة في الجدول الآتي :

س	٧	٣	٦	٤	١	٨	٢	٥
ص	٦	١	٨	٢	٣	٧	٥	٤

أوجد معامل إرتباط الرتب بين س ، ص .

[٣] إذا كان مجموع نواتج ضرب العلامات المعيارية على اختبارين لمجموعة تتألف من ٨٠ طالب يساوى ٥٦ ، فما مقدار معامل الارتباط الخطي بين العلامات على هذين الاختبارين ؟

البند (١٠ – ٣) الانحدار :

[٤] الجدول التالي يوضح عدد العاملين بالزراعة (س) وغير العاملين بها (ص) لكل مليون من السكان في الجمهورية اليمنية للأعوام (٩٤ – ٢٠٠٠م) .

السنة	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	٢٠٠٠
عدد العاملين بالزراعة (س)	١٣	١٢	١١	١٠	٩	٨	٧
عدد غير العاملين بالزراعة (ص)	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤

أوجد : معادلة انحدار ص على س في الجمهورية اليمنية للأعوام (٩٤ – ٢٠٠٠م) .

[٥] إذا كان معامل الارتباط بين س ، ص هو : $ر = ٠,٦٠$ ، وإذا كانت

$\bar{س} = ١٠$ ، $\bar{ص} = ٢٠$ ، $ع_{س} = ١,٥$ ، $ع_{ص} = ٢$.

أوجد : ١ ■ معادلة انحدار ص على س .

٢ ■ معادلة انحدار س على ص .

[٦] فيما يلي درجات ١٠ طلبه في مادتي الأحياء (س) والكيمياء (ص) (الدرجة من ٦٠) .

س	٢٠	١٨	١٦	١٥	١٤	١٢	١٢	١٠	٨	٥
ص	١٢	١٦	١٠	١٤	١٢	١٠	٩	٨	٧	٢

أوجد : ١ ■ معادلة انحدار ص على س .

٢ ■ إذا كانت درجة أحد الطلبة في س = ١٣ درجة . فما درجته في ص ؟

البند (١٠ - ٤) الاحتمالات :

[٧] إذا كانت وسائل المواصلات بين الحديدة وعدن هي الطائرة والباخرة والسيارة ، والمطلوب : اكتب فضاء العينة المرتبطة بوسائل المواصلات لرحلة ذهاب من الحديدة إلى عدن ، ثم العودة إلى الحديدة .

[٨] باستخدام السؤال [٧] اكتب كلا من الأحداث التالية :

١ ■ حدث عدم استخدام السيارة .

٢ ■ حدث استخدام نفس الوسيلة في الذهاب والعودة .

٣ ■ حدث استخدام الباخرة في الذهاب وعدم استخدام الطائرة في رحلة العودة .

[٣] إذا كان (ع ، حا) فضاءً احتمالياً لتجربة عشوائية ، حادثة احتمال معرفة على الفضاء ع وكان: حا (أ) = $\frac{١}{٤}$ ، حا (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، حا (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$.

أوجد :

١ ■ حا (أ ∪ ب) .

٢ ■ حا ($\overline{\text{أ}}$ ∪ $\overline{\text{ب}}$) .

٣ ■ ($\overline{\text{ب}}$ ∩ أ) .

٤ ■ حا ($\overline{\text{أ}}$ ∩ $\overline{\text{ب}}$) .

تمارين عامة

[١] إذا كانت نتيجة عشرة طلاب في امتحان نصف العام (س) وآخر العام (ص) في مادة الاحصاء كما هي مبينة في الجدول التالي . حيث نتيجة نصف العام من ٣٠ ، وآخر العام من ٦٠ .

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
امتحان نصف العام (س)	٢٠	١٩	٢١	١٨	٢٧	٢٥	٢٦	٢٣	٢٢	٢٤
امتحان أخر العام (ص)	٥٥	٥٢	٥٣	٥٤	٥٨	٥٦	٥١	٥٠	٥٧	٤٥

أوجد معامل الارتباط الخطي بين نتيجة هؤلاء الطلاب في امتحانهم نصف العام وأخر العام لمادة الأحصاء ، ثم استخدم ذلك في إيجاد معادلة انحدار ص على س.

[٢] القيت حجري نرد مرتين متتاليتين . اكتب فضاء العينة لهذه التجربة ومثل هذا الفضاء بيانياً على المستوى الديكارتي ، واذكر عدد نواتجها .

[٣] سحبت بطاقتان الواحدة تلو الأخرى من بين ٨ بطاقات مرقمة ١ ، ٢ ، ٣ ، ...، ٨ مع اعادة البطاقة المسحوبة أولاً قبل سحب الثانية . ما عدد عناصر فضاء العينة ؟

وإذا كان ﺃ = حادثة كلا البطاقتين يحمل عدداً أولياً .

ب = حادثة كلا البطاقتين يحمل عدداً زوجياً .

اكتب الحادثتين ﺃ ، ب ، ثم أوجد ﺃ $\cap$ ب .

[٤] عرِّف ما يلي :

١ ■ التجربة العشوائية .

٢ ■ مجموعة احداث فضاء العينة .

٣ ■ الحادثة .

٤ ■ الحادثة الأكيدة .

٥ ■ الحادثة المستحيلة .

٦ ■ شرط تنافي حادثتين .

٧ ■ دالة الأحتمال .

٨ ■ فضاء الأحتمال .

[٥] إذا كان ا $\supset$ ب ، حا (ا) = $\frac{١}{٥}$ ، حا (ب) = $\frac{١}{٢}$.

أوجد : حا (ب $\cap$ ا) ، ثم بيّن هل ا ، ب حادثتين متنافيتين ؟

[٦] إذا كانت ا ، ب حادثتين في فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان حا (ا) = $\frac{١}{٢}$ ،

حا (ا $\cup$ ب) = $\frac{٣}{٤}$ ، حا (ب) = $\frac{٥}{٨}$. أوجد :

١■ حا (ا $\cap$ ب) . ٢■ جا ($\bar{ا}$ $\cup$ $\bar{ب}$) .

٣■ حا (ب $\cap$ $\bar{ا}$) . ٤■ (ا $\cap$ $\bar{ب}$) .

[٧] القى حجر نرد منتظم وملاحظة العدد الذي يظهر فيه .

أوجد احتمال :

أ) ظهور عدد زوجي أو أولي .

ب) ظهور عدد فردي وأولي في نفس الوقت .

جـ) ظهور عدد عدد أولي .

د) هل ا ، جـ حادثتين متنافيتين ؟

[٨] إذا كان $\bar{س}$ = ٢٥ ، $\bar{ص}$ = ٥٠ ، ع $_{س}$ = ٧ ، ع $_{ص}$ = ١٠ ، ر = ٠,٤ .

اكتب معادلة الانحدار التي تتنبأ بها بقيم ص من خلال قيم س .

[٩] إذا كانت : س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ا ، ب ، جـ } أوجد مجموعة حاصل ضرب س × ص ، وإذا كانت و = { (١ ، جـ) } هل س ، و حادثتين متنافيتين؟اذكر السبب وإذا كانت ع = س × ص احسب احتمال ظهور عدد أولي .

[١٠] إذا كانت علامات سبعة طلاب في اختبارين تحصيليين س ، ص (الدرجة من ١٠) كما هي مبينة في الجدول التالي :

س	٣	٩	٧	٨	٤	٧	٥
ص	٢	٧	٨	٦	٦	٥	٧

أوجد : ١■ معامل بيرسون بين س ، ص .

٢■ معامل سبيرمان لأرتباط الرتب بين س ، ص .

[١١] سحبت بطاقة عشوائياً من بين ١٠٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ١٠٠ . أوجد احتمال أن العدد على البطاقة المسحوبة :

١ ■ يقبل القسمة على ١٠ . ٢ ■ يقبل القسمة على ١٧ .

٣ ■ يقبل القسمة على ١٠ أو ١٧ .

[١٢] الجدول التالي يوضح معدل المواليد (س) والوفيات (ص) بالمائة لكل ١٠٠٠ من السكان في الجمهورية اليمنية للأعوام (٩١ – ٢٠٠٠م) .

السنة	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	٢٠٠٠
معدل المواليد ٪ (س)	٢٧	٢٥	٢٣	٢٤	٢٢	٢١	٢٠	١٨	١٩	١٧
معدل الوفيات٪ (ص)	١٤	١٢	١٣	١١	٩	١٠	٨	٥	٧	٦

أوجد : ١ ■ معامل الأرتباط الخطي بين ص ، س .

٢ ■ معادلة انحدار س على ص .

٣ ■ إذا كان معدل المواليد في سنة ما = ٢٩٪ .

فما متوقع معدل الوفيات لنفس السنة .

[١٣] تتسابق ثلاثة جياد (خيول) ا ، ب ، جـ إذا كان احتمال فوز ا هو ضعف احتمال فوز ب واحتمال فوز ب هو ضعف احتمال فوز جـ . فما هو احتمال فوز كل واحد منهما . أو بعبارة أخرى ما هي الاحتمالات حا (ا) ، حا (ب) ، حا (جـ)؟

[١٤] مجموعة من الموظفين بإحدى المؤسسات دخولها المنظوره (س) وانفاقها الاستهلاكي (ص) بالألف كما هي مبينه في الجدول التالي :

الدخل (س)	١٥	٢٠	١٧	٢٢	١٨	١٤	١٩	٢١	٢٤	١٨
الدخل (ص)	٢٥	٣٦	٢٨	٤٠	٢٧	٢٤	٣٨	٣٥	٤٢	٣٠

أوجد : ١ ■ معامل سبيرمان لارتباط الرتب بين س ، ص .

٢ ■ معادلة انحدار الانفاق على الدخل .

٣ ■ قدر الانفاق الاستهلاكي للموظفين الذين دخولهم كما يلي :

أ) ١٦٠٠٠ ريال . ب) ٢٣٠٠٠ ريال .

جـ) ٢٥٠٠٠ ريال . د) ١٣٠٠٠ ريال .

[١٥] سحبت ورقة عشوائياً من مجموعة أوراق اللّعب محكمة الخلط . أحسب احتمال

كل من الحوادث التالية : أ = الورقة المسحوبة تحمل صورة الولد .

ب = الورقة المسحوبة صوره . جـ = الورقة المسحوبة حمراء .

د = الورقة المسحوبة صوره حمراء .

اختبار الوحدة

[١] إذا كانت نتيجة امتحان ٨ طلاب في مادة اللغة العربية (س) واللغة الانجليزية (ص) كما هي مبينة في الجدول التالي :

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
امتحان اللغة العربية (س)	٧٥	٦٠	٣٥	٥٢	٧٧	٨٢	٤١	٥٥
امتحان اللغة الانجليزية (ص)	٥١	٦١	٦٥	٨٥	٤٥	٦٣	٧٣	٨٢

أوجد :

١ ■ معامل الارتباط الخطي بين س ، ص .

٢ ■ معامل سيبرمان بين س ، ص .

٣ ■ معادلة انحدار ص على س .

٤ ■ معادلة انحدار س على ص .

٥ ■ إذا كانت درجة احد الطلاب في اللغة الانجليزية = ٦٧ درجة . أوجد الدرجة المتوقعة التي يمكن ان يحصل عليها نفس الطالب في اللغة العربية ؟

[٢] في إِحدى المسابقات لشغل إِحدى الوظائف تقدم رجلان $ر_١$ ، $ر_٢$ ، وثلاث سيدات $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، وكان احتمال فوز الرجال متساوياً واحتمال فوز السيدات متساوياً ولكن احتمال فوز الرجل ضعف احتمال فوز السيدة . أوجد :

١ ■ احتمال أن تفوز إِحدى السيدات بالوظيفة .

٢ ■ إِذا كان الرجل $ر_١$ هو زوج السيدة $س_١$. فما هو احتمال أن يفوز أحدهما بالوظيفة ؟

تم بحمد الله