الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الثاني الثانوي (القسم العلمي)

الجزء الثاني

فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً

د. أمة الإله علي حُمد الحوري
أ. سالمين محمد باسلوم (منسقاً)
د. عوض حسين البكري
د. محمد علي مرشد
د. محمد رشاد الكوري
أ. يحيى بكار مصفر
د. محمد حسن عبده المسوري
أ. عبدالباري طه حيدر
د. عبدالله سالم بن شحنة
أ. نصر محمد بدر
د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري
أ. جميلة إبراهيم الرازحي
د. علي شاهر القرشي
أ. عادل علي مقبل البنأ
أ. مريم عبدالجبار سلمان
أ. عبدالرحمن عبدالله عثمان
أ. يحيى محمد الكنز

فريق المراجعة والتطوير:

د/ أمة الآله علي حُمد الحوري.
أ/ أحمد عائش عبدالله الحيمي.
أ/ عبدالحكيم حسن السفياني.
أ/ شرف عثمان الخامري.
أ/ يحيى محمد الكنز.
أ/ عارف سيف الشرعبي.
أ/ جميلة إبراهيم الرازحي.
أ/ حميد الرومي.

الإخراج الفني

صف طباعي وتصميم وإخراج: جلال سلطان علي

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني

١٤٣٥هـ / ٢٠١٤م

النشيد الوطني

رددي أيتها الدنيا نشيدي ردديه وأعيدي وأعيدي
واذكري في فرحتي كل شهيدِ وامنحيه حُللاً مِنْ ضوءِ عيدي

رددي أيتها الدنيا نشيدي
رددي أيتها الدنيا نشيدي

وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي أنت عهدٌ عالقٌ في كل ذِمّة
رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُهُ من كل شمس اُخْلُدي خافِقةً في كل قِمّة
أمتي .. أمتي .. إمنحيني البأس يا مصدر بأسي واذخُريني لكِ يا أكرمَ أمة

عشتُ إيماني وحبّي أمميًا
ومسيري فوق دربي عربيا
وسيبقى نبضُ قلبي يمنيا
لن ترى الدنيا على أرضي وصيا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

د. عبدالله عبده الحامدي.	أ/ علي حسين الحيمي.
د/ صالح ناصر الصوفي.	د/ أحمد علي المعمري.
أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.	أ.د/ صالح عوض عرم.
أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.	د/ إبراهيم محمد الحوثي.
د/ عبدالله علي أبو حورية.	د/ شكيب محمد باجرش.
د/ عبدالله ملس.	أ.د/ داوود عبدالملك الحدابي.
أ/ منصور علي مقبل.	أ/ محمد هادي طواف.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.	أ.د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
أ.د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.	أ/ محمد عبدالله زبارة.
أ.د/ محمد حاتم المخلافي.	أ/ عبدالله علي إسماعيل.

د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

قررت اللجنة العليا للمناهج طباعة هذا الكتاب .

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم

في اطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية.

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية د يناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات.

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعد يلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً ، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصاد ر أهمها: الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبمايتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي.

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها.

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدروسة لتحقيق أهد افها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحد يث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية.

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول

وزير التربية والتعليم

رئيس اللجنة العليا للمناهج

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم المرسلين وآله وصحبه وسلم .

إن إعادة النظر في مناهج الرياضيات وكتبها المدرسية أمر ضروري تحتمه مواكبة التطور العلمي ، وتحديث تربويات الرياضيات إضافة إلى مسايرة التغيرات الاجتماعية .

واستجابة لذلك يأتي هذا الكتاب « كتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي – القسم العلمي » كحلقة ضمن سلسلة متكاملة على مرحلتين: الأساسية (١ – ٩)، والثانوية من (الأول الثانوي إلى الثالث الثانوي) .

لقد عُرضت مواضيع الكتاب في تماسك وتكامل وفق تسلسل علمي ونفسي تربوي ، ومراعاة للفروق الفردية،وتم تقديم المادة الدراسية بأسلوب سلس واضح لاغموض فيه ولاتعقيد؛ حيث أوردنا قدراً كافياً من الأمثلة بعد العرض النظري وأتبعنا ذلك بعدد من التمارين والمسائل آملين إتاحة فرص كثيرة للتعامل مع المادة ؛ ليكون الطالب محور التعلم معتمداً على النشاط بدافع ذاتي محققاً بذلك الأهداف الوجدانية .

واتساقاً مع كتاب الصف الأول الثانوي والمواد المرافقة له ؛ فإن هذا الكتاب وما يرافقه من كتاب التمارين ، ودليل المعلم يهتم اهتماماً كبيراً بالمفاهيم الأساسية إلى جانب تقديمه معارف سليمة ومراعاته انسجام الموضوعات مع عمليات التعلم الطبيعي للطلبة كما يحفز المدرسين على ابتكار أساليب تدريس جديدة بما يضمن لطلبتهم تعلماً فاعلاً .

ومن أهم أهداف وزارة التربية والتعليم أن يظل التطوير في نمو وتطور مستمرين ، بمتابعة كل جديد في تدريس الرياضيات وهذا لايتأتى إلا بالاستفادة من واقع التطبيق في الميدان التدريسي . فإذا راعينا كل المبادئ المذكورة أعلاه بقدر ما وفقنا المولى عز وجل بإعداد هذه المواد التربوية في ضوء استراتيجيات تهدف إلى تقديم الأجود (مادة وطريقة) ؛ فإننا ننظر بشوق بالغ أن يوافينا كافة ذوي العلاقة بملاحظاتهم بغية الاستفادة منها .

نسأل المولى العلي القدير أن نكون قد وفقنا في كل ما نصبو إليه فهو ولي التوفيق والهادي إلى سواء السبيل .

المؤلفون

المحتويات

تابع المحتويات

٦ – ١ المصفوفات

تمهيد : ليكن أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ خمسة طلاب ، وكانت درجاتهم في مادة الرياضيات هي ٨٥ ، ٧٠ ، ٦٩ ، ٧٢ ، ٨٤ على التوالي ، درجاتهم في مادة الكيمياء هي ٧٧ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٧٣ ، ٨٥ على التوالي ، فإنه يمكنّ تنظيم هذه المعلومات بجدول كالآتي :

المواد / الطلاب	أ	ب	جـ	ء	هـ
الرياضيات	٨٥	٧٠	٦٩	٧٢	٨٤
الكيمياء	٧٧	٧٤	٧٥	٧٣	٨٥

جدول (٦ – ١)

يعبر الصف الأول في الجدول عن درجات الطلاب في مادة الرياضيات ، ويعبر الصف الثاني عن درجاتهم في مادة الكيمياء .

وبالنسبة للأعمدة نجد أن العمود الأول يعبر عن درجات الطالب أ في المادتين معاً ، ويعبر العمود الثاني عن درجات الطالب ب في المادتين معاً ... وهكذا .

ويمكن التعبير عن الجدول (٦–١) على النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} ٨٥ & ٧٠ & ٦٩ & ٧٢ & ٨٤ \\ ٧٧ & ٧٤ & ٧٥ & ٧٣ & ٨٥ \end{bmatrix}$$

أو بالصورة :

$$\begin{pmatrix} ٨٥ & ٧٠ & ٦٩ & ٧٢ & ٨٤ \\ ٧٧ & ٧٤ & ٧٥ & ٧٣ & ٨٥ \end{pmatrix}$$

وهذا ما يسمَّى بالمصفوفة ، وسوف نستخدم القوسين المستطيلين في كتبنا [ ] للدلالة على المصفوفة .

تعريف (٦–١)

المصفوفة عبارة عن تنظيم عددي مؤلف من (م ن) عنصراً مرتبة في جدول مستطيل ، مكوّن من م صفاً و ن عموداً ، حيث م ، ن ∈ ط* .
ويقال أن المصفوفة من الشكل م × ن ، إذا كانت تحتوي م صفاً و ن عموداً .

ولقد جرت العادة أن يرمز للمصفوفة بحرف تحته شرطة مثل : أ ، ب ، جـ ، س ، ...

ويرمز لعناصر مصفوفة بحرف واحد يحمل دليلين متتابعين . يرمز الأول منهما لرقم الصف الذي يقع فيه هذا العنصر ويرمز الآخر لرقم العمود الذي يقع فيه هذا العنصر ، كما هو مبين في المصفوفة التالية :

$$
\begin{array}{lccccc}
 & \text{العمود الذي رقمه ن} & & \text{العمود الثاني} & \text{العمود الأول} & \\
\begin{array}{l}\text{الصف الأول}\\ \text{الصف الثاني}\\ \text{الصف الثالث}\\ \\ \\ \\ \text{الصف الذي رقمه م}\end{array} &
\multicolumn{4}{c}{\left[\begin{array}{cccc}
\text{أ}_{\text{ن١}} & \cdots & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{١١}} \\
\text{أ}_{\text{ن٢}} & \cdots & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{١٢}} \\
\text{أ}_{\text{ن٣}} & \cdots & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{أ}_{\text{١٣}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{أ}_{\text{نم}} & \cdots & \text{أ}_{\text{٢م}} & \text{أ}_{\text{١م}}
\end{array}\right]} & = \underline{\text{أ}}
\end{array}
$$

هذه المصفوفة من الشكل م × ن ، ويستخدم الرمز [$\text{أ}_{\text{هـو}}$] أيضاً للدلالة للمصفوفة أ ؛ حيث هـ = ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، م ، و = ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، ن . إن $\text{أ}_{\text{هـو}}$ يمثل عنصراً عاماً في المصفوفة أ ؛ حيث يرمز هـ إلى ترتيب الصف الذي يقع فيه هذا العنصر ، بينما يرمز و إلى ترتيب العمود الذي يقع فيه هذا العنصر ، ونلاحظ أن هذه المصفوفة تحتوي على :

- ١ م من الصفوف وكل صف يحتوي على ن من العناصر .
- ٢ ن من الأعمدة وكل عمود يحتوي على م من العناصر .

أمثلة على المصفوفات :

$$
\left[\begin{array}{cc} \text{١} & \text{٣} \\ \text{٠} & \text{١} \end{array}\right] = \underline{\text{ب}} \quad ، \quad
\left[\begin{array}{ccc} \text{٤} & \text{٢} & \text{١} \\ \text{١−} & \text{٥} & \text{٣−} \end{array}\right] = \underline{\text{أ}}
$$

$$
\left[\begin{array}{c} \text{١} \\ \text{٣} \\ \text{٢} \end{array}\right] = \underline{\text{ء}} \quad ، \quad
\left[\begin{array}{cccc} \text{٢−} & \text{٤} & \text{٣} & \text{١} \end{array}\right] = \underline{\text{جـ}}
$$

ونلاحظ أن : المصفوفة أ عبارة عن ستة عناصر مرتبة في صفين وثلاثة أعمدة .

وحسب التعريف (٦–١) نقول أن المصفوفة أ من الشكل ٢ × ٣ ؛ حيث م = ٢ ، ن = ٣

كذلك ب مصفوفة من الشكل ٢ × ٢ (لماذا؟)

وإن جـ مصفوفة من الشكل ١ × ٤ (لماذا؟)

وإن ء مصفوفة من الشكل ٣ × ١ (لماذا؟)

تدريب (٦ – ١)

عين عناصر الصفوف والأعمدة للمصفوفات ب ، جـ ، ء فيما سبق .

تساوي مصفوفتين :

تعريف (٦ – ٢)

يقال أن المصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ متساويتان [وتكتب $\underline{أ} = \underline{ب}$] إذا وفقط إذا تحقق الشرطان :

١ ■ $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ من نفس الشكل .

٢ ■ $أ_{هـ و} = ب_{هـ و}$ لجميع قيم هـ ، و .

مثال (٦ – ١)

إذا كان $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ -٣ & ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & س \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$

أوجد قيم كلٍّ من س ، ص .

الحـــل :

∵ المصفوفتان متساويتان . ∴ س = ٢ ، ص = ٤ .

مثال (٦ – ٢)

لتكن $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ -٣ & ٠ & -٥ \end{bmatrix}$

أوجد عناصر المصفوفة أ عندما $\underline{أ} = \underline{ب}$

الحـــل :

∵ $\underline{أ} = \underline{ب}$

∴ $أ_{١١} = ٣$ $أ_{٢١} = ٢$ $أ_{٣١} = ١$

$أ_{١٢} = -٣$ $أ_{٢٢} = ٠$ $أ_{٣٢} = -٥$.

تمارين (٦ – ١)

[١] أ ، ب ، جـ ، ء أربع مدن المسافة بين أي مدينتين بالكليومترات موضحة في الجدول الآتي :

	أ	ب	جـ	ء
أ	٠	٥٠	٧٥	١٠٠
ب	٥٠	٠	١٢٠	٥٤
جـ	٧٥	١٢٠	٠	٨٠
ء	١٠٠	٥٤	٨٠	٠

أ) اكتب مصفوفة (ولتكن $\underline{\text{س}}$) تمثل هذه البيانات .

ب) ماذا تعني $\text{س}_{٣٤}$ ، $\text{س}_{٤٣}$ ؟

جـ) اكتب عناصر الصف الثاني للمصفوفة $\underline{\text{س}}$.

د) اكتب عناصر العمود الثالث للمصفوفة $\underline{\text{س}}$.

[٢] ما عدد العناصر في كل من المصفوفات التالية :

أ) مصفوفة من الشكل ٤ × ٢ ، ب) مصفوفة من الشكل ٢ × ٣ .

جـ) مصفوفة من الشكل ٧ × ٥ .

[٣] أوجد قيم س ، ص ، ع ، ل في كل مما يأتي :

أ) $$\begin{bmatrix} \text{س} - ٣ & ٣\text{ص} - ١ \\ \text{س} + ٥ & ١١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ \text{ع} & ٢\text{ل} - ٥ \end{bmatrix}$$

ب) $$\begin{bmatrix} ٢\text{س} & ٣ & -٤ & \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & \text{ص} & \text{ع} + \text{ل} & \text{ل} \end{bmatrix}$$

جـ) $$\begin{bmatrix} ٣ & ٤\text{ص} \\ \text{ل} & ٣\text{ع} - ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} - ٢ & ٤ \\ \text{ص} + \text{ع} & ٥ \end{bmatrix}$$

[٤] اكتب مصفوفة $\underline{\text{ب}}$ من الشكل ٢ ×٢ . إذا علمت أن عناصر الصف الأول هي : ٣ ، ٥ ، وعناصر الصف الثاني هي : ٤ ، ٢ .

[٥] اكتب المصفوفة $\underline{\text{ص}}$ إذا علمت أنها من الشكل ٤ × ٣ ، وأن عناصر الصف الأول هي : ا ، ب ، جـ ، وعناصر الصف الثاني هي : $\bar{\text{ا}}$ ، $\bar{\text{ب}}$ ، $\bar{\text{جـ}}$ ، وعناصر الصف الثالث هي : حاصل ضرب عناصر الصف الأول في $\frac{٣}{٤}$ على الترتيب ، وعناصر الصف الرابع هي حاصل ضرب عناصر الصف الثاني في −٢ على الترتيب .

[٦] إذا كانت $\underline{\text{ا}} = [\text{ا}_{\text{هـ و}}]$ مصفوفة من الشكل ٣ × ٢ اكتب المصفوفة $\underline{\text{ا}}$ برموز عناصرها .

٦ − ٢ بعض المصفوفات الخاصة

المصفوفات أنواع كثيرة ، ومن أهم ما يحدِّد أنواعها (أشكالها) عدد صفوفها وأعمدتها، إضافة إلى بعض الخواص الأخرى.

نتناولها في هذا البند كما يلي :

١ ■ **المصفوفة المستطيلة** : وهي المصفوفة التي فيها م ≠ ن .(أي أن عدد صفوفها يختلف عن عدد أعمدتها) .
وفي الحالة التي فيها م = ١ (أي أن عدد صفوفها يكون صفاً واحداً ، فإنها تسمَّى « مصفوفة الصف »، أو مصفوفة أفقية) وتكون من الشكل ١ × ن . وعندما تكون ن = ١ تسمى « مصفوفة العمود » أو مصفوفة رأسية ، وتكون مصفوفة من الشكل م × ١ .

٢ ■ **المصفوفة الصفرية** : وهي مصفوفة من الشكل م × ن وجميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز $\underline{\dot{\text{ـ}}}$.

■ ٣ **المصفوفة المربعة** : وهي مصفوفة من الشكل ن × ن . أي أن عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها ، وفي هذه الحالة يقال أن المصفوفة من الرتبة ن .

$$\begin{bmatrix} أ_{ن١} & \cdots & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{ن٢} & \cdots & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ أ_{ن ن} & \cdots & أ_{٢ن} & أ_{١ن} \end{bmatrix} = \underline{أ}$$

قطر المصفوفة الرئيسي

تسمى مجموعة العناصر $أ_{هـ هـ}$ من المصفوفة $\underline{أ}$ قطر المصفوفة الرئيسي ، ويلاحظ أن هذه العناصر واقعة على قطر مربع المصفوفة ، وعناصره هي : $أ_{١١}$ ، $أ_{٢٢}$ ، $أ_{٣٣}$ ، .... ، $أ_{ن ن}$.

■ ٤ **المصفوفة القطرية** : وهي مصفوفة مربعة وجميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي ، يكون أحدها على الأقل لايساوى صفراً .

■ ٥ **مصفوفة الوحدة** : وهي مصفوفة قطرية كل عنصر واقع على قطرها الرئيسي يساوى الواحد ، ويرمز لها بالرمز $\underline{و}$ ، مثلاً :

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \underline{و}$$

هي مصفوفة الوحدة من الرتبة ٣ .

■ ٦ **المصفوفة المثلثية (العليا أو السفلى)** :هي مصفوفة مربعة بحيث تكون العناصر الواقعة تحت أو فوق القطر الرئيسي جميعها مساوية للصفر مثلا :

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٤ \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ١- & ٢ & ٧- \end{bmatrix} = \underline{ب} \quad ، \quad \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٢ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \underline{أ}$$

مصفوفة سفلية   مصفوفة علوية

مثال (٦ – ٣)

بين نوع كل مصفوفة مما يلي ، مع ذكر السبب :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ٤ & ١- \end{bmatrix} = \underline{جـ} \quad ، \quad \begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \\ ٥ \end{bmatrix} = \underline{ب} \quad ، \quad \begin{bmatrix} ٠ & ٣- & ٢ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \underline{أ}$$

$\underline{\text{د}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{هـ}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\underline{\text{ز}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

الحـــــل :

أ‍ مستطيلة لأن عدد صفوفها لايساوي عدد أعمدتها ، وهي من الشكل ٢ × ٣ .

ب مصفوفة العمود ، لأن فيها عمود واحد فقط ، وهي من الشكل ٣ × ١ .

جـ مصفوفة الصف ، لأن فيها صف واحد فقط ، وهي من الشكل ١ × ٤ .

د مصفوفة صفرية (لماذا ؟)

هـ مصفوفة قطرية ، لأن عناصر قطرها هي ١ ، ٣ ، −٥ وبقية عناصرها أصفار ، وهي من الرتبة الثالثة.

ص مصفوفة مثلثية علوية، لأن جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي أصفار .

ز مصفوفة الوحدة من الرتبة الرابعة (ويمكن أن نرمز لها بالرمز و) .

تدريب(٦ − ٢)

اكتب مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي: ٥ ، −٢ ، ٨ .

مثال (٦ − ٤)

اكتب المصفوفة $\underline{\text{أ}} = [\text{أ}_{\text{هـ و}}]$ التي من الشكل ٢ × ٢ حيث :

$$\text{أ}_{\text{هـ و}} = \begin{cases} 3 & \text{عندما } \text{هـ} + \text{و} = 3 \\ -4 & \text{عندما } \text{هـ} + \text{و} \neq 3 \end{cases}$$

الحـــــل :

المصفوفة من الشكل ٢ × ٢

$$\therefore \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} \end{bmatrix}$$

$أ_{١١} = -٤$ لأن هـ + و = ١ + ١ = ٢ ≠ ٣

$أ_{٢١} = ٣$ لأن هـ + و = ١ + ٢ = ٣ = ٣

$أ_{١٢} = ٣$ لأن هـ + و = ٢ + ١ = ٣ = ٣

$أ_{٢٢} = -٤$ (لماذا ؟)

$$\therefore \underline{أ} = \begin{bmatrix} -٤ & ٣ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$$

تمارين (٦-٢)

[١] أعط مثالاً واحداً لكل مما يلي :

أ) مصفوفة مستطيلة من الشكل ٢ × ٣ ، ب) مصفوفة مربعة من الشكل ٣ × ٣ ،

جـ) مصفوفة قطرية من الشكل ٤ × ٤ ، د) مصفوفة صف من الشكل ١ × ٦ ،

هـ) مصفوفة عمود من الشكل ٤ × ١ ، و) مصفوفة مثلثية من الشكل ٤ × ٤ .

[٢] اذكر نوع كل من المصفوفات الآتية محدداً شكلها :

أ) $\underline{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٣ & ٧ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب) $\underline{ص} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ -٣ \end{bmatrix}$

جـ) $\underline{ع} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٤ & ٢ \\ ٠ & ٥ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ ، د) $\underline{ك} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$

هـ) $\underline{ل} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

[٣] اكتب كلاً من المصفوفتين القطريتين ، التي عناصر قطريهما الرئيسين هي :

أ) ٣ ، ٥ ، -٢ ، ١ ، ب) ٥ ، -٢ ، ٩ .

[٤] اكتب المصفوفة أ = [$أ_{هـو}$] التي من الشكل ٣ × ٣ حيث

$$أ_{هـو} = \begin{cases} -٢ & ، \text{ عندما } هـ + و = ٤ \\ ٥ & ، \text{ عندما } هـ + و \neq ٤ \text{ .} \end{cases}$$

[٥] لتكن ب = [$ب_{هـو}$] مصفوفة من الشكل ٣ × ٤ حيث $ب_{هـو}$ = ٢ هـ + و .
اكتب عناصر المصفوفة .

٦ – ٣ جمع وطرح المصفوفات

هناك عمليات يمكن إجراؤها على المصفوفات ؛ تتعرف في هذا البند على اثنين منها : الجمع والطرح .

أولاً : جمع المصفوفات :

تعريف (٦ – ٣)

لتكن أ ، ب مصفوفتين كلاً منهما من الشكل م × ن ؛ فإن مجموعهما (أ + ب) هي المصفوفة جـ من الشكل نفسه م × ن ، نحصل عليها بجمع العناصر المتناظرة في المصفوفتين أ ، ب .

حيث : $جـ_{هـو} = أ_{هـو} + ب_{هـو}$ لكل هـ ، و

مثال (٦ – ٥)

لتكن : $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & -٧ \\ ٩ & -٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٣ & -٥ & ٨ \\ -١٥ & ٧ & ٤ \end{bmatrix}$ ؛

أوجد : أ) أ + ب ، ب) ب + أ (ماذا تلاحظ؟) .

الحـــل :

∵ المصفوفتين أ ، ب من الشكل ٢ × ٣ .
∴ يمكن جمعهما .

أ) $أ + ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & -٧ \\ ٩ & -٥ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -٥ & ٨ \\ -١٥ & ٧ & ٤ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٣ - ٣ & ٤ - ٥ & -٧ + ٨ \\ ٩ - ١٥ & -٥ + ٧ & ٢ + ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ & ١ \\ -٦ & ٢ & ٦ \end{bmatrix}$$

ب) $\underline{\text{ب}} + \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} -٣ & -٥ & ٨ \\ -١٥ & ٧ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & -٧ \\ ٩ & -٥ & ٢ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -٣ + ٣ & -٥ + ٤ & ٨ - ٧ \\ -١٥ + ٩ & ٧ - ٥ & ٤ + ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ & ١ \\ -٦ & ٢ & ٦ \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن: $\underline{\text{ب}} + \underline{\text{أ}} = \underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ & ١ \\ -٦ & ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

أي أن عملية جمع المصفوفات إبدالية .

مثال (٦ – ٦)

أوجد المصفوفة $\underline{\text{س}}$ التي تحقق :

$$\begin{bmatrix} -١ & ٥ & ٢ \\ ٤ & ٧ & -٦ \end{bmatrix} + \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ & -٣ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

الحـــل :

$\underline{\text{س}}$ يجب أن تكون من الشكل ٢ × ٣ ؛ أي $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} \text{س}_{١١} & \text{س}_{٢١} & \text{س}_{٣١} \\ \text{س}_{١٢} & \text{س}_{٢٢} & \text{س}_{٣٢} \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} -١ & ٥ & ٢ \\ ٤ & ٧ & -٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{س}_{١١} & \text{س}_{٢١} & \text{س}_{٣١} \\ \text{س}_{١٢} & \text{س}_{٢٢} & \text{س}_{٣٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ & -٣ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -١ + \text{س}_{١١} & ٥ + \text{س}_{٢١} & ٢ + \text{س}_{٣١} \\ ٤ + \text{س}_{١٢} & ٧ + \text{س}_{٢٢} & -٦ + \text{س}_{٣٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ & -٣ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$\because$ المصفوفتين متساويتان .

$-١ + \text{س}_{١١} = ٤ \Leftrightarrow \text{س}_{١١} = ٥$

$٥ + \text{س}_{٢١} = ١ \Leftrightarrow \text{س}_{٢١} = -٤$

$٢ + \text{س}_{٣١} = -٣ \Leftrightarrow \text{س}_{٣١} = -٥$

$٤ + \text{س}_{١٢} = ٣ \Leftrightarrow \text{س}_{١٢} = -١$

$٧ + \text{س}_{٢٢} = ٢ \Leftrightarrow \text{س}_{٢٢} = -٥$

$-٦ + \text{س}_{٣٢} = ١ \Leftrightarrow \text{س}_{٣٢} = ٧$

$$\therefore \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٥ & -٤ & -٥ \\ -١ & -٥ & ٧ \end{bmatrix}$$

التحقق : تحقق من صحة الإجابة بنفسك .

ثانياً : طرح المصفوفات :

تعريف (٦ − ٤)

لتكن $\underline{\text{أ}}$ ، $\underline{\text{ب}}$ مصفوفتين من الشكل م × ن ؛ فإن الفرق $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}} + (-\underline{\text{ب}})$

حيث $(-\underline{\text{ب}})$ نظير المصفوفة $\underline{\text{ب}}$.

مثال (٦ − ٧)

لتكن $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ ؛

أوجد أ) $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}}$ ، ب) $\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}}$. ماذا تستنتج ؟

الحـــل :

أ) $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}} + (-\underline{\text{ب}}) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -7 & 2 \\ -3 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5-4 & 2-7 & -3+2 \\ 4-3 & 1+1 & 7-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

ب) $\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}} = \underline{\text{ب}} + (-\underline{\text{أ}}) = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

نستنتج أن: $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}}$ ، $\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}}$

أي أن عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية، ولكن نجد أن: $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} = -(\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}})$.

تمارين ومسائل (٦ − ٣)

[١] أجر العمليات التالية ، مع ذكر السبب في حالة عدم إمكانية إجراء العملية :

أ) $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -5 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -8 & 3 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

جـ) $\begin{bmatrix} ٤ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

د) $. \begin{bmatrix} ٢ & -١ & -٣ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & -١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

هـ) $\begin{bmatrix} \text{جـ} & -٢\text{ب} & \text{أ} \\ -٢\,\text{و} & ٣\,\text{هـ} & -\text{ء} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢\,\text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ ٤\,\text{و} & \text{هـ} & \text{ء} \end{bmatrix}$

و) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٦ & ٥ \end{bmatrix}$

[٢] لتكن :

$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$ ؛

فاحسب ما يلي :

أ) $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}}$ ، ب) $\underline{\text{جـ}} - \underline{\text{ب}}$ ، جـ) $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{جـ}}$.

د) $\underline{\text{أ}} - (\underline{\text{جـ}} - \underline{\text{ب}})$ ، هـ) $(\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}}) + \underline{\text{جـ}}$

[٣] لتكن: $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٦ & ٥ & -٣ \\ ١ & ٢ & -٧ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ & ٤ \\ -٣ & ٥ & ٦ \\ ١ & ٩ & ٤ \end{bmatrix}$ ؛

فأوجد ما يلي :

أ) $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}}$ ، ب) $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}}$ ، جـ) $(\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}}) + \underline{\text{أ}}$

د) $\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}}$ ، هـ) $(\underline{\text{ب}} + \underline{\text{أ}}) - \underline{\text{ب}}$.

[٤] أوجد قيم س ، ص ، ع التي تحقق :

$$\begin{bmatrix} -٣ & \text{ع} & \text{س} \\ \text{ع} & ٣ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & \text{س} \\ \text{ع} & \text{س} & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\text{ص} & ٦ & ٢\,\text{س} \\ ٢\,\text{ع} & ٢\,\text{س} & ٤ \end{bmatrix}$$

[٥] أوجد قيم $\text{س}_١$ ، $\text{س}_٢$ ، $\text{س}_٣$ ، $\text{س}_٤$ التي تحقق :

$$. \begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{س}_٢ & \text{س}_١ \\ \text{س}_٤ & \text{س}_٣ \end{bmatrix}$$

٦ – ٤ ضرب المصفوفات

أولاً : ضرب مصفوفة بعدد حقيقي :

لضرب مصفوفة $\underline{أ}$ بعدد حقيقي ل ، نضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة $\underline{أ}$ بالعدد ل .

تعريف (٦ – ٥)

لتكن $\underline{أ} = [\,أ_{هـ و}\,]$ مصفوفة من الشكل م × ن ، ل ∈ ح ، فإن حاصل ضرب المصفوفة $\underline{أ}$ بالعدد الحقيقي ل هو المصفوفة $\underline{جـ} = [\,جـ_{هـ و}\,]$ من الشكل م × ن ، بحيث $جـ_{هـ و} = ل \bullet أ_{هـ و}$.

أي أن : $\underline{جـ} = ل \bullet \underline{أ} = [\,ل \bullet أ_{هـ و}\,]$.

ويتمتع ضرب مصفوفة في عدد حقيقي بالخواص التالية :

إذا كانت $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ مصفوفتين من الشكل م × ن ، ك ، ل ∈ ح ، فإن :

أ) ك ($\underline{أ} + \underline{ب}$) = ك $\underline{أ}$ + ك $\underline{ب}$.

ب) (ك + ل) • $\underline{أ}$ = ك $\underline{أ}$ + ل $\underline{أ}$

جـ) ك • $\underline{أ}$ = $\underline{0}$ ⟺ ك = ٠ أو $\underline{أ}$ = ($\underline{0}$)

د) ك $\underline{أ}$ = ك $\underline{ب}$ ، ك ≠ ٠ ⟸ $\underline{أ}$ = $\underline{ب}$

هـ) $\underline{و}$ • $\underline{أ}$ = $\underline{أ}$.

الإثبات :

نفرض أن : $\underline{أ} = [\,أ_{هـ و}\,]$ ، $\underline{ب} = [\,ب_{هـ و}\,]$ ، $\underline{جـ} = [\,جـ_{هـ و}\,]$ حيث $\underline{جـ} = \underline{أ} + \underline{ب}$.

$أ_{هـ و}$ ، $ب_{هـ و}$ ، $جـ_{هـ و}$ ∈ ح .

أ) ك • $\underline{جـ}$ = [ك $جـ_{هـ و}$] بفرض $\underline{جـ} = \underline{أ} + \underline{ب}$ ، $جـ_{هـ و} = أ_{هـ و} + ب_{هـ و}$.

= [ك ($أ_{هـ و}$ + $ب_{هـ و}$)]

= [ك $أ_{هـ و}$ + ك $ب_{هـ و}$] تعريف جمع مصفوفتين .

∴ ك $\underline{جـ}$ = ك $\underline{أ}$ + ك $\underline{ب}$.

أي أن ك ($\underline{أ}$ + $\underline{ب}$) = ك $\underline{أ}$ + ك $\underline{ب}$.

ب) (ك + ل) $\underline{أ}$ = [(ك + ل) $أ_{هـ و}$] = [ك $أ_{هـ و}$ + ل $أ_{هـ و}$] .

أي أن : (ك + ل) $\underline{أ}$ = ك $\underline{أ}$ + ل $\underline{أ}$.

تدريب (٦ – ٣)

أثبت بنفسك صحة الخواص جـ ، ء ، هـ .

مثال (٦ – ٨)

لتكـن : $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$

احسب ما يلي أ) $\underline{أ} + ٢\,\underline{ب}$ ، ب) $٣\,\underline{ب} - ٢\,\underline{أ}$ ، جـ) $٢\,\underline{أ}$.

الحـــل :

أ) $\underline{أ} + ٢\,\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} + ٢ \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & ٠ \\ -٤ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ -٣ & ٨ \end{bmatrix}$

ب) $٣\,\underline{ب} - ٢\,\underline{أ} = ٣ \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix} - ٢ \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٩ & ٠ \\ -٦ & ١٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & -٦ \\ -٨ & ١٩ \end{bmatrix}$

جـ) $٢\,\underline{أ} = ٢ \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$ ، لاحظ أن : $٢\,\underline{أ} = \underline{أ} + \underline{أ}$.

ثانياً : ضرب المصفوفات :

تعريف (٦ – ٦)

لتكن $\underline{أ} = [\,أ_{هك}\,]$ مصفوفة من الشكل م × ن ،

$\underline{ب} = [\,ب_{كو}\,]$ مصفوفة من الشكل ن × ل فإن حاصل ضربهما هي المصفوفة

$\underline{جـ} = [\,جـ_{هو}\,]$ من الشكل م × ل أي أن :

$[\,جـ_{هو}\,] = [\,أ_{هو}\,] \bullet [\,ب_{هك}\,]$.

حيث $جـ_{هو} = أ_{ه١} \times ب_{١و} + أ_{ه٢} \times ب_{٢و} + \ldots + أ_{هن} \times ب_{نو}$

حيث هـ = ١ ، ٢ ، ... ، م ، و = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ل

وينتج من هذا التعريف :

١ ■ لكي نضرب مصفوفة $[\text{أ}_{\text{هـ ك}}]$ بمصفوفة أخرى $[\text{ب}_{\text{ك و}}]$ يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الأخرى .

٢ ■ إذا كانت المصفوفة الأولى من الشكل $\text{م} \times \text{ن}$ والأخرى من الشكل $\text{ن} \times \text{ل}$ ، فإن حاصل الضرب مصفوفة من الشكل $\text{م} \times \text{ل}$. أي أن : $\underline{\text{أ}}_{\text{م}\times\text{ن}} \times \underline{\text{ب}}_{\text{ن}\times\text{ل}} = \underline{\text{جـ}}_{\text{م}\times\text{ل}}$.

(عدد الاعمدة للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$ = عدد الصفوف للمصفوفة $\underline{\text{ب}}$) .

٣ ■ قد يكون الضرب غير ممكن وذلك في حالة أن عدد الأعمدة للمصفوفة الأولى لايساوى عدد الصفوف للمصفوفة الأخرى.

مثلاً : $\underline{\text{أ}}_{\text{م}\times\text{ل}} \times \underline{\text{جـ}}_{\text{م}\times\text{ن}}$ تلاحظ أن عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى لايساوى عدد الصفوف للمصفوفة الأخرى . لأن $\text{ل} \neq \text{م}$.

أي أنه لإيجاد $\text{جـ}_{\text{هـ و}}$ (العنصر الواقع في تقاطع الصف الذي رقمه هـ مع العمود الذي رقمه و للمصفوفة $\underline{\text{جـ}}$) ، علينا أن نضرب عناصر الصف الذي رقمه هـ للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$ بالعناصر المناظرة لها في العمود الذي رقمه و للمصفوفة $\underline{\text{ب}}$ ، ثم نجمع النواتج مع بعضها ويمكن تمثيل ذلك كما يلي :

المصفوفة $\underline{\text{أ}}$ المصفوفة $\underline{\text{ب}}$ المصفوفة $\underline{\text{جـ}}$.

$$\begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} & \cdots & \text{أ}_{1\text{ل}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{أ}_{\text{هـ}1} & \text{أ}_{\text{هـ}2} & \cdots & \text{أ}_{\text{هـ ل}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{أ}_{\text{م}1} & \text{أ}_{\text{م}2} & \cdots & \text{أ}_{\text{م ل}} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \text{ب}_{11} & \cdots & \text{ب}_{1\text{و}} & \cdots & \text{ب}_{1\text{ن}} \\ \text{ب}_{21} & \cdots & \text{ب}_{2\text{و}} & \cdots & \text{ب}_{2\text{ن}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{ب}_{\text{ل}1} & \cdots & \text{ب}_{\text{ل و}} & \cdots & \text{ب}_{\text{ل ن}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{جـ}_{11} & \cdots & \text{جـ}_{1\text{و}} & \cdots & \text{جـ}_{1\text{ن}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{جـ}_{\text{هـ}1} & \cdots & \boxed{\text{جـ}_{\text{هـ و}}} & \cdots & \text{جـ}_{\text{هـ ن}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{جـ}_{\text{م}1} & \cdots & \text{جـ}_{\text{م و}} & \cdots & \text{جـ}_{\text{م ن}} \end{bmatrix}$$

الصف الذي رقمه هـ العمود الذي رقمه و العنصر الذي في الصف هـ والعمود و

ويوضِّح الشكل طريقة العمل الحسابي لحساب العنصر $\text{جـ}_{\text{هـ و}}$.

مثال (٦ - ٩)

لتكن $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٧ & -٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

أوجد أ) $\underline{\text{أ}} \bullet \underline{\text{ب}}$ ، ب) $\underline{\text{ب}} \bullet \underline{\text{أ}}$. (ماذا تستنتج؟)

الحــــل :

نلاحظ أن : $\underline{\text{أ}}$ ، $\underline{\text{ب}}$ مصفوفتان من الشكل ٢ × ٢

أ) $\underline{\text{أ}} \bullet \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ٧ & -٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \times ٧ + ٥ \times ٢ & ٣ \times -٣ + ٥ \times ١ \\ ٢ \times ٧ + ٤ \times ٢ & ٢ \times -٣ + ٤ \times ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢١ + ١٠ & -٩ + ٥ \\ ١٤ + ٨ & -٦ + ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣١ & -٤ \\ ٢٢ & -٢ \end{bmatrix}$

ب) ب • أ ممكن (لماذا؟)

$$\begin{bmatrix} ٤\times(-٣)+٥\times٧ & ٢\times(-٣)+٣\times٧ \\ ٤\times١+٥\times٢ & ٢\times١+٣\times٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -٣ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \underline{\text{أ}} \bullet \underline{\text{ب}}$$

$$\begin{bmatrix} ٢٣ & ١٥ \\ ١٤ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣٥-١٢ & ٢١-٦ \\ ١٠+٤ & ٦+٢ \end{bmatrix} =$$

لاحظ أن أ • ب $\neq$ ب • أ .

أي أن عملية ضرب مصفوفتين غير إبدالية.

مثال (٦ − ١٠)

لتكن $\underline{\text{أ}} = [\,٣ \quad ٥ \quad ٢\,]$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \\ ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

أوجد إن أمكن أ) أ • ب ، ب) ب • جـ ، جـ) أ • أ ، د) جـ • جـ .

الحــــل :

تلاحظ أن : أ من الشكل ١ × ٣

ب من الشكل ٣ × ١

جـ من الشكل ٢ × ٢

أ) أ • ب ممكن لأن عدد أعمدة أ يساوي عدد صفوف ب .

$$[-٧] = [\,٢+١٥-٦\,] = [\,١\times٢ + -٣\times٥ + ٢\times٣\,] = \begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \\ ١ \end{bmatrix} \bullet [\,٢ \quad ٥ \quad ٣\,] = \underline{\text{ب}} \bullet \underline{\text{أ}}$$

لاحظ أ • ب من الشكل ١ × ١ .

ب) ب • جـ غير ممكن (لأن عدد أعمدة ب لايساوي عدد صفوف جـ) .

جـ) أ • أ غير ممكن (لماذا ؟)

د) جـ • جـ ممكن (لماذا ؟)

$$\begin{bmatrix} ١\times٢+٢\times٣ & ١\times١+٢\times٠ \\ ٠\times٢+٣\times٣ & ٠\times١+٣\times٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} = \underline{\text{جـ}} \bullet \underline{\text{جـ}}$$

$$= \begin{bmatrix} ٨ & ١ \\ ٩ & ٠ \end{bmatrix}$$

مثال (٦ - ١١)

لتكن أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -٢ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$

أوجد إن أمكن أ) أ • جـ ، ب) جـ • أ .

الحـــل :

∵ أ من الشكل ٣ × ٢ ، جـ من الشكل ٢ × ٢

∴ أ • جـ ممكن ومن الشكل ٣ × ٢

$$أ • جـ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -٢ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix} • \begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \times ٥ + ٢ \times ٣ & ١ \times -١ + ٢ \times -٢ \\ -٢ \times ٥ + ٠ \times ٣ & -٢ \times -١ + ٠ \times -٢ \\ ٤ \times ٥ + (-٣) \times ٣ & ٤ \times -١ + (-٣) \times -٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٥ + ٦ & -١ -٤ \\ -١٠ + ٠ & ٢ + ٠ \\ ٢٠ - ٩ & -٤ + ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ & -٥ \\ -١٠ & ٢ \\ ١١ & ٢ \end{bmatrix}$$

ب) جـ • أ غير ممكن ، لأن عدد أعمدة جـ لايساوي عدد صفوف أ .

خواص ضرب المصفوفات المربعة :

لتكن أ ، ب ، جـ مصفوفات مربعة من الشكل ن × ن ، فإن عملية ضرب المصفوفات تتمتع بالخواص التالية :

١ ■ غير إبدالية ، أي أن : أ • ب ≠ ب • أ

٢ ■ تجميعية، أي أن : (أ • ب) • جـ = أ • (ب • جـ).

٣ ■ توجد مصفوفة محايدة لعملية الضرب هي مصفوفة الوحدة (و).

أي أن : أ • و = و • أ = أ

٤ ■ إذا كانت أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ فإنه ليس من الضروري أن يكون أ • ب ≠ ٠

(أي يمكن أن يكون أ • ب = ٠)

٥ ■ إذا كانت د ∈ ط* فإن $أ^{د}$ يعني ضرب المصفوفة أ في نفسها د مرة .

مدور المصفوفة :

تعريف (٦ - ٧)

لتكن المصفوفة أ مصفوفة من الشكل ك × ن ، فإذا كتبنا صفوفها على شكل أعمدة ، وبالترتيب نفسه الذي وردت فيه (أي تصبح الأعمدة صفوفا وبالترتيب نفسه) ؛ فإننا نحصل على مصفوفة جديدة تسمى مدور المصفوفة أ ويرمز لها بالرمز أَ ، وتكون من الشكل ن × ك .

مثال (٦ - ١٢)

لتكن أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ -٢ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

أوجـــد :

أ) أَ   ب) بَ   جـ) (أ • ب)َ   د) أَ • بَ

من جـ ، د . ماذا تستنتج؟

الحــــل :

أ) أَ = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، بَ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ -٣ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$

جـ) أ • ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ -٢ & ١ & ٠ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢ + ١٢ + ٦ & -٣ + ٣ + ٠ \\ -٤ + ٤ + ٠ & ٦ + ١ + ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠ & ٠ \\ ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

∴ (أ • ب)َ = $\begin{bmatrix} ٢٠ & ٠ \\ ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

د) (أَ • بَ) = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2+6 & 4-2 & 3+0 \\ 6-3 & 12+1 & 9+0 \\ 4+0 & 8+0 & 6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 3 & 13 & 9 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

من جـ ، د نستنتج أن مدورها حاصل ضرب المصفوفتين ا ، ب لا يساوي حاصل ضرب مدوريهما .

تمارين (٦ - ٤)

[١] لتكن :

س = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

أوجد ما يلي :

أ) س • ص ، ب) (س • ص) • ع

جـ) ص • ع ، د) س • (ص • ع)

[٢] احسب ما يلي :

أ) $\begin{bmatrix} 12 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \right)$

[٣] لتكن : أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥- & ٠ \end{bmatrix}$. أوجد

أ) ٢ • أ ب) $\frac{١}{٣}$ • أ جـ) – ٣ • أ د) [أَ]

[٤] احسب ما يلي :

أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ١- & ٢ \\ ٧- & ٠ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ٥ & ١- \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ١- & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$

جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ١- & ٢ \\ ٧ & ٠ \end{bmatrix}$

[٥] إذا كانت أ = [٣ ٢ ٤-] ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٣ \end{bmatrix}$

أوجد: أ) أ • ب ب) ب • جـ جـ) أ • جـ

د) جـ • أ هـ) $ب^{٢}$ و) أ • (ب • جـ)

[٦] إذا كانت

ع = $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

بين أن $ع^{٢}$ – ٢ع – ٣و = ٠

[٧] إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

بيِّن صحة أو خطأ كل من :

أ) أ • (ب + جـ) = أ • ب + أ • جـ ، ب) أ • (ب + جـ) = أ • ب + جـ • أ ،

جـ) (ب + جـ) • أ = ب • أ + جـ • أ .

٦ – ٥ المحـــــددات

في هذا البند سوف نعرف محددة مصفوفة مربعة، ونقدم طريقة حساب قيمة هذا المحدد، ويرمز لمحددة المصفوفة $\underline{أ}$ بالرمز $|\underline{أ}|$ أو Δ . فمثلاً إذا كانت المصفوفة $\underline{أ} = |أ_{١١}|$ ، أي من الرتبة الأولى فإن محددتها $|\underline{أ}| = أ_{١١}$.

أما إذا كانت المصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ من الرتبة الثانية فإن محددتها $|\underline{أ}| = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$

$$= أ_{١١} \times أ_{٢٢} - أ_{٢١} \times أ_{١٢}$$

مثال (٦ – ١٣)

إذا كانت $\underline{س} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{bmatrix}$ ، فإن محددة $\underline{أ}$ تساوي :

$$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{vmatrix} = أ ء - ب\, جـ$$

أي أن المحددة من الرتبة الثانية عبارة عن حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس مطروحاً منه حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي .

مثال (٦ – ١٤)

أوجد محددات المصفوفات التالية :

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} -٣ & ٦ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix}$$

الحـــــل :

$$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} -٣ & ٦ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} = (-٣ \times ٢) - (٦ \times -١) = -٦ + ٦ = ٠$$

$$|\underline{ب}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix} = (٣ \times ٧) - (٥ \times ٢) = ٢١ - ١٠ = ١١$$

ملاحظة :

إذا $|\underline{أ}| = ٠$ فإن $\underline{أ}$ تُسمَّى مصفوفة منفردة (شاذة).

المحددة من الرتبة الثالثة :

توجد طريقتان لحساب المحددة من الرتبة الثالثة والتي على الصورة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{ب}_{٢١} & \text{جـ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{ب}_{٢٢} & \text{جـ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{ب}_{٢٣} & \text{جـ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$ ،ويعتمد في ذلك قاعدة الإشارة: $$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

أولاً : طريقة الصفوف والأعمدة (بيزوت) :

هذه الطريقة عبارة عن حاصل مجموع ضرب عناصر أحد الصفوف أو الأعمدة في مرافقاتها ، على أن تراعى الإشارة لكل عنصر من عناصر المحدد كما هو موضح أعلاه ، مثلاً نشر المحدد (Δ) وفق الصف الأول هي :

$$\Delta = \text{أ}_{١١} \begin{vmatrix} \text{ب}_{٢٢} & \text{جـ}_{٣٢} \\ \text{ب}_{٢٣} & \text{جـ}_{٣٣} \end{vmatrix} - \text{ب}_{٢١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{جـ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{جـ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \text{جـ}_{٣١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{ب}_{٢٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{ب}_{٢٣} \end{vmatrix}$$

مثال (٦ – ١٥)

أوجد قيمتي المحددتين التاليتين :

$$\Delta_{١} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ١- & ٠ & ١- \\ ٣ & ١- & ٣ \end{vmatrix} \quad ، \quad \Delta_{٢} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ٤ & ٥ & ١ \end{vmatrix}$$

الحـــل :

١ ■ ملاحظة: بما أن نشر أي محدد حسب أي صف أو أي عمود يعطي النتيجة نفسها لذلك يفضل $\Delta_{١}$ حسب الصف أو العمود الذي يحتوي على أصغر الأعداد أو أسهلها ضرباً (مثلاً يحتوي أصفار) ، وذلك لسهولة حسابها وهنا سنبدأ بالصف الثاني ونلاحظ أننا سنبدأ بإشارة السالب ... لماذا ؟ .

$$\Delta_{١} = -(-١) \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١- & ٣ \end{vmatrix} + ٠ \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix} - (-١) \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١- \end{vmatrix} = (٩ + ١) + ٠ + (-٢ - ٩)$$

$= ١٠ - ١١ = -١$.

٢ ■ سيتم حساب $\Delta_{٢}$ حسب العمود الأول (لماذا؟) :

$$\Delta_{٢} = ١ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} + ٤ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = (١ - ١٠) - ٣(٢ - ١٥) + ٤(٤ - ٣)$$

$= -٩ + ٣٩ + ٤ = ٣٤$.

تدريب (٦ – ٥)

احسب Δ_1 ، Δ_2 في المثال (٦ – ١٤) حسب صفوف وأعمدة أخرى ، مثلاً حسب العمود الثاني بالنسبة Δ_1 والصف الأول بالنسبة Δ_2 .

ثانياً : طريقة فروق الأقطار (طريقة سيروس) :

وهي طريقة سهلة ولكن لاتصلح إلا للمصفوفة من الرتبة الثالثة فقط ، وتتلخص بالآتي :

الخطوة الأولى : بإعادة كتابة العمودين : الأول والثاني على يسار المحددة كما في الشكل التالي :

$$\begin{array}{cc} \text{ب}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{ب}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{ب}_{٢٣} & \text{أ}_{١٣} \end{array} \begin{vmatrix} \text{جـ}_{٣١} & \text{ب}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{جـ}_{٣٢} & \text{ب}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{جـ}_{٣٣} & \text{ب}_{٢٣} & \text{أ}_{١٣} \end{vmatrix}$$

الخطوة الثانية : نحسب جداءات العناصر الثلاثة المكونة للقطر الرئيسي والقطرين الموازيين له ، ونحسب مجموعها حسب اتجاه الأسهم كما هو موضح في الشكل أعلاه .

$$(\text{أ}_{١١} \times \text{ب}_{٢٢} \times \text{جـ}_{٣٣}) + (\text{ب}_{٢١} \times \text{جـ}_{٣٢} \times \text{أ}_{١٣}) + (\text{جـ}_{٣١} \times \text{أ}_{١٢} \times \text{ب}_{٢٣}) \quad \ldots\ldots (١)$$

الخطوة الثالثة : نحسب جداءات العناصر الواقعة على القطـر الثانـوي (الفرعي) والقطرين الموازيين له ، ونحسب مجموعها حسب اتجاه الأسهم كما هو موضَّح في الشكل أعلاه .

$$(\text{جـ}_{٣١} \times \text{ب}_{٢٢} \times \text{أ}_{١٣}) + (\text{أ}_{١١} \times \text{جـ}_{٣٢} \times \text{ب}_{٢٣}) + (\text{ب}_{٢١} \times \text{أ}_{١٢} \times \text{جـ}_{٣٣}) \quad \ldots\ldots\ldots (٢)$$

الخطوة الرابعة : نوجد فرق المجموعين في الخطوتين الثانية والثالثة . أي :

Δ = مجموع (١) – مجموع (٢)

مثال (٦ – ١٦)

باستخدام طريقة سيروس احسب Δ_1 في المثال (٦ – ١٤)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ -١ & ٠ & -١ \\ ٣ & -١ & ٣ \end{vmatrix}$$

نكتب المحددة بطريقة سيروس على النحو التالي :

$$\Delta_1 = \begin{array}{cc} ٣ & ٢ \\ ٠ & -١ \\ -١ & ٣ \end{array} \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ -١ & ٠ & -١ \\ ٣ & -١ & ٣ \end{vmatrix}$$

ثم نحسب :

$$\Delta_1 = [(2\times0\times3)+(3\times-1\times3)+(1\times-1\times-1)]-[(1\times0\times3)+(2\times-1\times-1)+(3\times-1\times3)]$$

$$= (0-9+1)-(0+2-9) = -8+7 = -1 \ .$$

نلاحظ أن الناتج بالطريقتين هو نفسه .

تدريب (٦ – ٦)

احسب Δ_2 المذكورة في المثال (٦ – ١٤) باستخدام طريقة سيروس وقارن بين الناتجين .

ثالثاً : المحددة من الرتبة الرابعة وأكثر :

لحساب قيمة المحددة من الرتبة الرابعة أو أكثر فإننا نأخذ أي عمود أو صف كما فعلنا في محددة الرتبة الثالثة بطريقة الصفوف أو الأعمدة (طريقة بيزوت)، ثم نحسب المحددة من الرتبة الثالثة مضروبة في العنصر المرافق لها ونوجد المجموع ، وهكذا بالنسبة للمحددات التي رتبتها تزيد عن الرابعة .

مثال (٦ – ١٧)

أوجد قيمة المحدد التالي :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 & 8 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

الحـــل :

باستخدام عناصر الصف الثاني فإن :

$$\Delta = -(-3)\,\Delta_{12} + (1)\,\Delta_{22} - (2)\,\Delta_{32} + (0)\,\Delta_{42} = 3\,\Delta_{12} + \Delta_{22} - 2\,\Delta_{32} \ .$$

ولتسهيل الحل نحسب كل من Δ_{12} ، Δ_{22} ، Δ_{32} كلاً على حده، باستخدام أحد الطريقتين بيزوت ، أو سيروس .

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -2 & -4 & 9 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 365$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & 9 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 280$$

$$\Delta_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 9 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -22$$

وبذلك تكون قيمة $\Delta = \text{٣}(\text{٣٦٥}) + \text{٢٨٠} - \text{٢}\,(-\text{٢٢}) = \text{١٠٩٥} + \text{٢٨٠} + \text{٤٤} = \text{١٤١٩}$

خواص المحددات :

■١ لا تتغير قيمة المحددة إذا تم تبديل الصفوف بالأعمدة والعكس .

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{١١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{٣١}} \\ \text{أ}_{\text{١٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{٣٢}} \\ \text{أ}_{\text{١٣}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{أ}_{\text{٣٣}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{١١}} & \text{أ}_{\text{١٢}} & \text{أ}_{\text{١٣}} \\ \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} \\ \text{أ}_{\text{٣١}} & \text{أ}_{\text{٣٢}} & \text{أ}_{\text{٣٣}} \end{vmatrix}$$

■٢ تتغير إشارة قيمة المحددة فقط إذا تم تبديل صفين (أو عمودين) متجاورين من صفوف (أو أعمدة) المحدد ببعضها البعض .

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{١١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{٣١}} \\ \text{أ}_{\text{١٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{٣٢}} \\ \text{أ}_{\text{١٣}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{أ}_{\text{٣٣}} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{١١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{٣١}} \\ \text{أ}_{\text{١٣}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{أ}_{\text{٣٣}} \\ \text{أ}_{\text{١٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{٣٢}} \end{vmatrix}$$

■٣ إذا تطابق (تساوى) صفان (أو عمودان) في محددة فإن قيمتها تساوي صفرا

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{١١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{٣١}} \\ \text{أ}_{\text{١٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{٣٢}} \\ \text{أ}_{\text{١٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{٣٢}} \end{vmatrix} = \text{٠} \quad \text{حيث} \quad \text{أ}_{\text{١١}} = \text{أ}_{\text{١٢}} \text{ ، } \text{أ}_{\text{٢١}} = \text{أ}_{\text{٢٢}} \text{ ، } \text{أ}_{\text{٣١}} = \text{أ}_{\text{٣٢}}$$

■٤ إذا وجد عامل مشترك لعناصر صف (أو عمود) في المحددة فإن قيمة المحددة تساوي حاصل ضرب ذلك العامل المشترك في المحدد بعد إخراج العامل .

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{١١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{ك} \bullet \text{أ}_{\text{٣١}} \\ \text{أ}_{\text{١٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{ك} \bullet \text{أ}_{\text{٣٢}} \\ \text{أ}_{\text{١٣}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{ك} \bullet \text{أ}_{\text{٣٣}} \end{vmatrix} = \text{ك} \bullet \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{١١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{٣١}} \\ \text{أ}_{\text{١٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{٣٢}} \\ \text{أ}_{\text{١٣}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{أ}_{\text{٣٣}} \end{vmatrix}$$

■٥ إذا تناسبت عناصر صف ما (أو عمود ما) مع العناصر المناظرة لصف آخر (أو لعمود آخر) فإن قيمة المحددة (تساوي صفرا) .

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{١١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{٣١}} \\ \text{هـ} \bullet \text{أ}_{\text{١١}} & \text{هـ} \bullet \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{هـ} \bullet \text{أ}_{\text{٣١}} \\ \text{أ}_{\text{١٣}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{أ}_{\text{٣٣}} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

■٦ إذا أضيفت أو طرحت عناصر صف (أو عمود ما) أو مضاعفاتها إلى العناصر المناظرة لصف آخر (أو لعمود أخر) فإن قيمة المحدد لا تتغير .

$$\Delta = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ (أ_{١٣} + ك \bullet أ_{١٢}) & (أ_{٢٣} + ك \bullet أ_{٢٢}) & (أ_{٣٣} + ك \bullet أ_{٣٢}) \end{vmatrix}$$

٧■ إن قيمة المحددة القطرية تساوي حاصل ضرب (جداء) عناصر القطرالرئيسي .

$$\Delta = \begin{vmatrix} أ_{١١} & ٠ & ٠ \\ ٠ & أ_{٢٢} & ٠ \\ ٠ & ٠ & أ_{٣٣} \end{vmatrix} = (أ_{١١} \bullet أ_{٢٢} \bullet أ_{٣٣})$$

ملحوظة : إذا كانت عناصر المحددة كلها صفرية ماعدا عناصر القطر الثانوي (الفرعي) فإن قيمتها تساوى سالب جداء عناصر قطرها الثانوي .

٨■ قيمة المحدد لمصفوفة مثلية تساوي جداء عناصر القطر الرئيسي .

$$\Delta = \begin{vmatrix} أ_{١١} & ٠ & ٠ \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & ٠ \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ ٠ & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ ٠ & ٠ & أ_{٣٣} \end{vmatrix} = (أ_{١١} \bullet أ_{٢٢} \bullet أ_{٣٣})$$

٩■ إذا كانت جميع عناصر أحد الصفوف (أو الأعمدة) في المحددة أصفاراً فإن قيمة المحدد تساوي صفر اً.

$$\Delta = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ_{١١} & ٠ & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & ٠ & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & ٠ & أ_{٣٣} \end{vmatrix} = \text{صفر} .$$

مثال (٦ – ١٨)

أوجد قيمة المحددات التالية :

أ) $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٥ & ٠ \\ ٧ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ ، ب) $\begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ٧ \\ ٢ & ٤ & ١ \\ ٢ & ٤ & ١ \end{vmatrix}$

جـ) $\begin{vmatrix} ٥ & ١٠ & ٢٠ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٧ & ٣ & ٨ \end{vmatrix}$ ، د) $\begin{vmatrix} ٤ & ٢ & ٠ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ٥ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$

الحـــل :

أ) $\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٧ \end{vmatrix} = -(٢ \times ٥ \times ٧) = -٧٠$ (باستخدام الخاصية ٧)

ب) $\Delta = \begin{vmatrix} ٧ & ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ & ٢ \\ ١ & ٤ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$ (باستخدام الخاصية ٣)

جـ) $\Delta = \begin{vmatrix} ٢٠ & ١٠ & ٥ \\ ٤ & ٣ & ٢ \\ ٨ & ٣ & ٧ \end{vmatrix} = ٥ \begin{vmatrix} ٤ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ & ٢ \\ ٨ & ٣ & ٧ \end{vmatrix} = ٥ \times ٤ \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ٧ \end{vmatrix} = -١٢٠$

(الخاصية ٤)

د) $\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٢ & ٤ \\ ١ & ٠ & ١ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٥ & ١ \\ ٢ & ٠ & ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ٠$ (باستخدام الخاصية ٩)

تمارين ومسائل (٦ – ٥)

[١] أوجد باستخدام الطريقة المناسبة قيمة المحددات التالية :

أ) $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix}$ ب) $\begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & -٥ \end{vmatrix}$ جـ) $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{أ} \\ \text{ء} & \text{ب} \end{vmatrix}$

د) $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ -١ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٥ \end{vmatrix}$ هـ) $\begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ٢ \\ ١ & ٤ & ٥ \\ ١ & ٦ & ٠ \end{vmatrix}$ و) $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ١ \\ ٣ & -١ & ١ \\ -١ & -٢ & ١ \end{vmatrix}$

[٢] احسب قيم س التي تجعل كلا من المصفوفات الآتية منفردة :

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & \text{س} \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & \text{س} \\ \text{س} & ٤ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٣٦ & \text{س}^{٢} \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ٤ & \text{س} - ٢ \\ \text{س} & ٢ \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} ٢ & \text{س} - ١ \\ \text{س} - ١ & ٢ \end{bmatrix}$

[٣] احسب قيم المحددات التالية مرة بطريقة بيزوت ومرة أخرى بطريقة سيروس :

أ) $\begin{vmatrix} -١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & -٩ & ١ \\ ٢ & ٦ & ٤ \end{vmatrix}$ ب) $\begin{vmatrix} ٦ & ٠ & ١ \\ ١٥ & ٤ & ٣ \\ ٢١ & ٦ & ٥ \end{vmatrix}$

جـ) $\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ -١ & ٠ & -١ \\ ٣ & -١ & ٣ \end{vmatrix}$ د) $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ١ \\ ٣ & ٨ & ٧ \\ ٩ & ١ & ٤ \end{vmatrix}$ هـ) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٣ & ٢ & ٠ \\ ٩ & ٨ & ٤ \end{vmatrix}$

[٤] احسب قيم المحددتين التاليتين :

أ) $\begin{vmatrix} ٨ & ٦ & ٢ & ٤ \\ ١٢ & ٩ & ٣ & ٦ \\ ٣ & ٤ & ٥ & ١٠ \\ ٩ & ٨ & ٧ & ١٤ \end{vmatrix}$ ب) $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٠ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٦ & ٤ \\ ٠ & ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$

جـ) $\begin{vmatrix} ٥ & ١٥ & ٢٥ & ٥ \\ ٣ & ٩ & ٣ & ٦ \\ ٨ & ٦ & ٢ & ٤ \\ ١٢ & ٣ & ٦ & ٩ \end{vmatrix}$ د) $\begin{vmatrix} ٧ & ٤ & ٣ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٥ & -١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٦ & ٢ & ٥ \end{vmatrix}$

[٥] بدون نشر المحددة . أوجد قيمة المحددات التالية :

أ) $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٥ & ٤ & ٩ \end{vmatrix}$ ، ب) $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٦ \\ ١ & ٧ & ٢ \\ -٥ & ٠ & -١ \end{vmatrix}$

جـ) $\begin{vmatrix} ٥ & -٢ & ٤ \\ ٠ & ٣ & ٦ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ ، د) $\begin{vmatrix} ٤ & ٨ & ٦ \\ ٦ & ٥ & ٩ \\ ١٠ & -١ & ١ \\ ١٤ & ٢ & ٠ \end{vmatrix}$

[٦] إذا كانت $\underline{أ}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{bmatrix}$ فأوجد :

(١) $|\underline{أ}|$ ، $|\underline{أ}'|$ ، ماذا تلاحظ؟

(٢) بادل بين الصفين الأول والثاني، ثم أحسب محدد المصفوفة الجديدة .

دعنا نناقش الآن إمكانية وجود معكوس ضربي لمصفوفة مربعة من الرتبة ن .

تعريف (٦ – ٨)

يكون للمصفوفة المربعة من الرتبة ن معكوس ضربي إذا وجدت مصفوفة مربعة $\underline{ب}$ من الرتبـة ن ، بحيث يكون $\underline{أ} \times \underline{ب} = \underline{ب} \times \underline{أ} = \underline{و}$ ، حيث $\underline{و}$ مصفوفة الوحدة من الرتبة ن .

- المصفوفة $\underline{ب}$ تسمى المعكوس الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$ ، ويرمز لها بالرمز $\underline{أ}^{-١}$.
- لا يوجد معكوس ضربي للمصفوفة المربعة التي محدداتها تساوي صفراً .
- معكوس المصفوفة المربعة وحيد .

أولاً : المعكوس الضربي للمصفوفة من الرتبة الثانية :

لتكن $\underline{ع}$ = $\begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ ، فمتى يتعين لها معكوس ضربي ؟ وكيف نعينه إن وجد؟

لنفرض أن المعكوس الضربي $\underline{ع}^{-١}$ موجود وليكن: $\underline{ع}^{-١}$ = $\begin{bmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \begin{bmatrix} أس + ب ع & أص + ب ل \\ جـس + د ع & جـص + د ل \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$\therefore$ أس + ب ع = ١ ــــــــــــــ (١)

جـس + د ع = ٠ ــــــــــــــ (٢)

أص + ب ل = ٠ ــــــــــــــ (٣)

جـص + د ل = ١ ــــــــــــــ (٤)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن :

$$س = \frac{د}{أ د + ب جـ} \quad ، \quad ع = \frac{-جـ}{أ د - ب جـ}$$

وبحل المعادلتين (٣) ، (٤) نجد أن :

$$ص = \frac{-ب}{أ د - ب جـ} \quad ، \quad ل = \frac{أ}{أ د - ب جـ}$$

ويلاحظ أن س ، ص ل ، ع تتعين إذا كان : أ د − ب جـ $\neq$ ٠

ولكن $|ع| = \begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix} =$ أ د − ب جـ

$\therefore$ المعكوس الضربي $ع^{-1}$ يتعين إذا كان $|ع| \neq$ ٠ .

وبفرض أن $|ع| = \Delta$ (تقرأ دلتا) .

$$\therefore س = \frac{د}{\Delta} \quad ، \quad ص = \frac{-ب}{\Delta} \quad ، \quad ع = \frac{-جـ}{\Delta} \quad ، \quad ل = \frac{أ}{\Delta}$$

$$ويكون \; ع^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{د}{\Delta} & \frac{-جـ}{\Delta} \\ \frac{-جـ}{\Delta} & \frac{أ}{\Delta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$$

تعريف (٦ − ٩)

كل مصفوفة مربعة ع = $\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix}$ محددها $\Delta \neq$ ٠ يكون لها نظير (معكوس) ضربي هو المصفوفة ع = $\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$

مثال (٦ – ١٩)

أوجد معكوس المصفوفة أ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$

الحـــل :

لإيجاد معكوس المصفوفة أ تتبع الخطوات التالية :

١) نوجد محدد المصفوفة أ = |أ| = Δ بحيث $\Delta \neq$ ٠ .

$|أ| = \Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = ١٢ - ٥ = ٧$ ، $\therefore$ يوجد معكوس ضربي للمصفوفة أ .

٢) نبدل عناصر القطر الرئيسي، ونعكس إشارات عناصر القطر الثانوي، ثم نضرب الناتج في $\frac{١}{\Delta}$ فيكون هو .

$$\therefore أ^{-١} = \frac{١}{\Delta}\begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} = \frac{١}{٧}\begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٤}{٧} & \frac{-٥}{٧} \\ \frac{-١}{٧} & \frac{٣}{٧} \end{bmatrix}$$

التحقق :

وللتأكد من صحة الإجابة نتحقق من أن أ × أ$^{-١}$ = و كما يلي :

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{٤}{٧} & \frac{-٥}{٧} \\ \frac{-١}{٧} & \frac{٣}{٧} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{٤}{٧} \times ٣) + (\frac{-١}{٧} \times ٥) & (\frac{-٥}{٧} \times ٣) + (\frac{٣}{٧} \times ٥) \\ (\frac{٤}{٧} \times ١) + (\frac{-١}{٧} \times ٤) & (\frac{-٥}{٧} \times ١) + (\frac{٣}{٧} \times ٤) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{١٢ - ٥}{٧} & \frac{-١٥ + ١٥}{٧} \\ \frac{٤ - ٤}{٧} & \frac{-٥ + ١٢}{٧} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة الوحدة (العنصر المحايد للضرب)

وهذا يؤكد صحة الإجابة

بأن $\begin{bmatrix} \frac{٤}{٧} & \frac{-٥}{٧} \\ \frac{-١}{٧} & \frac{٣}{٧} \end{bmatrix}$ هي المعكوس الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$

ثانياً : المعكوس الضربي للمصفوفة من الرتبة الثالثة :

لتكن $\underline{س} = \begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix}$ فلإيجاد $\underline{س}^{-١}$ نتبع الخطوات التالية :

١■ نوجد قيمة المحدد Δ بحيث أن: $\Delta \neq ٠$ (إذا كان $\Delta = ٠$ فلايوجد للمصفوفة معكوس ضربي) .

٢■ نوجد مصفوفة المرافقات ويكون ذلك باستبدال كل عنصر في $\underline{س}$ بالمرافق المناظر لهـذا العنصر ويحـدد مرافق العنصر على الشكل التالي :

أ) تحدد إشارة المرافق بإشارة العنصر في نشر محدد المصفوفة كما في الشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

ب) نحسب مصفوفة المرافقات :

فمثلاً مرافق $أ_{١١} = \Delta_{١١} = \begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{٢١} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$ ، مرافق $أ_{٢١} = \Delta_{٢١} = - \begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix}$ .... وهكذا .

ونحصل على مصفوفة المرافقات التالية :

$$\underline{م} = \begin{bmatrix} \Delta_{٣١} & \Delta_{٢١} & \Delta_{١١} \\ \Delta_{٣٢} & \Delta_{٢٢} & \Delta_{١٢} \\ \Delta_{٣٣} & \Delta_{٢٣} & \Delta_{١٣} \end{bmatrix}$$

٣■ نوجد مدور مصفوفة المرافقات والتي هي عبارة عن المصفوفة المساعدة :

$$\underline{\bar{م}} = \begin{bmatrix} \Delta_{١٣} & \Delta_{١٢} & \Delta_{١١} \\ \Delta_{٢٣} & \Delta_{٢٢} & \Delta_{٢١} \\ \Delta_{٣٣} & \Delta_{٣٢} & \Delta_{٣١} \end{bmatrix}$$

٤■ نقسم المصفوفة المساعدة $\underline{\bar{م}}$ على قيمـــة المحدد العام Δ للمصفوفة الأصلية ونحصل على معكوس المصفوفـة

($\underline{س}^{-١}$) ، أي أن : $\underline{س}^{-١} = \frac{١}{\Delta} \underline{\bar{م}}$.

مثال (٦ – ٢٠)

أوجد معكوس المصفوفة التالية :

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & -٢ \\ ٤ & -٢ & ١ \\ ١ & ٢ & -١٠ \end{bmatrix}$$

الحـــــل :

■١ نوجد $\left| \underline{أ} \right| = \Delta$.

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccc|cc} ١ & ٠ & -٢ & ١ & ٠ \\ ٤ & -٢ & ١ & ٤ & -٢ \\ ١ & ٢ & -١٠ & ١ & ٢ \end{array} \right.$$

$$\Delta = [(١ \times -٢ \times -١٠) + (٠ \times ١ \times ١) + (-٢ \times ٤ \times ٢)] - [(-٢ \times -٢ \times ١) + (١ \times ١ \times ٢) + (٠ \times ٤ \times -١٠)]$$

$$= (٢٠ + ٠ - ١٦) - (٤ + ٢ - ٠) = ٤ - ٦ = -٢ \;.$$

■٢ نوجد مصفوفة المرافقات

$$\Delta_{١١} = + \begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ ٢ & -١٠ \end{vmatrix} = (٢٠ - ٢) = ١٨ \;.$$

$$\Delta_{٢١} = - \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & -١٠ \end{vmatrix} = -(-٤٠ - ١) = ٤١ \;.$$

$$\Delta_{٣١} = + \begin{vmatrix} ٤ & -٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = (٨ + ٢) = ١٠ \;.$$

$$\Delta_{١٢} = - \begin{vmatrix} ٠ & -٢ \\ ٢ & -١٠ \end{vmatrix} = -(٠ + ٤) = -٤ \;.$$

$$\Delta_{٢٢} = + \begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ١ & -١٠ \end{vmatrix} = (-١٠ + ٢) = -٨ \;.$$

$$\Delta_{٣٢} = - \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = -(٢ - ٠) = -٢ \;.$$

$$\Delta_{١٣} = + \begin{vmatrix} ٠ & -٢ \\ -٢ & ١ \end{vmatrix} = (٠ - ٤) = -٤ .$$

$$\Delta_{٢٣} = - \begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = -(١ + ٨) = -٩ .$$

$$\Delta_{٣٣} = + \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٤ & -٢ \end{vmatrix} = -(٢ - ٠) = -٢ .$$

∴ مصفوفة المرافقات = $\underline{م} = \begin{bmatrix} ١٨ & ٤١ & ١٠ \\ -٤ & -٨ & -٢ \\ -٤ & -٩ & -٢ \end{bmatrix}$

■٣ المصفوفة المساعدة

$$\overline{\underline{م}} = \begin{bmatrix} ١٨ & -٤ & -٤ \\ ٤١ & -٨ & -٩ \\ ١٠ & -٢ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; \underline{أ}^{-١} = \frac{١}{\Delta} \bullet \overline{\underline{م}} = -\frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ١٨ & -٤ & -٤ \\ ٤١ & -٨ & -٩ \\ ١٠ & -٢ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٩ & ٢ & ٢ \\ -\frac{٤١}{٢} & ٤ & \frac{٩}{٢} \\ -٥ & ١ & ١ \end{bmatrix}$$

تدريب (٦ – ٧)

أثبت أن :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ & -٢ \\ ٤ & -٢ & ١ \\ ١ & ٢ & -١٠ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -٩ & ٢ & ٢ \\ -\frac{٤١}{٢} & ٤ & \frac{٩}{٢} \\ -٥ & ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

ملحوظـــة :

هذا التدريب يعتبر تحققاً لصحة الإجابة في المثال (٦ – ٢٠) .

مثال (٦ – ٢١)

لتكن $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٢ \\ ١ & ١ & ٠ \\ -١ & ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فأوجد $\underline{أ}^{-١}$.

الحـــل :

١ ■ نوجد Δ :

$$\Delta = \begin{array}{cc|ccc|} ٤ & ٢ & ٣ & ٤ & ٢ \\ ١ & ٠ & ١ & ١ & ٠ \\ ٢ & ٢ & -١ & ٢ & ٢ \end{array}$$

$\Delta = [\,(-٢ + ٨ + ٠)\,] - [\,(٦ + ٤ + ٠)\,] = ٦ - ١٠ = -٤$ ، $\because$ $\Delta \neq ٠$ فإن للمصفوفة معكوس .

٢ ■ نوجد مصفوفة المرافقات :

$$\underline{م} = \begin{bmatrix} \Delta_{٣١} & \Delta_{٢١} & \Delta_{١١} \\ \Delta_{٣٢} & \Delta_{٢٢} & \Delta_{١٢} \\ \Delta_{٣٣} & \Delta_{٢٣} & \Delta_{١٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ & -٣ \\ ٤ & -٨ & ١٠ \\ ٢ & -٢ & ١ \end{bmatrix}$$

٣ ■ نوجد المصفوفة المساعدة :

$$\underline{م}' = \begin{bmatrix} ١ & ١٠ & -٣ \\ -٢ & -٨ & ٢ \\ ٢ & ٤ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$\therefore \underline{أ}^{-١} = \frac{١}{\Delta} \bullet \underline{م}' = \frac{-١}{٤} \begin{bmatrix} ١ & ١٠ & -٣ \\ -٢ & -٨ & ٢ \\ ٢ & ٤ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{٤} & \frac{-٥}{٢} & \frac{٣}{٤} \\ \frac{١}{٢} & ٢ & \frac{-١}{٢} \\ \frac{-١}{٢} & -١ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$$

تدريب (٦ – ٨)

تحقق من صحة الحل للمثال (٦ – ٢١) .

تمارين (٦ – ٦)

[١] حدد فيما إذا كان هناك معكوس ضربي للمصفوفات التالية أم لا :

أ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} -١ & ١ & ٢ \\ ١ & ١ & ١ \\ -٣ & -٢ & ١ \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٢ \\ ٨ & ٧ & ٥ \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٣ \\ ٠ & ١٢ & ٦ \\ ٢ & ١٨ & ٩ \end{bmatrix}$

[٢] أثبت أن كل مصفوفة مما يأتي هي معكوس نفسها :

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} \text{س} & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$

[٣] إذا كانت :

$\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، فأوجد :

أ) $\underline{\text{س}}^{-١}$ ب) $\underline{\text{ص}}^{-١}$

[٤] إذا كانت $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} \text{أب} & \text{أ} \\ \text{ب} & ٠ \end{bmatrix}$ علماً بأن : أ ب $\neq$ ٠ ، فأثبت أن : $\underline{\text{ص}}^{-١} = \begin{bmatrix} -١ & \frac{١}{\text{أ}} \\ \frac{١}{\text{ب}} & ٠ \end{bmatrix}$

[٥] أوجد معكوس كلٍّ من المصفوفات التالية :

أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٥ & ٥ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٧ & ٩ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} \text{جاهـ} & \text{جتاهـ} \\ \text{جتاهـ} & -\text{جاهـ} \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٣ & -١ & ٢ \\ ٨ & ١ & ٤ \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} -٣ & -٢ & ٦ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ١ & ٠ & -١ \end{bmatrix}$

٦ – ٧ حل نظام المعادلات من الدرجة الأولى

في هذا البند نتعرف على حل معادلات الدرجة الأولى في ثلاثة متغيرات على الأكثر باستخدام المصفوفات أو المحددات ، ويتم ذلك من خلال الأمثلة :

أ) حل نظام المعادلات باستخدام المصفوفات :

مثال (٦ – ٢٢)

حل المعادلتين الآنيتين التاليتين باستخدام المصفوفات : س + ٣ ص = ١
٤ س – ص = –٢ .

الحــــل :

الخطوة الأولى : إعادة كتابة كل المعادلات على صورة : أ س + ب ص = جـ ، والمعطى لنا في هذا المثال هو في الصورة المطلوبة .

الخطوة الثانية :

نكتب المعادلتين في صورة المصفوفات كالتالي :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -٢ \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (١)$$

لاحظ أن المصفوفة الأولى هي معاملات المتغيرات مرتبه حسب المتغيرات ، والمصفوفة الثانية مصفوفة المتغيرات، والمصفوفة الثالثة مصفوفة الحدود المطلقة بعد إعادة كتابة المعادلات بالشكل أ س + ب ص = جـ .

الخطوة الثالثة :

نوجد معكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، على النحو التالي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{vmatrix} = (١ \times -١) - (٣ \times ٤) = -١٣ \neq ٠$$

$$\therefore \text{ معكوس المصفوفة } \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} = \frac{١}{-١٣} \begin{bmatrix} -١ & -٣ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{١٣} & \frac{٣}{١٣} \\ \frac{٤}{١٣} & \frac{-١}{١٣} \end{bmatrix}$$

الخطوة الرابعة :

نضرب كلاً من طرفي المعادلة (١) في معكوس المصفوفة الأولى :

$$\begin{bmatrix} \frac{١}{١٣} & \frac{٣}{١٣} \\ \frac{٤}{١٣} & \frac{-١}{١٣} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{١٣} & \frac{٣}{١٣} \\ \frac{٤}{١٣} & \frac{-١}{١٣} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ \\ -٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{١}{١٣} + \frac{١٢}{١٣} & \frac{٣}{١٣} - \frac{٣}{١٣} \\ \frac{٤}{١٣} - \frac{٤}{١٣} & \frac{١٢}{١٣} + \frac{١}{١٣} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{١٣} - \frac{٦}{١٣} \\ \frac{٤}{١٣} + \frac{٢}{١٣} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-٥}{١٣} \\ \frac{٦}{١٣} \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-٥}{١٣} \\ \frac{٦}{١٣} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ س $= \frac{-٥}{١٣}$ ، ص $= \frac{٦}{١٣}$.

تدريب (٦ – ٩)

تحقق من صحة الحل في المثال (٦ – ٢٢) .

مثال (٦ – ٢٣)

حل المعادلات التالية باستخدام المصفوفات :

٢ س – ص + ع = ٠

س – ٤ ص – ٣ ع = ١

٣ س + ص + ٢ ع = ٣

الحـــل :

- نكتب المعادلات في صورة مصفوفات كالتالي :

$$\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & -٤ & -٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ١ \\ ٣ \end{bmatrix} \quad \text{............(١)}$$

- نحسب المحدد للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & -٤ & -٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$ فنجد أن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & -٤ & -٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} -٤ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} -١ \begin{vmatrix} -١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} +٣ \begin{vmatrix} -١ & ١ \\ -٤ & -٣ \end{vmatrix}$$

$$= ٢(-٨ + ٣) -١(-٢ - ١) + ٣(٣ + ٤) = -١٠ + ٣ + ٢١ = ١٤ \ .$$

■ نوجد معكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ -٣ & -٤ & ١ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$ وتساوي .

$$= \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٣}{١٤} & \frac{-٥}{١٤} \\ \frac{١}{٢} & \frac{١}{١٤} & \frac{-١١}{١٤} \\ \frac{-١}{٢} & \frac{-٥}{١٤} & \frac{١٣}{١٤} \end{bmatrix}$$

■ نضرب كلاً من طرفي المعادلة (١) في معكوس المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} ٠ \\ ١ \\ ٣ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٣}{١٤} & \frac{-٥}{١٤} \\ \frac{١}{٢} & \frac{١}{١٤} & \frac{-١١}{١٤} \\ \frac{-١}{٢} & \frac{-٥}{١٤} & \frac{١٣}{١٤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ -٣ & -٤ & ١ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٣}{١٤} & \frac{-٥}{١٤} \\ \frac{١}{٢} & \frac{١}{١٤} & \frac{-١١}{١٤} \\ \frac{-١}{٢} & \frac{-٥}{١٤} & \frac{١٣}{١٤} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{١٢}{٧} \\ \frac{١١}{٧} \\ \frac{-١٣}{٧} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} \frac{١٢}{٧} \\ \frac{١١}{٧} \\ \frac{-١٣}{٧} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

$\therefore$ س $= \frac{١٢}{٧}$ ، ص $= \frac{١١}{٧}$ ، ع $= \frac{-١٣}{٧}$.

تدريب (٦ – ١٠)

تحقق من صحة الحل في المثال (٦ – ٢٣) .

ب) حل نظام المعادلات باستخدام المحددات (طريقة كرامر) :

مثال (٦ – ٢٤)

حل المعادلتين التاليتين باستخدام المحددات (بطريقة كرامر) :

٢ س – ٣ ص = ٨

٣ س = ١ – ص .

الحـــل :

١ ■ نعيد كتابة المعادلات على الصورة : أ س + ب ص = جـ ، فنحصل على :

٢ س – ٣ ص = ٨

٣ س + ص = ١ .

٢ ■ نكتب المعادلتين بصورة مصفوفات على النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ \\ ١ \end{bmatrix}$$

٣ ■ نحسب المحدد للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ فنجد أن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٢ + ٩ = ١١ \ .$$

٤ ■ نوجد Δ س وذلك باستبدال عمود الحدود المطلقة بمعاملي س في محددة مصفوفـــة المعاملات Δ .

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٨ & -٣ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ٨ + ٣ = ١١ \ .$$

وبالمثل نوجد Δ ص كما يلي :

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٢ - ٢٤ = -٢٢ \ .$$

$$\therefore س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{١١}{١١} = ١ \quad ، \quad ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-٢٢}{١١} = -٢ \ .$$

تدريب (٦ – ١١)

تحقق من صحة الحل في المثال (٦ – ٢٤) .

مثال (٦ – ٢٤)

حل نظام المعادلات الخطية التالية باستخدام المحددات :

س + ص = ٣ ع + ٢

٣ س – ع – ٢ ص = ٤

س + ع = ٦ – ص .

الحـــل :

١■ نعيد كتابة المعادلات على الصورة: أ س + ب ص + جـ ع = ء ، فنحصل على :

س + ص − ٣ ع = ٢

٣ س − ٢ ص − ع = ٤

س + ص + ع = ٦ .

٢■ نكتب المعادلات بصورة مصفوفات على النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ & ٣- \\ ٣ & ٢- & ١- \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

٣■ نوجد Δ لمصفوفة المعاملات :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٣- \\ ٣ & ٢- & ١- \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = ٢٠-$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣- \\ ٤ & ٢- & ١- \\ ٦ & ١ & ١ \end{vmatrix} = ٦٠-$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣- \\ ٣ & ٤ & ١- \\ ١ & ٦ & ١ \end{vmatrix} = ٤٠-$$

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٢- & ٤ \\ ١ & ١ & ٦ \end{vmatrix} = ٢٠-$$

$\therefore$ س $= \dfrac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \dfrac{٦٠-}{٢٠-} = ٣$ ، ص $= \dfrac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \dfrac{٤٠-}{٢٠-} = ٢$ ،

ع $= \dfrac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = \dfrac{٢٠-}{٢٠-} = ١$.

$\therefore$ س = ٣ ، ص = ٢ ، ع = ١ .

تدريب (٦ – ١٢)

باستخدام المحددات (طريقة كرامر) أعد حل المثال رقم (٦ – ٢٣) وقارن بين النتيجتين .

تمارين ومسائل (٦ – ٧)

[١] حل كل زوج من المعادلات التالية باستخدام المصفوفات ، ثم باستخدام المحددات :

أ) ٣ س – ٥ ص = ١
٢ س – ص = ١

ب) س + ٤ ص = ٥
٣ س – ٢ ص = ١

جـ) س + ص = ٣
س – ص = ٥

د) ٢ س – ٣ ص = ٨
٣ س + ص = ١

هـ) ٣ س + ص = ٣
٢ س – ص = ٧

و) س = ١٢
ص = س + ٣

[٢] حل نظام المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات ، ثم باستخدام المحددات (طريقة كرامر) :

أ) س + ص + ع = ٢
٢ س + ص + ع = ٣
٥س – ٢ ص – ع = ٦

ب) س + ٢ ص = ٦ + ع
٢ س – ص + ع = ٥
٣ س + ٥ ص – ٧ ع = ١٢

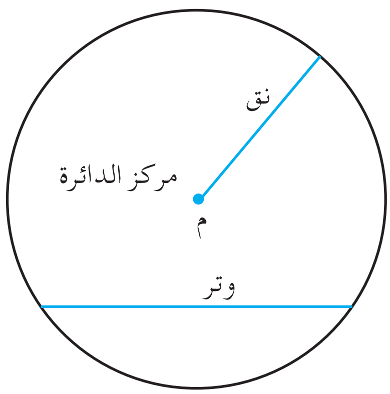
جـ) س + ٢ ص – ٣ ع = –١
٣ س + ٢ ع – ص = ٧
٣ ص + ٥ س – ٤ ع = ٢

د) ٢ س + ص – ٢ ع = ١٠
٣ س + ٢ ص + ٢ ع = ١
٥ س + ٤ ص + ٣ ع = ٤ .

الوحدة السابعة الهندسة الاحداثية

٧ - ١ معادلة الدائرة

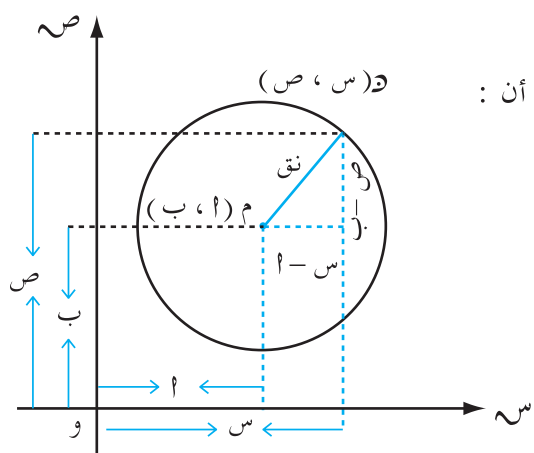
تأمل الشكل (٧-١) ، ثم تذكر أن :



الشكل (٧ - ١)

- الدائرة هي مجموعة نقاط في مستوى واحد تبعد عن نقطة ثابتة مسافات متساوية . تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ، وتسمى الدائرة باسم مركزها .
- نصف قطر الدائرة هو القطعة المستقيمة الواصلة من مركز الدائرة إلى أي نقطة تقع على الدائرة ، ونرمز لطول نصف القطر بالرمز نق .
- وتر الدائرة هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين من الدائرة .
- القوس هو جزء من الدائرة محصور بين نقطتين عليها .

لإيجاد معادلة الدائرة التي مركزها م (أ ، ب) وطول نصف قطرها نق ، نفرض أن النقطة ى (س ، ص) أحدى نقاط الدائرة [شكل (٧ - ٢)] .



الشكل (٧ - ٢)

∴ |م ى| = نق ، وحسب قانون البعد بين نقطتين نجد أن :

نق = $\sqrt{(\text{س} - \text{أ})^{٢} + (\text{ص} - \text{ب})^{٢}}$

نق^{٢} = (س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢}

أي :

(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = نق^{٢} .... (٧ - ١)

وهذه معادلة الدائرة التي مركزها النقطة م (أ ، ب) وطول نصف قطرها نق ، **وتسمى بالمعادلة القياسية للدائرة** .

وبعد فك الأقواس للمعادلة (٧ - ١) والاختصار ، وإعادة الترتيب ، تأخذ المعادلة الصورة :

س^{٢} + ص^{٢} - ٢ أ س - ٢ ب ص + أ^{٢} + ب^{٢} - نق^{٢} = ٠ .

ويمكن تبسيط هذه الصورة إذا عوضنا فيها عن أ^{٢} + ب^{٢} - نق^{٢} = جـ ، فتتحول إلى

س^{٢} + ص^{٢} - ٢ أ س - ٢ ب ص + جـ = ٠ .... (٧ - ٢)

تسمى المعادلة (٧–٢) **بالمعادلة العامة للدائرة** .

ويمكن ملاحظة أن المعادلة (٧ – ٢) تتميز بالخواص التالية :

١ ■ معادلة من الدرجة الثانية في كل من س ، ص .

٢ ■ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$.

٣ ■ لاتحوي حداً فيه س ص .

وبالعكس ، فإن كل معادلة لها الخواص الثلاث السابقة وتكتب على صورة المعادلة (٧–٢) هي معادلة دائرة .
ولاثبات ذلك نكتب المعادلة (٧–٢) بالصورة الآتية : $(س^٢ - ٢ ء س) + (ص^٢ - ٢ ب ص) = - جـ$.
نكمل كل قوس إلى مربع كامل باضافة مربع نصف معامل س ومربع نصف معامل ص إلى الطرفين فنجد :

$$(س^٢ - ٢ ء س + ء^٢) + (ص^٢ - ٢ ب ص + ب^٢) = ء^٢ + ب^٢ - جـ$$

أو $$(س - ء)^٢ + (ص - ب)^٢ = ء^٢ + ب^٢ - جـ$$

$$\Leftarrow \quad نق^٢ = ء^٢ + ب^٢ - جـ$$

$$\therefore \quad نق = \sqrt{ء^٢ + ب^٢ - ج}$$

نتيجة : يمكن كتابة المعادلة العامة للدائرة بالصورة : $(س - ء)^٢ + (ص - ب)^٢ = ء^٢ + ب^٢ - جـ$ ، وهنا نميز ثلاث حالات :

١ ■ إذا كان $ء^٢ + ب^٢ - جـ > ٠$ كانت الدائرة حقيقية .

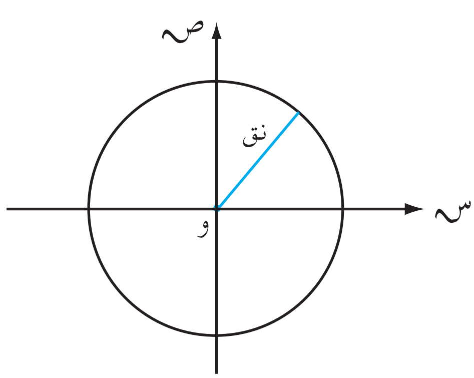
٢ ■ إذا كان $ء^٢ + ب^٢ - جـ = ٠$ ، آلت الدائرة إلى نقطة . أي لا توجد سوى نقطة وحيدة هي (ء ، ب) تحقق المعادلة .

٣ ■ إذا كان $ء^٢ + ب^٢ - جـ < ٠$ ، فإنه في هذه الحالة لاتوجد أي نقطة في المستوى تحقق المعادلة ، فمجموعة النقاط خالية (ونقول إن الدائرة تخيلية) .

حالات خاصة :

١ ■ إذا كان مركز الدائرة هي نقطة الاصل، شكل (٧–٣)، فإن ء = ب = ٠ ، وعليه تأخذ المعادلة القياسية للدائرة الصورة :

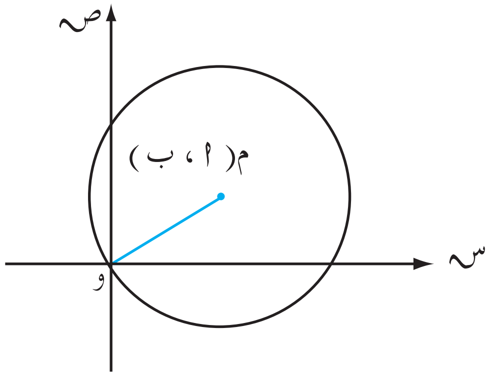
$$\boxed{س^٢ + ص^٢ = نق^٢} \quad ...... (٧–٣) .$$



الشكل (٧ – ٣)

٢ ■ إذا وقعت نقطة الأصل على الدائرة ، [شكل (٧–٤)]
فإنها تحقق معادلتها . وبالتعويض عن س = ص = ٠
في المعادلة العامة للدائرة ، نحصل على جـ = ٠ ،
أي أن : معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الاصل هـي :

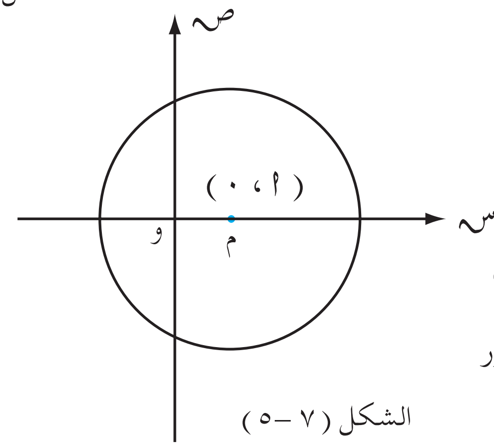
س^{٢} + ص^{٢} − ٢ أ س − ٢ ب ص = ٠ ...... (٧–٤)



الشكل (٧ – ٤)

٣ ■ إذا وقع مركز الدائرة على محور السينات ، فإن ب = ٠
شكل (٧–٥) ، وبالتعويض في المعادلة العامة للدائرة
تصبح معـادلة الدائرة التـي مركـزهـا على محـور
السينات هي :

س^{٢} + ص^{٢} − ٢ أ س + جـ = ٠ ..... (٧–٥)

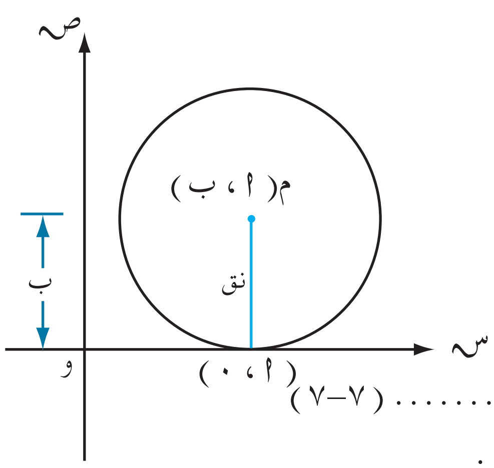


الشكل (٧ – ٥)

وبالمثل تكون معادلة الدائرة التي يقع مركزها على محور
الصادات (أ = ٠) هي :

س^{٢} + ص^{٢} − ٢ ب ص + جـ = ٠ .... (٧–٦)

٤ ■ إذا مست الدائرة محور السينات ، شكل (٧–٦) ،
يكون نق = ب ، أي ب^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} − جـ ،
ومنه نجد جـ = أ^{٢} . وبالتعويض في المعادلة العامـــة
للدائرة نحصل على :



س^{٢} + ص^{٢} − ٢ أ س − ٢ب ص + أ^{٢} = ٠ .... (٧–٧)

الشكل (٧ – ٦)

وبالمثل تكون معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات هي :

س^{٢} + ص^{٢} − ٢ أ س − ٢ب ص + ب^{٢} = ٠ ...... (٧–٨)

مثال (٧ – ١)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٤ ، −٣) وطول نصف قطرها $\sqrt{٦}$ وحدة طولية .

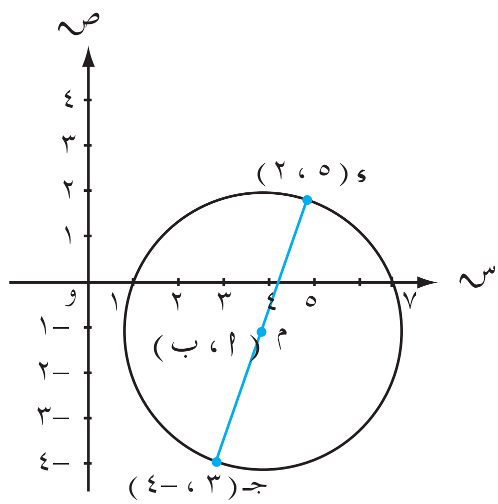
الحـــل :

بالتعويض في المعادلة القياسية للدائرة عن أ = ٤ ، ب = −٣ ، نق = $\sqrt{٦}$ ، نحصل على :
(س − ٤)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٦ أو س^{٢} + ص^{٢} − ٨س + ٦ ص + ١٩ = ٠ .

مثال (٧ - ٢)

أوجد معادلة الدائرة التي قطرها $\overline{\text{جـ ء}}$ حيث جـ (٣ ، -٤) ، ء (٥ ، ٢) .

الحـــل :



الشكل (٧ -٧)

من الشكل (٧ -٧) نوجد أولاً إحداثي مركز الدائرة ، ثم طول نصف قطرها .

بما أن المركز م منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$.

$\therefore \text{أ} = \dfrac{٥ + ٣}{٢} = ٤ \quad ، \quad \text{ب} = \dfrac{-٤ + ٢}{٢} = -١$

$\therefore$ م (٤ ، -١) .

بما أن نق $= |\text{م ء}| = |\text{م جـ}|$

$\therefore \text{نق}^{٢} = (٥ - ٤)^{٢} + (٢ + ١)^{٢} = ١٠$

بالتعويض في المعادلة القياسية للدائرة نحصل على :

$(\text{س} - ٤)^{٢} + (\text{ص} + ١)^{٢} = ١٠$

أو $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٨\text{س} + ٢\text{ص} + ٧ = ٠$.

مثال (٧ - ٣)

عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٦\text{س} - ٢\text{ص} - ٢٦ = ٠$.

الحـــل :

لتعيين مركز ونصف قطر الدائرة $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٦\text{س} - ٢\text{ص} - ٢٦ = ٠$ ــــ (١)

نكتب المعادلة العامة للدائرة $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{أس} - ٢\text{ب ص} + \text{جـ} = ٠$ ــــ (٢)

تقارن بين معاملات الحدود المتناظرة في المعادلتين (١) ، (٢) فنجد :

$٢\text{أ} = ٦ \quad ، \quad ٢\text{ب} = ٢ \quad ، \quad \text{جـ} = -٢٦$

$\therefore \text{أ} = ٣ \quad ، \quad \text{ب} = ١ \quad ، \quad \text{جـ} = -٢٦$

ولكن المعادلة العامة تمثل دائرة مركزها (أ ، ب) ، ونصف قطرها نق $= \sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{جـ}}$

إذن مركز الدائرة هو (٣ ، ١) ، ونصف قطرها نق $= \sqrt{٩ + ١ + ٢٦} = \sqrt{٣٦} = ٦$ وحدات طولية.

مثال (٧ - ٤)

ما نوع الدوائر التي تمثلها المعادلات التالية .

أ) $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ١٠\text{س} - ٤\text{ص} + ٢٩ = ٠$

ب) $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{س} + ٤\text{ص} - ٤ = ٠$

جـ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س - ٢ ص + ١١ = ٠$

الحـــــل :

بمقارنة كل معادلة مع المعادلة العامة للدائرة نحصل على :

أ) $ا = -٥$ ، $ب = ٢$ ، ∴ المركز (-٥ ، ٢) .

$نق = \sqrt{٢٥ + ٤ - ٢٩} = صفر$.

∴ المعادلة المعطاه تمثل نقطة وحيدة هي (-٥ ، ٢) .

ب) $ا = ١$ ، $ب = -٢$ ، ∴ المركز (١ ، -٢) .

$نق = \sqrt{١ + ٤ + ٤} = \sqrt{٩} = ٣ > ٠$

∴ المعادلة المعطاة تمثل دائرة مركزها (١ ، -٢) وطول نصف قطرها نق = ٣ .

جـ) $ا = ٣$ ، $ب = ١$ ، ∴ المركز (٣ ، ١) .

$نق = \sqrt{٩ + ١ - ١١} = \sqrt{-١}$ أي أن $نق^{٢} < ٠$

∴ لاتوجد أي نقطة في المستوى تحقق المعادلة المعطاة [أي مجموعة النقاط التي تحقق هذه المعادلة هي المجموعة الخالية] .

مثال (٧ - ٥)

اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (-١ ، ١) ، (٦ ، ٠) ، (-٢ ، ٤) .

الحـــــل :

المعادلة العامة للدائرة : $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ ا س - ٢ ب ص + جـ = ٠$

بما أن النقاط (-١ ، ١) ، (٦ ، ٠) ، (-٢ ، ٤) تقع على الدائرة ، فإن كلا منها تحقق المعادلة، بالتعويض عن النقاط في المعادلة نحصل على ثلاث معادلات تحوى ثلاثة متغيرات هي :

عند النقطة (-١ ، ١) فإن : $٢ ا - ٢ ب + جـ = -٢$ ———— (١)

عند النقطة (٦ ، ١) فإن : $- ١٢ ا + جـ = -٣٦$ ———— (٢)

عند النقطة (-٢ ، ٤) فإن : $٤ ا - ٨ ب + جـ = -٢٠$ ———— (٣)

الآن نطرح (٢) من (١) فينتج : $١٤ ا - ٢ ب = ٣٤$ ———— (٤)

نطرح (٢) من (٣) فينتج : $١٦ ا - ٨ ب = ١٦$ ———— (٥)

نحل المعادلتين (٤) ، (٥) فنجد : $ا = ٣$ ، $ب = ٤$ ، ومن معادلة (١) نجد أن : جـ = صفر .

وبالتعويض في المعادلة العامة للدائرة تكون معادلة الدائرة المطلوبة هي : $س٢ + ص٢ - ٦س - ٨ص = ٠$

تدريب (٧ – ١)

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة في مثال (٧ –٥) .

مثال (٧ – ٦)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها على محور السينات وتمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (٤ ، ١) .

الحـــل :

معادلة الدائرة التي يقع مركزها على محور السينات (ب = ٠) هي :

$س^{٢} + ص^{٢} - ٢أ\,س + جـ = ٠$ ——— (١)

نعوض عن إحداثي كل من النقطتين (٠ ، ٣) ، (٤ ، ١) في المعادلة (١) فنحصل على :

$٩ + جـ = ٠$ ، $\therefore جـ = -٩$.

$-٨أ + جـ = -١٧$ ، $\therefore -٨أ - ٩ = -١٧$ ، $\therefore أ = ١$

وبالتعويض عن قيمتي أ ، جـ في المعادلة (١) ، نحصل على معادلة الدائرة المطلوبه هي :

$س^{٢} + ص^{٢} - ٢س - ٩ = ٠$.

مثال (٧ – ٧)

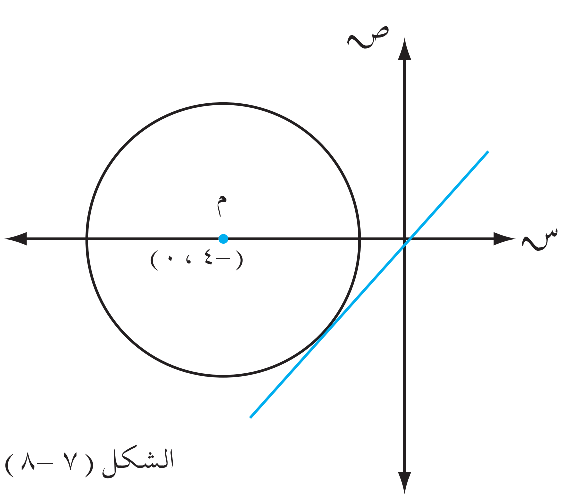
أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (–٤ ، ٠) تمس المستقيم $٤س - ٣ص + ١ = ٠$

الحـــل :

نوجد طول نصف القطر ، وهو بعد المركز (–٤ ، ٠) عن المستقيم : $٤س - ٣ص + ١ = ٠$

$$\therefore نق = \frac{|أ\,س_{١} + ب\,ص_{١} + جـ|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}}$$ (بعد نقطة عن مستقيم) .

$$= \frac{|٤ \times -٤ - ٣ \times ٠ + ١|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{١٥}{٥} = ٣$$



الشكل (٧ –٨)

$\because$ م (–٤ ، ٠) ، نق = ٣ وحدات

$\therefore$ معادلة الدائرة هي :

$(س + ٤)^{٢} + (ص - ٠)^{٢} = ٩$

أو $(س + ٤)^{٢} + ص^{٢} = ٩$.

[انظر الشكل (٧–٨)] .

تمارين ومسائل (٧ – ١)

[١] أوجد معادلة كل من الدوائر الآتية حيث م مركزها ونق طول نصف قطرها :

أ) م (٠ ، ٠) ، نق = ٢ ، ب) م (٠ ، ٠) ، نق = $\sqrt{٧}$ ،

جـ) م (٠ ، ٠) ، وتمر بالنقطة (١ ، ٢) ، د) م (٢ ، –١) ، نق = ٤ ،

هـ) م (–٥ ، ٠) ، نق = $\sqrt{١٠}$ ، و) م (–١ ، ٢) ، وتمر بالنقطة (–٢ ، ٠) .

[٢] أوجد معادلة الدائرة في الحالات الآتية :

أ) قطرها $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب (٥ ، –٣) ، جـ (–٢ ، –١) ،

ب) قطرها $\overline{\text{ءهـ}}$ حيث د (٢ ، –٣) ، هـ (٦ ، ٥) ،

جـ) قطرها $\overline{\text{ل ى}}$ حيث ل ($-\frac{٣}{٢}$ ، ١) ، ى (٢ ، $\frac{١}{٢}$) .

[٣] أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٢ ، –٤) وتمس المستقيم ١٢ س + ٥ ص = ١٧ .

[٤] أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمس المستقيم الواصل بين النقطتين (٢ ، ٣) (–١ ، ٤) .

[٥] أوجد معادلة دائرة نصف قطرها ٦ وحدات طولية ، وتمس محور السينات ويقع مركزها على المستقيم :

٤ س + ص = ١٠ .

[٦] أوجد معادلة دائرة نصف قطرها ٧ وحدات طولية، وتمس محور الصادات ويقع مركزها على المستقيم :

٢ س + ٥ ص + ٦ = ٠ .

[٧] أثبت أن النقاط (٥ ، –١٤) ، (–١٠ ، ١١) ، (٢ $\sqrt{١٣}$ ، ١٣) تقع على محيط دائرة مركزها نقطة الأصل ، ثم أوجد معادلتها .

[٨] ما نوع الدوائر التي تمثلها المعادلات التالية :

أ) س^٢ + ص^٢ – ٤ س + ٢ ص + ١١ = ٠ ، ب) س^٢ + ص^٢ – ٢ س + ٤ ص + ٧ = ٠ ،

جـ) س^٢ + ص^٢ – ٢ س + ٤ ص + ٥ = ٠ ، د) ٢ س^٢ + ٢ ص^٢ – ٨ س + ٦ ص – ١٢ = ٠ .

[٩] أوجد معادلة قطر الدائرة : ٢ س^٢ + ٢ ص^٢ – ٧ س + ٨ ص = ٦ ، والذي يمر بالنقطة (–١ ، ٢) .

[١٠] أوجد قيمتي أ ، ب للدائرتين التاليتين متحدتي المركز :

س^٢ + ص^٢ – أ س + ٨ ص = ٠

س^٢ + ص^٢ + ٩ س + ب ص + ٧ = ٠ .

[١١] أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (٢ ، –٣) ، والمتحدة المركز مع الدائرة :

س^٢ + ص^٢ – ٤ س + ٢ ص – ٥ = ٠ .

[١٢] أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط التالية ، ثم عين مركزها ونصف قطرها :

أ) (٠ ، ٠) ، (٠ ، ٢) ، (٢ ، ٠) .

ب) (١ ، ٢) ، (٣ ، –٢) ، (٤ ، ١) .

جـ) (−١ ، ٣) ، (٤ ، ٧) ، (٢ ، ٥) .

[١٣] أوجد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على محور السينات وتمر بالنقطتين (−١ ، −٢) ، (٣ ، ٥) .

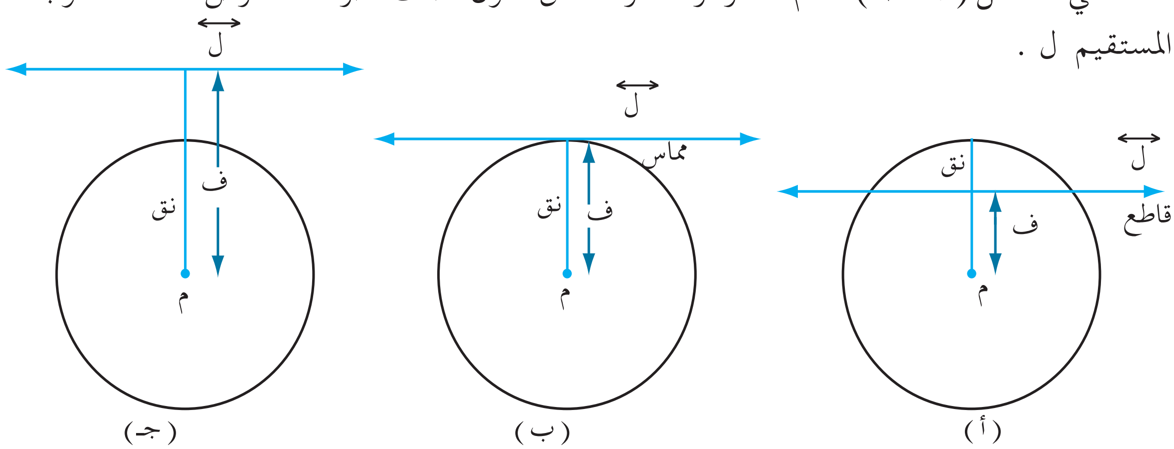
[١٤] أوجد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على محور الصادات وتمر بالنقطتين (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) .

[١٥] أوجد معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل وتقطع من محور السينات ٦ وحدات طولية ، ومن محور الصادات السالب ٨ وحدات طولية .

[١٦] بيّن أن النقاط (٢ ، ٠) ، (−٢ ، ٠) ، (١ ، −١) ، (−١ ، ٣) تقع على محيط دائرة واحدة . أوجد معادلتها ، ومركزها ، واحسب طول نصف قطرها .

٧ – ٢ الأوضاع النسبية لمستقيم ودائرة

في الشكل (٧ – ٩) : م مركز الدائرة ، نق طول نصف قطرها . لنفرض أن ف هو بعد المركز عن المستقيم ل .



الشكل (٧ – ٩)

نلاحظ أنه :

١ ■ إذا كان ف < نق ، فالمستقيم ل يقطع الدائرة في نقطتين [شكل (٧ – ٩) (أ)] .

٢ ■ إذا كان ف = نق ، فالمستقيم ل يمس الدائرة [شكل (٧ – ٩) (ب)] .

٣ ■ إذا كان ف > نق ، فالمستقيم ل لايقطع الدائرة [شكل (٧ – ٩) (جـ)] .

يمكن إيجاد البعد ف باستخدام قانون بعد نقطة عن مستقيم .

مثال (٧ – ٨)

لتكن : $س^{٢} + ص^{٢} - ٨ س + ٨ = ٠$ دائرة معطاه ، عيِّن وضع كل من المستقيمات التالية بالنسبة لهذه الدائرة:

أ) ١٢ س + ٥ ص – ٣ = ٠ ، ب) س – ص = ٠ ،

جـ) ٣ س – ص – ٥ = ٠ .

الحـــل :

نعيّن مركز الدائرة، ونحسب طول نصف قطرها فنجد أن : مركزها م (٤ ، ٠)، نصف قطرها نق = ٢ $\sqrt{٢}$.

أ) بعد م (٤ ، ٠) عن المستقيم ١٢ س + ٥ ص – ٣ = ٠ :

ف = $\frac{|١٢ \times ٤ + ٥ \times ٠ - ٣|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥}}$ = $\frac{٤٥}{١٣}$

بما أن $\frac{٤٥}{١٣} > ٢\sqrt{٢}$ ، $\therefore$ ف > نق .

$\therefore$ المستقيم لايقطع الدائرة شكل (٧ – ١٠)

ب) بعد المركز عن المستقيم س – ص = ٠

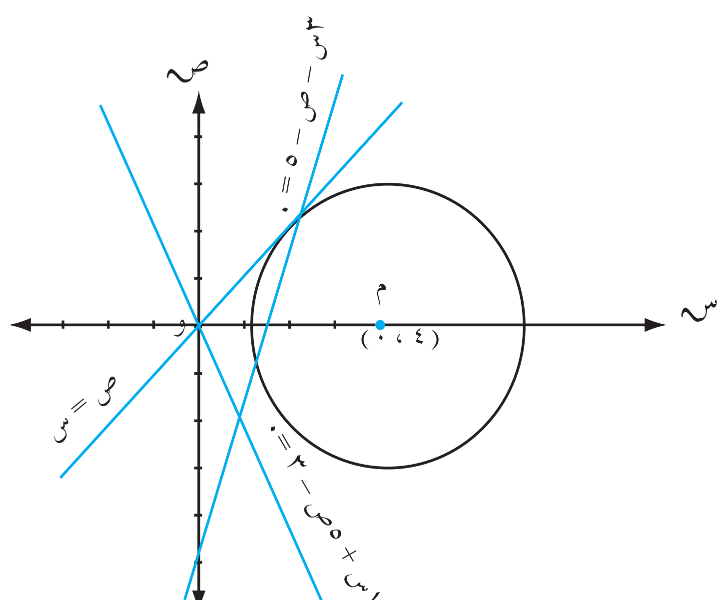
ف = $\frac{|٤ - ٠|}{\sqrt{١ + ١}}$ = $\frac{٤}{\sqrt{٢}}$ = $٢\sqrt{٢}$

$\because$ ف = نق ، $\therefore$ المستقيم يمس الدائرة شكل (٧ – ١٠)

جـ) ف = $\frac{|٣ \times ٤ - ١ \times ٠ - ٥|}{\sqrt{٩ + ١}}$ = $\frac{٧}{\sqrt{١٠}}$

بالمقارنة بين ف و نق نستنتج أن : ف < نق .

$\therefore$ المستقيم يقطع الدائرة في نقطتين شكل (٧ – ١٠) .



الشكل (٧ – ١٠)

مثال (٧ – ٩)

أوجد نقاط تقاطع المستقيم س – ص – ١ = ٠ مع الدائرة : $س^٢ + ص^٢ + ٢س - ٤ص - ١١ = ٠$

الحـــل :

لإيجاد نقاط التقاطع نحل المعادلتين :

$س - ص - ١ = ٠$ .... (١)

$س^٢ + ص^٢ + ٢س - ٤ص - ١١ = ٠$ .... (٢)

من المعادلة (١) نجد : $ص = س - ١$

وبالتعويض في معادلة (٢) نحصل على :

$س^٢ + (س - ١)^٢ + ٢س - ٤(س - ١) - ١١ = ٠$

أو $س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$ .... (٣)

$(س + ١)(س - ٣) = ٠$

المعادلة (٣) هي معادلة من الدرجة الثانية لها حلان هما : $س = -١$ ، $س = ٣$.

وبالتعويض في معادلة (١) نجد أن : $ص = -٢$ ، $ص = ٢$. نقاط التقاطع هي :

$(-١ ، -٢)$ ، $(٣ ، ٢)$.

تمارين ومسائل (٧-٢)

[١] عيِّن وضع كل من المستقيمات الآتية بالنسبة للدائرة : $س^٢ + ص^٢ = ١٠$:

أ) $س - ٢ص + ١ = ٠$ ، ب) $س - ٣ص + ١٠ = ٠$ ،

جـ) $٢س + ص - ٩ = ٠$ ، د) $ص = \sqrt{١٠}$.

[٢] أوجد نقطتي تقاطع المستقيم $س + ص - ٢ = ٠$ ، مع الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٤$.

[٣] عيِّن وضع المستقيمات التالية بالنسبة للدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٦ص + ٤ = ٠$ ، وأوجد نقاط التقاطع والتماس :

أ) $٣س + ٤ص - ١٢ = ٠$ ، ب) $٣س + ٤ص - ٩ = ٠$ ،

جـ) $س - ص - ٢ = ٠$. د) $س = ٥$

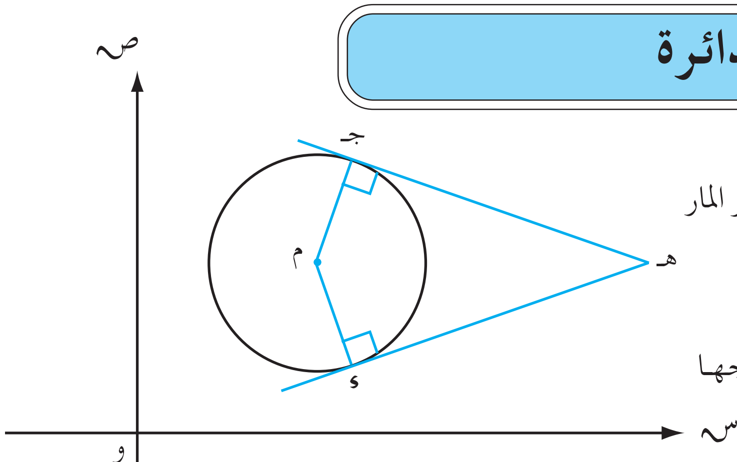
[٤] أوجد نقطتي تقاطع المستقيم $س + ص - ٤ = ٠$ ، مع الدائرة : $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٢ص - ٢٠ = ٠$.

[٥] احسب طول الوتر الذي تحصره الدائرة : $س^٢ + ص^٢ = ٥$ من المستقيم : $٣س - ص + ٥ = ٠$.

[٦] أثبت أن المستقيم $ص - ٢س = ٤$ يمس الدائرة $س^٢ + ص^٢ + ٢ص - ٤ = ٠$ ، ثم أوجد نقطة التماس .

[٧] ادرس وضـع الدائرة المارة بالنقاط $(١ ، ١)$ ، $(٠ ، ١)$ ، $(٠ ، -١)$ مع المستقيم المار بالنقطتين $(٠ ، ٠)$ ، $(٢ ، ٠)$.

٧ – ٣ معادلة المماس لدائرة



الشكل (٧ – ١١)

تأمل شكل (٧–١١) وتذكر أن :

– مماس الدائرة يكون عموديا على نصف القطر المار بنقطة التماس أي أن .

$\overline{هـ جـ} \perp \overline{م جـ}$ ، $\overline{هـ ء} \perp \overline{م ء}$

– المماسان المرسومان لدائرة من نقطة خارجها متطابقان . أي أن :

$|\overline{هـ جـ}| = |\overline{هـ ء}|$

أولا : معادلة المماس لدائرة من نقطة عليها :

في الشكل (٧ – ١٢) : النقطة ء (س$_١$ ، ص$_١$) واقعة على الدائرة :

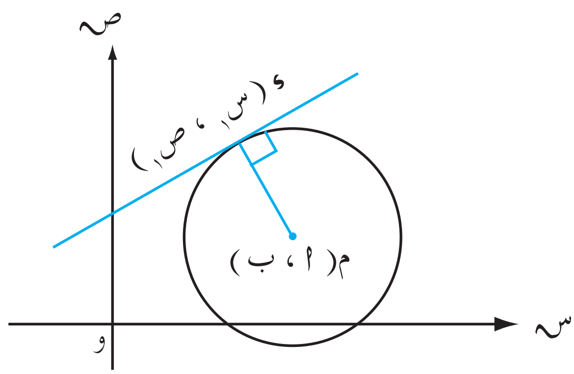
$س^٢ + ص^٢ - ٢ أ س - ٢ ب ص + جـ = ٠$

$\therefore$ $س_١^٢ + ص_١^٢ - ٢ أ س_١ - ٢ ب ص_١ + جـ = ٠$ .... (١)

ميل نصف القطر $\overline{م ء} = \left(\frac{ص_١ - ب}{س_١ - أ}\right)$.

بما أن المماس عمودي على نصف القطر $\overline{م ء}$ ،

$\therefore$ ميل المماس $= -\left(\frac{س_١ - أ}{ص_١ - ب}\right)$



الشكل (٧ – ١٢)

بهذا تكون معادلة المماس بمعلومية ميله ونقطة واقعة عليه هي :

$ص - ص_١ = -\left(\frac{س_١ - أ}{ص_١ - ب}\right)(س - س_١)$

$\Leftarrow$ $س_١ س + ص_١ ص - ب ص - أ س - س_١^٢ - ص_١^٢ + أ س_١ + ب ص_١ = ٠$ .... (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج :

$$\boxed{س_١ س + ص_١ ص - أ (س + س_١) - ب (ص + ص_١) + جـ = ٠} \quad ...... (٧–٩)$$

وهي معادلة المماس للدائرة التي مركزها (أ ، ب) ونقطة التماس (س$_١$ ، ص$_١$) .

ملاحظة :

يمكن كتابة معادلة المماس لدائرة عند نقطة (س$_١$ ، ص$_١$) عليها بمجرد النظر إلى معادلتها وذلك :

١ ■ بتعويض $س_١ س$ ، $ص_١ ص$ بدلا عن $س^٢$ ، $ص^٢$ (على الترتيب) .

٢ ■ بتعويض $\left(\frac{س + س_١}{٢}\right)$ ، $\left(\frac{ص + ص_١}{٢}\right)$ بدلاً عن س ، ص (على الترتيب) .

حالة خاصة :

في الحالة التي يكون فيها مركز الدائرة هي نقطة الأصل ، تكون معادلة المماس هي :

$$\boxed{س\, س_١ + ص\, ص_١ = نق^٢} \quad \ldots\ldots\ (٧-١٠)$$

مثال (٧ - ١٠)

أوجد معادلة المماس للدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٢٠$ ، عند النقطة (-٢ ، ٤) .

الحـــل :

بالتعويض في المعادلة : $س_١ س + ص_١ ص = نق^٢$ عن $س_١ = -٢$ ، $ص_١ = ٤$ ، $نق^٢ = ٢٠$

نحصل على المعادلة المطلوبة وهي :

$-٢س + ٤ص = ٢٠$ أو $٢ص - س = ١٠$.

مثال (٧ - ١١)

أوجد معادلة المماس للدائرة : $س^٢ + ص^٢ + ٦س - ٤ص - ١٣ = ٠$ عند النقطة (٢ ، ٣) .

الحـــل :

من معادلة الدائرة المعطاة نجد أن : أ = -٣ ، ب = ٢ ، جـ = -١٣ . إحداثي نقطة التماس $س_١ = ٢$ ، $ص_١ = ٣$.

نعوض بهذه القيم في المعادلة (٧-٩) نحصل على معادلة المماس المطلوبة وهي :

$٢س + ٣ص + ٣(س + ٢) - ٢(ص + ٣) - ١٣ = ٠ \Leftarrow ٥س + ص - ١٣ = ٠$.

مثال (٧ - ١٢)

المستقيم $٣س + ٢ص - ٤ = ٠$ يقطع الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٤$ في النقطتين ى ، هـ . أوجد نقطة تقاطع المماسين للدائرة عند ى ، هـ .

الحـــل :

بحل المعادلتين $٣س + ٢ص = ٤$

$س^٢ + ص^٢ = ٤$

نجد نقطتي التقاطع ى(٠ ، ٢) ، هـ $\left(\frac{٢٤}{١٣} ، -\frac{١٠}{١٣}\right)$.

بما أن معادلة المماس لدائرة مركزها نقطة الأصل عند نقطة ($س_١$ ، $ص_١$) هي : $س_١ س + ص_١ ص = نق^٢$

∴ معادلة المماس للدائرة عند النقطة ء هي : $٠ \times س + ٢ص = ٤$ أو $ص = ٢$ .... (١)

ومعادلة المماس عند النقطة هـ هي :

$$\frac{٢٤}{١٣} س - \frac{١٠}{١٣} ص = ٤$$

أو $١٢س - ٥ ص = ٢٦$ .... (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على نقطة تقاطع المماسين وهي (٣ ، ٢) .

ثانيا : معادلة المماس لدائرة بمعلومية ميله :

نعرف أن المعادلة :

$(س - ا)^٢ + (ص - ب)^٢ = نق^٢$

تمثل دائرة مركزها م (ا ، ب) وطول نصف قطرها نق .

فإذا أردنا إيجاد معادلات المماسات لهذه الدائرة بمعلومية ميلها ، فإننا نعلم أولا إنه يمكننا كتابة معادلات المستقيمات التي ميلها مـ بالصورة التالية :

$ص = مـ س + جـ$ .... (١)

أو $مـ س - ص + جـ = ٠$

وعليه فإننا نقوم بإيجاد قيم جـ التي تجعل المستقيم المعطى بالمعادلة (١) مماسا للدائرة المعطاة .

من المعلوم أن بعد مركز الدائرة م(ا ، ب) عن المستقيم (١) يساوي نصف القطر . أي أن شرط التماس هو :

$$نق = \frac{| ا مـ - ب + جـ |}{\sqrt{مـ^٢ + ١}}$$

أي أن : $ا مـ - ب + جـ = \pm نق \sqrt{مـ^٢ + ١}$

أو $جـ = ب - ا مـ \pm نق \sqrt{مـ^٢ + ١}$

أي أن هناك قيمتين لـ جـ ، وهذا يعني إنه يوجد مماسان للدائرة ميل كل منهما مـ ، وبتعويض قيم جـ في المعادلة (١) نحصل على معادلتي المماسين كالتالي :

$$\boxed{ص = مـ س \pm نق \sqrt{مـ^٢ + ١} + (ب - ا مـ)} \quad ...... (٧-١١)$$

حالة خاصة :

إذا كان مركز الدائرة هي نقطة الأصل (٠ ، ٠) ، تكون معادلتا المماسين للدائرة كالتالي :

$$\boxed{ص = مـ س \pm نق \sqrt{مـ^٢ + ١}} \quad .... (٧-١٢)$$

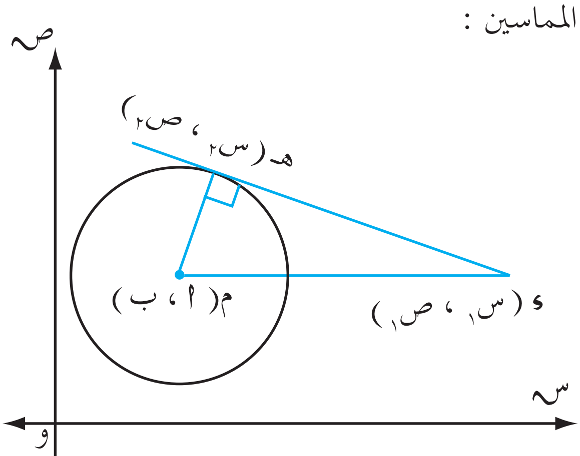
مثال (٧ – ١٣)

أوجد معادلة المماسات التي ميلها مـ = ٢ للدائرة : $س^{٢} + ص^{٢} - ٦س - ٦ص - ١٨ = ٠$

الحـــل :

من معادلة الدائرة المعطاة نجد أن : أ = ٣ ، ب = ٣ ، $نق = \sqrt{٩ + ٩ + ١٨} = \sqrt{٣٦} = ٦$.

وبالتعويض في المعادلة (٧ – ١١) نحصل على معادلتي المماسين :



الشكل (٧ –١٣)

معادلة المماس الأول :

$ص = ٢س + ٦\sqrt{٤ + ١} + (٣ - ٣ \times ٢)$

أو $ص = ٢س - ٣ + ٦\sqrt{٥}$

معادلة المماس الأخرى : $ص = ٢س - ٣ - ٦\sqrt{٥}$

ثالثا : معادلة المماس لدائرة من نقطة خارجة عنها :

في الشكل (٧ –١٣) : م دائـرة معادلتهـا $(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = نق^{٢}$ ، ء ($س_١$ ، $ص_١$) نقطة خارج الدائرة ، $\overleftrightarrow{ءهـ}$ مماس للدائرة .

لإيجاد معادلة مثل هذا المماس ، نفرض أن هـ($س_٢$ ، $ص_٢$) هي نقطة التماس .

بما أن هـ تقع على الدائرة ، فهي تحقق معادلتها ، أي

$$(س_٢ - أ)^{٢} + (ص_٢ - ب)^{٢} = نق^{٢} \quad ......(١)$$

$$ميل\ المماس\ \overline{ءهـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$ميل\ نصف\ القطر\ \overline{مهـ} = \frac{ص_٢ - ب}{س_٢ - أ}$$

بما أن $\overline{مهـ}$ عمودي على $\overleftrightarrow{ءهـ}$ ، إذن : $\left(\frac{ص_٢ - ب}{س_٢ - أ}\right) \times \left(\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}\right) = -١$

$$(س_٢ - س_١)(س_٢ - أ) + (ص_٢ - ص_١)(ص_٢ - ب) = ٠ \quad ....(٢)$$

وبحـــل المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على إحداثي نقطة التماس ، ومن ثم نستطيع إيجاد معادلتي المماسين من النقطة ء ($س_١$ ، $ص_١$) للدائرة م .

مثال (٧ – ١٤)

أوجد معادلات المماسات للدائرة : $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ من النقطة (١٠ ، ٠) .

الحـــل :

لتكن ($س_٢$ ، $ص_٢$) هي نقطة التماس . نلاحظ أن :

$أ = ب = ٠$ ، $نق = ٥$ ، $س_١ = ١٠$ ، $ص_١ = ٠$

بالتعويض عن هذه القيم في (١) ، (٢) نحصل على :

$$س_٢^٢ + ص_٢^٢ = ٢٥$$

$$(س_٢ - ١٠) س_٢ + ص_٢^٢ = ٠$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على :

$$س_٢ = \frac{٥}{٢} \quad ، \quad ص_٢ = \pm \frac{٥\sqrt{٣}}{٢} .$$

$\therefore$ نقطتا التماس هما $\left(\frac{٥}{٢} ، \frac{٥\sqrt{٣}}{٢} \right)$ ، $\left(\frac{٥}{٢} ، -\frac{٥\sqrt{٣}}{٢} \right)$.

إذن لدينا مماسان يمران بالنقطة (١٠ ، ٠) .

وتكون معادلة المماس الأول ، وهي معادلة مستقيم يمر بالنقطتين (١٠ ، ٠) ، $\left(\frac{٥}{٢} ، \frac{٥}{٢}\sqrt{٣} \right)$ هي :

$$ص = -\frac{\sqrt{٣}}{٣} (س - ١٠)$$

معادلة المماس الآخر ، وهي معادلة مستقيم يمر بالنقطتين (١٠ ، ٠) ، $\left(\frac{٥}{٢} ، -\frac{٥}{٢}\sqrt{٣} \right)$ هي :

$$ص = \frac{\sqrt{٣}}{٣} (س - ١٠) .$$

تمارين ومسائل (٧ - ٣)

[١] أوجد معادلة المماس للدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ عند النقطة (٣ ، -٤) .

[٢] أوجد معادلة المماس للدائرة : $٩ س^٢ + ٩ص^٢ = ٢$ عند النقطة $\left(\frac{١}{٣} ، -\frac{١}{٣} \right)$.

[٣] أوجد معادلة المماس عند النقطة (١ ، -١) للدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٣ س + ٢ ص + ٣ = ٠$.

[٤] أثبت أن الدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٤ س - ١٠ ص = ٠$ تمر بنقطة الأصل ثم أوجد معادلة المماس للدائرة عند هذه النقطة .

[٥] أثبت أن المماسين للدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٤١$ عند النقطتين (٥ ، -٤) ، (٤ ، ٥) متعامدان ، وأوجد نقطة تقاطعهما .

[٦] أثبت أن المستقيم $ص = س + ع \sqrt{٢}$ يمس الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ع^٢$ ، ثم أوجد نقطة التماس .

[٧] أوجد معادلة المماسات التي ميلها $\frac{١}{٢}$ للدائرة : $س^٢ + ص^٢ = ٢٠$.

[٨] أوجد معادلة مماسات الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} = ٤ الموازية للمستقيم س + ٢ص + ٣ = ٠ .

[٩] أوجد معادلة المماسات للدائرة : س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س − ٢ص − ٢ = ٠ الموازية للمستقيم س + ٢ص − ٦ = ٠ .

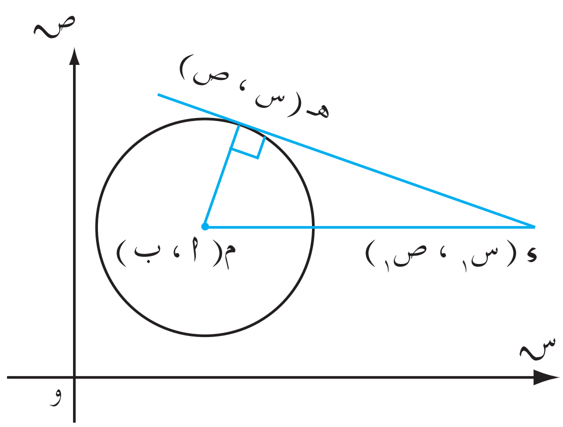
[١٠] أوجد معادلتي المماسين للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٣٧ المتعامدين مع المستقيم س + ٦ ص = ٠ .

[١١] أوجد معادلتي المماسين للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٤ من النقطة (٤ ، ٠)

[١٢] أوجد معادلتي المماسين المرسومين من النقطة (٥ ، ٤) إلى الدائرة :
س^{٢} + ص^{٢} − ٦س − ٤ص + ٩ = ٠ .

[١٣] أوجد معادلتي المماسين المرسومة من النقطة (−٢ ، ٣) إلى الدائرة :
س^{٢} + ص^{٢} − ٤س + ٨ص = ٣٧ .

٧ − ٤ طول المماس لدائرة من نقطة خارجة عنها



الشكل (٧ − ١٤)

تأمل الشكل (٧ − ١٤) .

القطعة ء هـ هي جزء من المماس للدائرة م .

نسمي الطول |ء هـ| بطول المماس .

لنحسب طول المماس المرسوم من النقطة ء(س$_{١}$ ، ص$_{١}$)
للدائرة م التي معادلتها :

س^{٢} + ص^{٢} − ٢ أ س − ٢ ب ص + جـ = ٠

يمكن كتابة معادلة الدائرة أعلاه بالصورة :

(س− أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} − جـ = نق^{٢}

فإذا رمزنا لطول المماس من ء إلى هـ بالرمز ف

ف^{٢} = |ء م|^{٢} − |م هـ|^{٢} = |ء م|^{٢} − نق^{٢} ، ($\overleftrightarrow{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$)

ولكن

|ء م|^{٢} = (س$_{١}$ − أ)^{٢} + (ص$_{١}$ − ب)^{٢} (قانون البعد بين نقطتين)

ف^{٢} = (س$_{١}$ − أ)^{٢} + (ص$_{١}$ − ب)^{٢} − (أ^{٢} + ب^{٢} − جـ)

وبفك الأقواس والاختصار ينتج :

ف^{٢} = س$_{١}^{٢}$ + ص$_{١}^{٢}$ − ٢ أ س$_{١}$ − ٢ ب ص$_{١}$ + جـ .... (٧− ١٣)

ملاحظة :

مربع طول المماس المرسوم من النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ينتج من المعادلة العامة للدائرة كما لأتي :

١■ بعد نقل جميع حدودها إلى طرف واحد وجعل معاملي $س^٢$ ، $ص^٢$ يساويان واحد صحيح .

٢■ نعوض بـ $س_١$ ، $ص_١$ بدلاً عن س ، ص (على الترتيب) .

مثال (٧ – ١٥)

احسب طول المماس المرسوم من النقطة (٣ ، ٢) لدائرة مركزها (–١ ، ٣) ونصف قطرها ٢ .

الحـــل :

نلاحظ أن : أ = –١ ، ب = ٣ ، نق = ٢ ، $س_١$ = ٣ ، $ص_١$ = ٢ ،

جـ = $(–١)^٢ + (٣)^٢ – ٤ = ٦$. وبالتعويض في المعادلة (٧–١٣) نجد :

$ف^٢ = (٣)^٢ + (٢)^٢ – ٢ (–١ \times ٣) – ٢ (٣ \times ٢) + ٦ = ٩ + ٤ + ٦ – ١٢ + ٦ = ١٣$

∴ طول المماس = ف = $\sqrt{١٣}$ وحدة طولية .

مثال (٧ – ١٦)

احسب طول المماس المرسوم من النقطة (٥ ، ١) للدائرة : $س^٢ + ص^٢ – ٢ س + ٨ ص + ٧ = ٠$

الحـــل :

أ = ١ ، ب = –٤ ، جـ = ٧ ، $س_١$ = ٥ ، $ص_١$ = ١

∴ $ف^٢ = (٥)^٢ + (١)^٢ – ٢ (١ \times ٥) – ٢ (–٤ \times ١) + ٧ = ٢٥ + ١ – ١٠ + ٨ + ٧ = ٣١$

∴ طول المماس = ف = $\sqrt{٣١}$ وحدة طولية .

تمارين ومسائل (٧–٤)

[١] احسب طول المماس المرسوم من النقطة (٢ ، –٢) للدائرة : $س^٢ + ص^٢ = ٤$.

[٢] احسب طول المماس المرسوم من النقطة (–٥ ، ٠) للدائرة : $س^٢ + ص^٢ – ٨ص – ١٦ = ٠$

[٣] احسب طول المماس المرسوم من النقطة (–١ ، ٤) للدائرة : $س^٢ + ص^٢ – ٤س + ٢ص = ٤$.

[٤] أثبت أن أطوال المماسات المرسومة من النقطة (٠ ، ٤) للدوائر الآتية متساوية :

$س^٢ + ص^٢ = ١٠$ ، $س^٢ + ص^٢ – ٥ س + ٩ ص = ٤٦$.

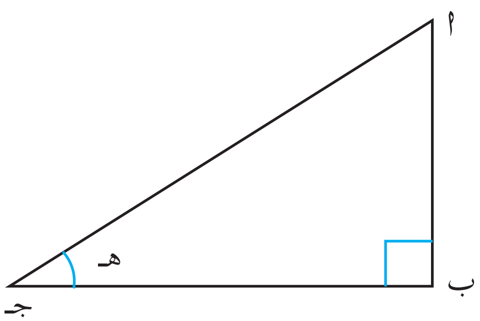
الوحدة الثامنة الهندسة الفضائية

٨ – ١ المستوى والفضاء

مراجعة :

تعرّفت مفهوم النقطة والمستقيم سابقاً ، وأنت تحتاج هذه المفاهيم لدراسة الهندسة الفضائية كما تحتاج بعض المبرهنات والعلاقات التي سبق لك دراستها ؛ ومن أهمها :

- ١ المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث ويساوى نصفه طولاً .
- ٢ تتطابق زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين .
- ٣ في المثلث القائم الزاوية طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوى نصف طول الوتر .
- ٤ في المثلث القائم الزاوية المستقيم الواصل من رأس القائمة إلى منتصف الوتر يساوى نصف طول الوتر .
- ٥ في المثلث القائم الزاوية مربع الوتر يكافيء مجموع مربعي الضلعين القائمين .
- ٦ في Δ أ ب جـ القائم الزاوية في ب يكون :



ظا هـ = $\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{ب جـ}|}$ ، جا هـ = $\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{أ جـ}|}$ ، جتا هـ = $\frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{أ جـ}|}$

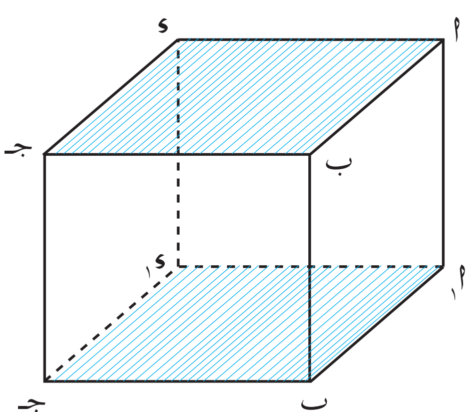
- ٧ إذا كانت الزوايا المتناظرة في المثلثين متطابقة فإنهما متشابهان .
- ٨ الزاوية المرسومة في نصف دائرة قائمة .
- ٩ مماس الدائرة يكون عمودياً على نصف القطر عند نقطة التماس .

وبعد هذا التذكير بالمفاهيم والعلاقات في الهندسة المستوية نتعرّض لمفهوم الفضاء .

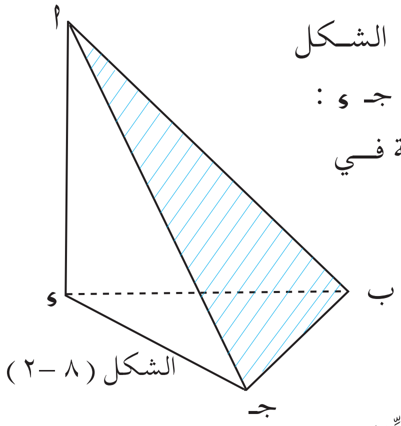
الفضاء : هو الفراغ الذي نعيش فيه ويحيط بنا ويحتوي على أجسام مادية كلّ منها يشغل حيزاً من هذا الفراغ وهذا الحيز المحدد لكل جسم نسميه حجم الجسم ، والحد الذي يفصل الجسم عن الفراغ يُسمَّى سطح الجسم .

ولمساعدتك في تصوُّر المستوى تأمل المكعب في شكل (٨ – ١) ، فإنك تجد أن له سته أوجه مستوية هي حدوده تُسمَّى هذه الأوجه مستويات ، وهي المربعات أ ب جـ ء، $\text{أ}_1\text{ ب}_1\text{ جـ}_1\text{ ء}_1$ ، ....، أ $\text{أ}_1\text{ ب}_1$ ب،وتتقاطع هذه الأوجه في مستقيمات تسمَّى أحرف المكعب ،وعددها ١٢، وهي $\overline{\text{أ أ}_1}$ ، $\overline{\text{ب ب}_1}$ ، $\overline{\text{جـ جـ}_1}$ ، $\overline{\text{ء ء}_1}$ ، .... ،$\overline{\text{ب جـ}}$ ، ويلاحظ أن جميع هذه الأحرف لاتقع في مستوىً واحد (وجه واحد) .

وتتقاطع هذه الاحرف في نقاط تسمَّى رؤوس المكعب، وعددها ثمانية هي أ ، أ_1 ، ب ، ب_1 ، جـ ، جـ_1 ، ء ، ء_1 .



الشكل (٨ – ١)



الشكل (٨ – ٢)

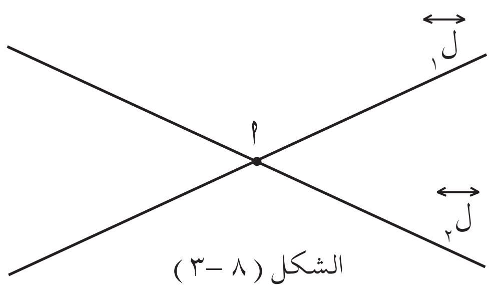
أقل عدد من الأوجه تشكِّل مجسماً ذي أربعة أوجه (مستويات) هـذا الشـكل يســمَّى هرماً ثلاثياً وفــي الشـــكل (٨ – ٢) نرى الهــرم أ ب جـ ء : والأوجـه أ ب جـ ، أ ب ء ، أ جـ ء ، ب جـ ء وهــي متقاطعـــة فــي القطع المستقيمة :

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أء}$ ، $\overline{بجـ}$ ، $\overline{بء}$ ، $\overline{ءجـ}$.

وهناك أجسام سطوحها ليست مستوية ، وإنما منحنية مثل : الكرة – الإسطوانة – المخروط .

والآن ماذا نعني بالسطح المستوي (للتبسيط نقول المستوى) وكيف نعيِّنه .

ليكن $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$ مستقيمين متقاطعين في النقطة أ [(شكل (٨ – ٣)] .



الشكل (٨ – ٣)

فمن الواضح أننا نستطيع الحصول على عـدد لانهـائي من المستقيمات الجديدة عن طريق اختيار نقطتين إحداهما تنتمي إلى المستقيم $\overleftrightarrow{ل_١}$ والأخرى تنتمي إلى المستقيم $\overleftrightarrow{ل_٢}$ ، وبذلك فإن جميع هذه المستقيمات ستكوِّن سطحاً مستوياً .

تعريف (٨ – ١)

المستوى هو عبارة عن سطح ممتد ليس له سمك ؛ بحيث لو أخذت عليه أيَّ نقطتين ، فإن المستقيم المار بهما يقع بأكمله في ذلك السطح .

سنرمز للمستوى بالرمز ى (ويقرأ ياء) ،أو بالرمز ك ، أو س ، وللمستقيم بالرمز $\overleftrightarrow{ل}$ ، أو $\overleftrightarrow{ق}$.

ولتمثيل المستوى نرسم جزءًا منه في شكل مستوٍ مغلق ، مثلاً :متوازي أضلاع أو مثلث ، أو شبه منحرف ، أو شكل منحنٍ مغلق [انظر شكل (٨ – ٤)] .


الشكل (٨ – ٤)

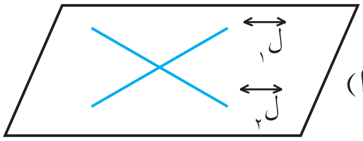
وتخيل أن كلاً منها قد امتد في جميع الاتجاهات دون توقف ، تأمَّل سطح السبورة – أرضية حجرة الصف – زجاج النافذة – هذه الأمثلة تساعدك في تصور المستوى .

مع ملاحظة أن كل مستوىً يقسم نقاط الفضاء إلى ثلاث مجموعات : نصفي الفضاء ، بالإضافة إلى نقاط المستوى نفسه .

حالات تعيين مستوى :

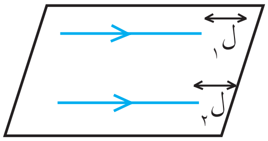
كما نعلم أن المستقيم يتعين بنقطتين على الأقل واقعتين عليه ،أما المستوى فيتعين بإحدى الحالات التالية :

١ ■ مستقيمان متقاطعان [شكل (٨ – ٥ أ)] .



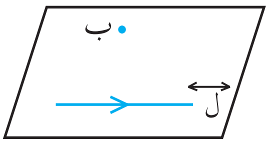
الشكل (٨ – ٥أ)

٢ ■ مستقيمان متوازيان [شكل (٨ – ٥ ب)] .



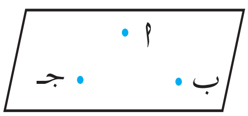
الشكل (٨ – ٥ب)

٣ ■ مستقيم ونقطة خارجة عنه [شكل (٨ – ٥جـ)].



الشكل (٨ – ٥جـ)

٤ ■ ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة [شكل (٨ – ٥ ء)] .

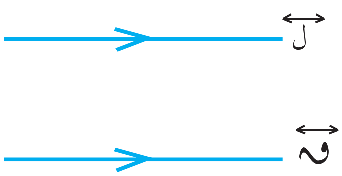


الشكل (٨ – ٥ء)

الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء :

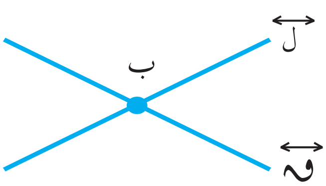
ليكن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ مستقيمين ، فنميز الحالات الآتية :

١ ■ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ متوازيان [شكل (٨ – ٦)] ،
ونكتب $\overleftrightarrow{\text{ل}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{ق}}$.
وشرطا التوازي أن يقعا في مستوىً واحد ، ولايتقاطعان أبداً .
ونكتب $\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap \overleftrightarrow{\text{ق}} = \varnothing$



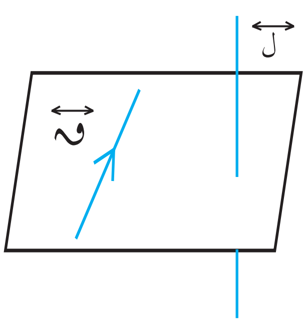
الشكل (٨ – ٦)

٢ ■ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ متقاطعان [شكل (٨ – ٧)] :
ونكتب $\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap \overleftrightarrow{\text{ق}} = \{\text{ب}\}$.



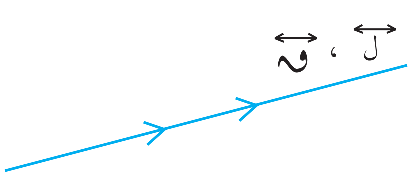
الشكل (٨ – ٧)

٣ ■ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ متخالفان ، وهذا يعني أنهما غير متقاطعين ، وغير متوازيين ، وفي هذه الحالة لايمكن أن يحويهما مستوى واحد [شكل (٨ – ٨)]
ونكتب $\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap \overleftrightarrow{\text{ق}} = \varnothing$.



الشكل (٨ – ٨)

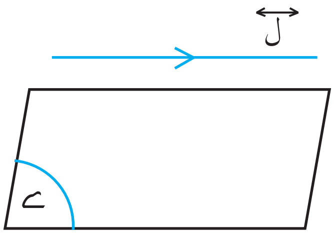
٤ ■ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ متطابقان [شكل (٨ – ٩)]
ونكتب $\overleftrightarrow{\text{ل}} \cong \overleftrightarrow{\text{ق}}$.
ونعتبر هذه الحالة حالة خاصة من حالة التوازي أي يمكن أن نقول هنا أن $\overleftrightarrow{\text{ل}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{ق}}$.



الشكل (٨ – ٩)

الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى في الفضاء :

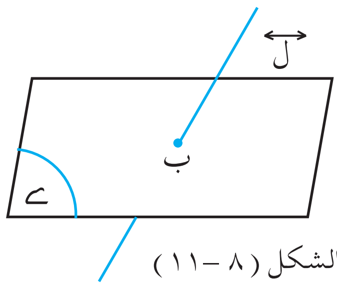
ليكن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ مستقيما ، ح مستوى ، وهنا نميز الحالات الآتية :



الشكل (٨ – ١٠)

١■ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، ح متوازيان أي لايشتركان بأية نقطة [شكل (٨ – ١٠)] .

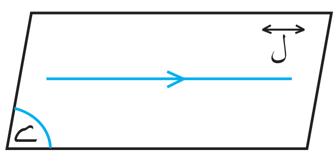
ونكتب $\overleftrightarrow{\text{ل}} \,//\, \text{ح} \Leftrightarrow \overleftrightarrow{\text{ل}} \cap \text{ح} = \varnothing$



الشكل (٨ – ١١)

٢■ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، ح متقاطعان في نقطة لتكن ب [شكل (٨ – ١١)]

ونكتب : $\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap \text{ح} = \{\text{ب}\}$.



الشكل (٨ – ١٢)

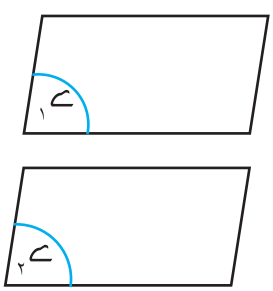
٣■ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ واقع في ح ، أي يشتركان في جميع نقاط $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ [شكل (٨ – ١٢)] ،

ونكتب : $\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap \text{ح} = \overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، أو نكتب : $\overleftrightarrow{\text{ل}} \subset \text{ح}$

وفي هذه الحالة يمكن القول أيضاً : $\overleftrightarrow{\text{ل}} \,//\, \text{ح}$.

الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء :

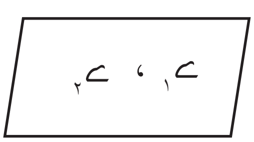
ليكن ح_1 ، ح_2 مستويين ، وهنا نميز الحالات التالية :



الشكل (٨ – ١٣)

١■ ح_1 ، ح_2 متوازيان . أي أنهما لايشتركان بأية نقطة [شكل (٨ – ١٣)] .

ونكتب $\text{ح}_1 \,//\, \text{ح}_2 \Leftrightarrow \text{ح}_1 \cap \text{ح}_2 = \varnothing$.



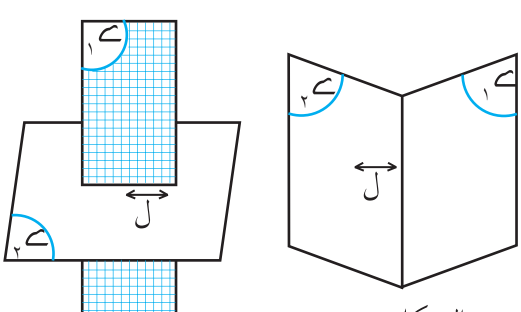
الشكل (٨ – ١٤)

٢■ ح_1 ، ح_2 متطابقان . أي أنهما يشتركان في جميع نقاطهما ، ونكتب $\text{ح}_1 \cong \text{ح}_2$ [شكل(٨ – ١٤)].

ويصحّ القول أيضاً أن $\text{ح}_1 \,//\, \text{ح}_2$ لأن الانطباق حالة خاصة من التوازي .

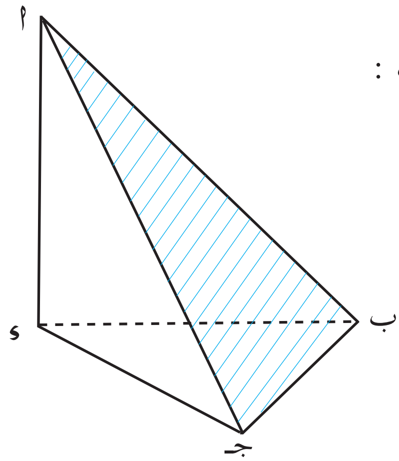
٣■ ح_1 ، ح_2 متقاطعان : أي يشتركان في خط مستقيم واحد $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يُسمَّى بالفصل المشترك (أو بمستقيم تقاطعهما) . [شكل ٨ – ١٥] ونكتب رمزياً

$\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2 = \overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، ويكون : $\overleftrightarrow{\text{ل}} \subset \text{ح}_1$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}} \subset \text{ح}_2$.



الشكل (٨ – ١٥)

مثال (٨ – ١)



الشكل (٨ – ١٦)

أ نقطة خارج مستوى المثلث ب جـ ء [شكل (٨ – ١٦)] والمطلوب :

١ ■ كم عدد الأوجه المستوية الناتجة ؟ سمِّ كلاً منها .

٢ ■ حدِّد الفصل المشترك بين أزواج المستويات التالية :

{(أ ب جـ) ، (ء جـ ب)} ، {(ب أ ء) ، (أ جـ ء)} .

الحـــل :

١ ■ عدد الأوجه المستوية ٤ وهي : (أ ب جـ) ، (أ ب ء)،

(ب جـ ء) ، (أ جـ ء) .

٢ ■ * المستوى (أ ب جـ) $\cap$ المستوى (ء جـ ب) = $\overline{\text{ب جـ}}$.

* المستوى (ب أ ء) $\cap$ المستوى (أ جـ ء) = $\overline{\text{أ ء}}$.

تدريب (٨ – ١)

في الشكل (٨ – ١) المطلوب :

أولاً : كم عدد المستويات (الأوجه) .

ثانياً : أوجد الفصل المشترك بين أزواج المستويات التالية :

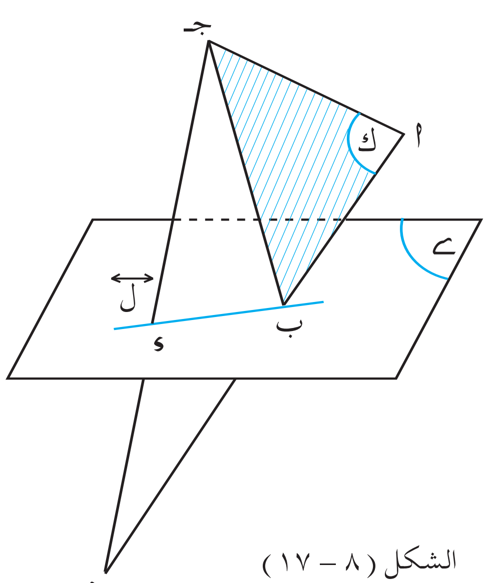
١ ■ (أ ب جـ ء) ، (ب ب$_1$ جـ$_1$ جـ) .

٢ ■ (أ ب جـ ء) ، (أ$_1$ ب$_1$ جـ$_1$ ء$_1$) .

ثالثاً : سمِّ مستقيمين متخالفين .

مبرهنة (٨ – ١)

إذا اشترك مستويان في نقطة ، فإنّهما يشتركان في مستقيم يمر بتلك النقطة .



الشكل (٨ – ١٧)

المعطيات: ك ، ح مستويان ، ك $\cap$ ح = {ب} .

[شكل (٨ – ١٧)]

المطلوب : إثبات أن ك ، ح يشتركان في مستقيم يمر بالنقطة ب .

البرهان : نمد $\overline{\text{أ ب}}$ على استقامته إلى نقطة هـ ،

نصل $\overline{\text{جـ هـ}}$ فيقطع المستوى ح في نقطة ء .

لأن جـ ، هـ في جهتين مختلفتين من ح

∵ جـ ∈ ك ∧ هـ ∈ ك

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ⊂ ك

∵ ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ،

∴ ء ∈ ك ∧ ء ∈ ح .

$\because$ ب $\in$ ك $\wedge$ ب $\in$ ے .

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ $\subset$ ك $\wedge$ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ $\subset$ ے .

$\therefore$ ك $\cap$ ے $=$ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$.

تمارين ومسائل (٨ - ١)

[١] إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}_3}$ ، فما علاقة $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ بـ $\overleftrightarrow{\text{ل}_3}$.

[٢] إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ $\subset$ ك ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ خارج المستوى ك ، فما علاقة $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ بـ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$.

[٣] أكمل الفراغ : أ) إذا كان ے $\cap$ ك $= \varnothing$ ، فإن المستويين ....

ب) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ $\cap$ $\overleftrightarrow{\text{ق}}$ $= \varnothing$ ، فإن .... أو ....

جـ) إذا اشترك $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ مع المستوى ے بأكثر من نقطة ، فإن ....

[٤] أيّ العبارات التالية صائبة وأيّها خطأ ، واذكر السبب :

أ) أيّ شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان فجميع أضلاعه تقع في مستوىً واحد .

ب) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ $\cap$ $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$ $= \varnothing$ ، فإن $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$ متخالفان .

جـ) كل مستقيمين متخالفين لايمكن أن يجمعهما مستوىً واحد .

د) إذا كان لدينا ثلاثة مستقيمات متقاطعة ، وأمكن قطعها بمستقيم رابع في ثلاث نقاط فجميع المستقيمات الأربعة تقع في مستوىً واحد .

هـ) إذا تقاطع مستويان ، فإنهما يتقاطعان في مستقيم وحيد .

و) إذا اشترك مستويان بثلاث نقاط فهما منطبقان .

ز) إذا اشترك مستويان في نقطة ؛ فإنها واقعة على الفصل المشترك .

ح) كل مستقيمين متخالفين يمكن أن يمر بهما مستويان متوازيان .

[٥] $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ثلاثة مستقيمات لايجمعها مستوىً واحد ، والمطلوب :

أ) اذكر أسماء ثلاثة مستويات . ب) اذكر الفصل المشترك لكل زوج .

جـ) سمِّ كلَّ مستوى ، وكل قاطع له .

[٦] أ نقطة غير واقعة في مستوى المثلث ب جـ ء ، ولتكن س $\in$ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ص $\in$ $\overline{\text{ب ء}}$ ، ع $\in$ $\overline{\text{جـ ء}}$

المطلوب : أوجد الفصل المشترك بين كل زوج من المستويات التالية :

■١ (ب جـ ء) ، (أ ب ء) ، ■٢ (أ جـ ء) ، (أ ع س) ، ■٣ (ب جـ ء) ، (أ س ع) ،

■٤ (أ س ص) ، (أ ء ب) ، ■٥ (أ س ص) ، (أ جـ س) ، ■٦ (أ س ع) ، (أ ص ع) .

[٧] ب جـ ء هـ شبه منحرف فيه $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ ، ا نقطة خارجة عن مستواه ، أوجد الفاصل المشترك بين أزواج المستويات التالية :

أ) (ا ب جـ) ، (ا ب هـ) ، ب) (ب جـ ء هـ) ، (ء ا هـ) ،

جـ) (ا ب جـ) ، (ا ء هـ) ، د) (ا ب ء) ، (ا جـ هـ) .

٨ – ٢ مبرهنـات المستقيمـات المتوازية

تعرف أنة يتوازى مستقيمان إذا وقعا في مستوى واحد ، ولم يكن لهما نقطة مشتركة ، أو إذا كانا منطبقين .
وهناك مبرهنات تتعلّق بالمستقيمات المتوازية .
تذكَّر أنه : إذا كان $\overleftrightarrow{ل_١}$ // $\overleftrightarrow{ل_٢}$ ، $\overleftrightarrow{ق}$ قاطعاً لأحدهما ، فهو قاطع للآخر وهذا لايكون إلا إذا كانت جميع المستقيمات في مستوىً واحد .

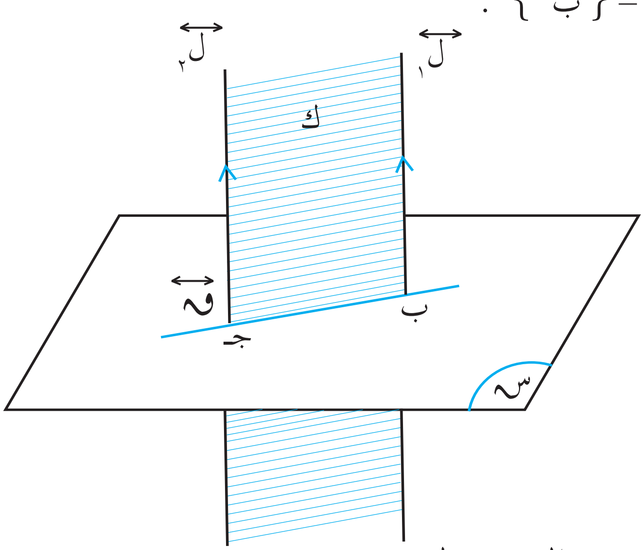
مبرهنة (٨ – ٢)

إذا قطع مستوىً أحد مستقيمين متوازيين فهو قاطع للآخر .

المعطيات : س مستوى ، $\overleftrightarrow{ل_١}$ // $\overleftrightarrow{ل_٢}$ ، $\overleftrightarrow{ل_١}$ ∩ س = { ب } .
[شكل (٨ – ١٨)]

المطلوب : إثبات أن المستوى س يقطع المستقيم $\overleftrightarrow{ل_٢}$ في نقطة لتكن جـ
[أي اثبات أن : $\overleftrightarrow{ل_٢}$ ∩ س = { جـ }]

البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{ل_١}$ // $\overleftrightarrow{ل_٢}$
∴ فهما يعينان مستوىً ليكن ك
يشترك مع المستوى س في النقطة ب
∴ سيشتركان بمستقيم يمر بالنقطة ب
حسب المبرهنة (٨ – ١)
∵ $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$ ، $\overleftrightarrow{ق}$ يجمعهم مستوىً واحد هو المستوى ك
∵ $\overleftrightarrow{ل_١}$ // $\overleftrightarrow{ل_٢}$ ، ∵ $\overleftrightarrow{ق}$ يقطع $\overleftrightarrow{ل_١}$ في ب
∴ $\overleftrightarrow{ق}$ يقطع $\overleftrightarrow{ل_٢}$ في نقطة لتكن جـ
أي جـ ∈ $\overleftrightarrow{ل_٢}$ ، ∵ $\overleftrightarrow{ق}$ ⊂ س



الشكل (٨ – ١٨)

$\therefore$ جـ $\in$ س $\wedge$ جـ $\in \overleftrightarrow{ل_2}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ل_2} \cap$ س $=$ { جـ } .   وهو المطلوب اثباته .

مبرهنة (٨ - ٣)

إذا وازى مستقيم خارج مستوىً مستقيماً في ذلك المستوى ، فإن المستقيم يوازي المستوى .

المعطيات : $\overleftrightarrow{ل_1} \subset$ ح ، $\overleftrightarrow{ل}$ // $\overleftrightarrow{ل_1}$ ، $\overleftrightarrow{ل} \not\subset$ ح .

[شكل (٨ - ١٩)]

المطلوب : إثبات أن : $\overleftrightarrow{ل}$ // ح

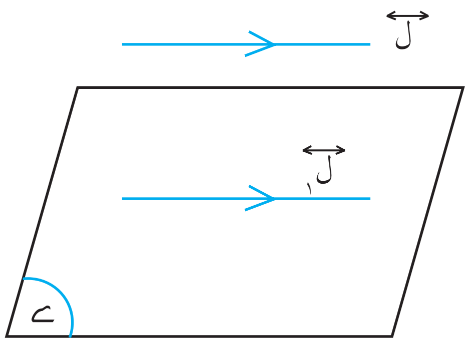
البرهان : نفرض $\overleftrightarrow{ل}$ قاطعاً المستوى ح

$\therefore$ إما $\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{ل_1}$ متخالفان ، أو متقاطعان

وفي كل حالة مخالف للفرض لأن $\overleftrightarrow{ل}$ // $\overleftrightarrow{ل_1}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ل}$ // ح

وهو المطلوب اثباته .



الشكل (٨ - ١٩)

مثال (٨ - ٢)

ب جـ ء ، ا جـ ء مثلثان لايجمعهما مستوىً واحد س ، ص منتصفا $\overline{اجـ}$ ، $\overline{اء}$ على التوالي ،

المطلوب : إثبات أن $\overline{س ص}$ يوازى المستوى (ب جـ ء) .

الحـــل :

المعطيات : المثلثان ب جـ ء ، ا جـ ء ، لايجمعهما مستوىً واحد .

س ، ص منتصفي $\overline{اجـ}$ ، $\overline{اء}$ على التوالي .

[شكل (٨ - ٢٠)]

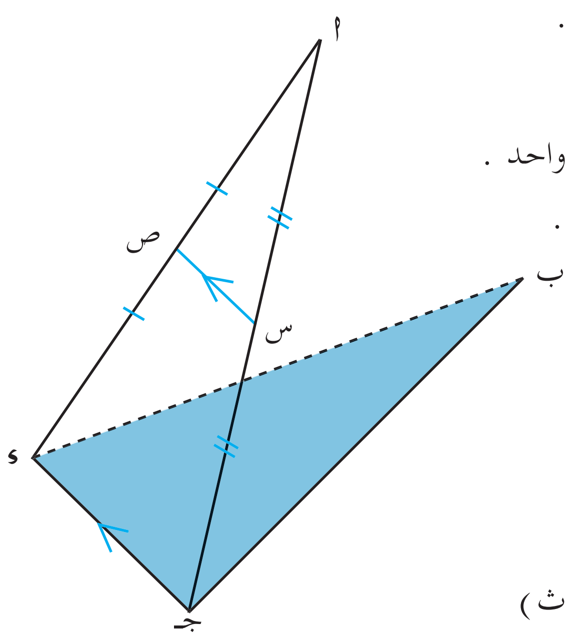
المطلوب : إثبات أن : $\overline{س ص}$ // المستوى (ب جـ ء)

البرهان : $\because$ س ، ص منتصفا $\overline{اجـ}$ ، $\overline{اء}$

، $\therefore$ $\overline{س ص}$ // $\overline{جـ ء}$.

، $\because$ $\overline{جـ ء} \subset$ المستوى (ب جـ ء)

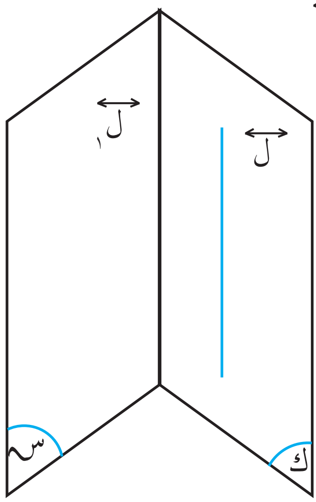
$\therefore$ $\overline{س ص}$ // المستوى (ب جـ ء)   (هـ.ط.ث)



الشكل (٨ - ٢٠)

مبرهنة (٨ – ٤)

إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ مستقيماً يوازي المستوى سہ، وكان ك مستويً ماراً بالمستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ ، وقاطعاً سہ وفق المستقيم $\overleftrightarrow{ل}_{١}$ ؛ فإن $\overleftrightarrow{ل}$ // $\overleftrightarrow{ل}_{١}$.



الشكل (٨ – ٢١)

المعطيات : سہ ، ك مستويان ، $\overleftrightarrow{ل}$ // سہ ، $\overleftrightarrow{ل}$ ⊂ ك ، ك ∩ سہ = $\overleftrightarrow{ل}_{١}$
[شكل (٨ – ٢١)]

المطلوب : إثبات أن : $\overleftrightarrow{ل}$ // $\overleftrightarrow{ل}_{١}$

البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{ل}$ // سہ

∴ $\overleftrightarrow{ل}$ ∩ سہ = ∅

، ∵ $\overleftrightarrow{ل}_{١}$ ⊂ سہ

، ∴ $\overleftrightarrow{ل}$ ∩ $\overleftrightarrow{ل}_{١}$ = ∅ ($\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{ل}_{١}$ غير متقاطعين) ـــــ (١)

، ∵ $\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{ل}_{١}$ يجمعهما مستويً واحد هو ك .

∴ $\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{ل}_{١}$ غير متخالفين ـــــ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $\overleftrightarrow{ل}$ // $\overleftrightarrow{ل}_{١}$ هـ . ط . ث

مثال (٨ – ٣)

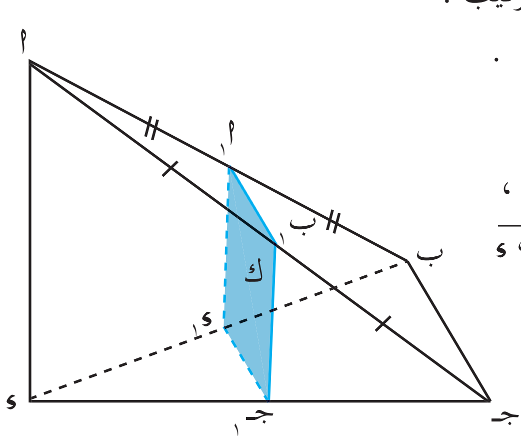
لتكن أ ، ب ، جـ ، ء أربع نقاط لايجمعها مستويً واحد ؛ أ١ ، ب١ منتصفات الأضلاع $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ ؛ على الترتيب .

رسم المستوى ك يحوى $\overline{أ_١ب_١}$ قاطعاً $\overline{بء}$ ، $\overline{ءجـ}$ في ء١ ، جـ١ على الترتيب .

أولاً : أثبت أن : $\overline{أ_١ب_١}$ // $\overline{ء_١جـ_١}$ // $\overline{بجـ}$

ثانياً : إذا كان ء١ ، جـ١ منتصفي $\overline{بء}$ ، $\overline{ءجـ}$ على الترتيب ؛

فأثبت أن الشكل أ١ ب١ جـ١ ء١ متوازي أضلاع .



الشكل (٨ – ٢٢)

الحـــل :

المعطيات : أ ، ب ، جـ ، ء أربع نقاط لايجمعها مستويً واحد ،

أ١ ، ب١ ، جـ١ ، ء١ منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ ، $\overline{ءجـ}$ ، $\overline{بء}$

على التريب [شكل (٨ – ٢٢)]

المطلوب : إثبات إن : ١ ■ $\overline{أ_١ب_١}$ // $\overline{ء_١جـ_١}$ // $\overline{بجـ}$

٢ ■ أ١ ب١ جـ١ ء١ متوازي اضلاع

البرهان : ∵ أ١ ، ب١ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$

$\therefore \overline{أ_١ ب_١} \parallel \overline{ب جـ}$

$\because \overline{ب جـ} \subset$ المستوى (ب جـ ء)

$\therefore \overline{أ_١ ب_١} \parallel$ المستوى (ب جـ ء)

$\because \overline{أ_١ ب_١} \subset$ المستوى ك

$\because$ ك $\cap$ (ب جـ ء) $= \overline{ء_١ جـ_١}$

$\therefore \overline{أ_١ ب_١} \parallel \overline{ء_١ جـ_١}$

$\therefore \overline{أ_١ ب_١} \parallel \overline{ء_١ جـ_١} \parallel \overline{ب جـ}$ وهو المطلوب أولاً

$\because$ أ$_١$ ، ب$_١$ منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$

$\therefore \overline{أ_١ ب_١} \parallel \overline{ب جـ}$ ، $|أ_١ ب_١| = \frac{١}{٢} |ب جـ|$ ——(١)

بالمثل نجد أن $\overline{ء_١ جـ_١} \parallel \overline{ب جـ}$ ، $|ء_١ جـ_١| = \frac{١}{٢} |ب جـ|$ ——(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن $\overline{أ_١ ب_١} \parallel \overline{ء_١ جـ_١}$ ، $|أ_١ ب_١| = |ء_١ جـ_١|$

$\therefore$ أ$_١$ ب$_١$ جـ$_١$ ء$_١$ متوازي أضلاع وهو المطلوب ثانياً .

نتيجة (٨ - ١)

إذا كان $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$ مستقيمين متوازيين ، $\overleftrightarrow{ل_١}$ يقع في المستوى ك$_١$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$ في ك$_٢$ ؛ فإن الفصل المشترك $\overleftrightarrow{ل}$ يوازي كلاً من $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$.

المعطيات: $\overleftrightarrow{ل_١} \parallel \overleftrightarrow{ل_٢}$ ، $\overleftrightarrow{ل_١} \subset$ ك$_١$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢} \subset$ ك$_٢$ ،

ك$_١ \cap$ ك$_٢ = \overleftrightarrow{ل}$ [شكل (٨ – ٢٣)]

المطلوب : إثبات أن : $\overleftrightarrow{ل_١} \parallel \overleftrightarrow{ل} \parallel \overleftrightarrow{ل_٢}$

البرهان : $\because \overleftrightarrow{ل_١} \parallel \overleftrightarrow{ل_٢}$ ، $\overleftrightarrow{ل_١} \subset$ ك$_١$

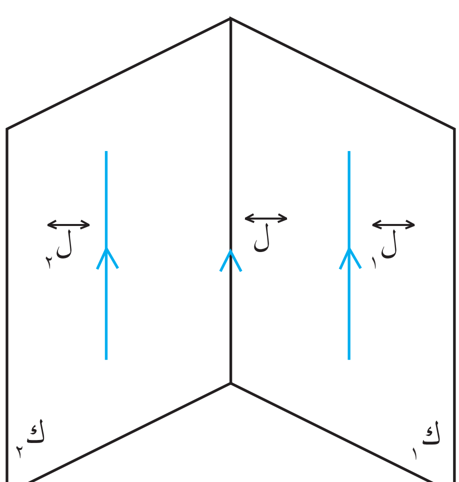
$\therefore \overleftrightarrow{ل_٢} \parallel$ ك$_١$ ، وبالمثل $\overleftrightarrow{ل_١} \parallel$ ك$_٢$

$\because$ ك$_١ \cap$ ك$_٢ = \overleftrightarrow{ل}$

$\therefore \overleftrightarrow{ل_١} \parallel \overleftrightarrow{ل}$ مبرهنة (٨ – ٤)

$\because \overleftrightarrow{ل_١} \parallel \overleftrightarrow{ل_٢}$ معطى

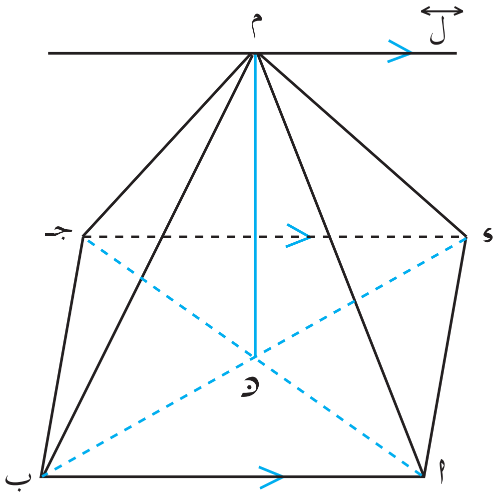
$\therefore \overleftrightarrow{ل_١} \parallel \overleftrightarrow{ل} \parallel \overleftrightarrow{ل_٢}$.



الشكل (٨ -٢٣)

مثال (٨ – ٤)

أ ب جـ ء مربع ، م نقطة خارجة عن مستواه ؛ أوجد الفصل المشترك لكل من المستويات التالية :



الشكل (٨ – ٢٤)

١ (م أ ب) ، (أ ب جـ ء)

٢ (م أ ب) ، (م ء جـ) .

٣ (م أ جـ) ، (م ب ء)

الحـــل :

المعطيات : أ ب جـ ء مربع ،

م $\notin$ (أ ب جـ ء) [شكل (٨ – ٢٤)]

البرهان :

١ (م أ ب) $\cap$ (أ ب جـ ء) = $\overline{\text{أ ب}}$

٢ المستويان (م أ ب) ، (م ء جـ) يشتركان بالنقطة

م ، ويمران بمستقيمين متوازيين هما $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ء جـ}}$.

∴ الفصل المشترك للمستويين هو مستقيم ل يمر بالنقطة م ، ويوازي كلا من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ء جـ}}$.

أي أن : $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // $\overline{\text{ء جـ}}$

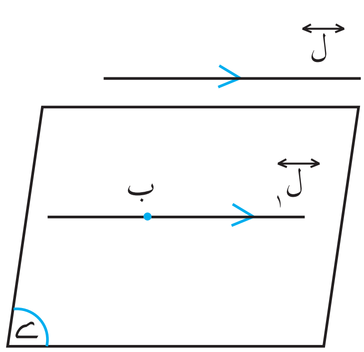
٣ ∵ المستويين (م أ جـ) ، (م ب ء) يشتركان بالنقطة م ، ولايمران بمستقيمين متوازيين .

∴ نبحث عن نقطة أخرى يشترك بها المستويان وهذه النقطة هي نقطة تقاطع قطري المربع ، ولتكن ن .

∴ $\overline{\text{م ن}}$ هو الفصل المشترك للمستويين (م أ جـ) ، (م ب ء) .

مبرهنة (٨ – ٥)

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // ح ، ب $\in$ ح ، رسم $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ يمر بالنقطة ب ، حيث $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ؛ فإن $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1 \subset$ ح .



الشكل (٨ – ٢٥)

المعطيات : $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // ح ، ب $\in$ ح ،

$\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ [شكل (٨ – ٢٥)] .

المطلوب : إثبات أن : $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1 \subset$ ح .

البرهان : نفرض $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1 \not\subset$ ح ،

∵ ب $\in$ ح ، ب $\in \overleftrightarrow{\text{ل}}_1$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1 \cap$ ح = {ب} ،

∵ $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ (معطى)

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ سيقطع ے في نقط لتكن جـ

وهذا مخالف لأن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // ے

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ ⊂ ے . وهو المطلوب .

نتيجة (٨ – ٢)

المستقيم الموازي لمستويين متقاطعين يوازي فاصلهما المشترك .

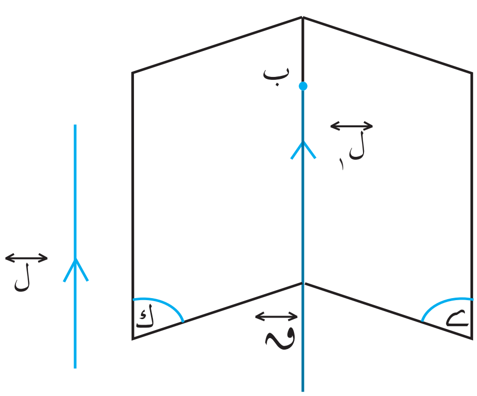
المعطيات : $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // ے ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // ك ، ك ∩ ے = $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ [شكل (٨ – ٢٦)] .

المطلوب : إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$.

البرهان : نفرض $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ ∦ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$

من نقطة ب ∈ $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$

نرسم مستقيماً $\overleftrightarrow{\text{وه}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}}$



الشكل (٨ – ٢٦)

∵ ب ∈ ے ، ب ∈ ك

∴ $\overleftrightarrow{\text{وه}}$ ⊂ ے ، $\overleftrightarrow{\text{وه}}$ ⊂ ك مبرهنة (٨ – ٥)

∴ ے ∩ ك = $\overleftrightarrow{\text{وه}}$ ، ($\overleftrightarrow{\text{وه}}$ الفاصل المشترك)

∴ $\overleftrightarrow{\text{وه}}$ ينطبق على $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$

∵ $\overleftrightarrow{\text{وه}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ هـ . ط . ث .

تمارين ومسائل (٨ – ٢)

[١] أكمل ما يأتي بما يجعله صائباً :

أ) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ق}} \wedge \overleftrightarrow{\text{ق}} \subset \text{ك}$ فإن ......

ب) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}} \parallel \text{س}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}} \subset \text{ك}$ ، $\text{ك} \cap \text{س} = \overleftrightarrow{\text{ق}}$ فإن ......

جـ) $\overleftrightarrow{\text{ل}_1} \subset \text{ك}_1 \wedge \overleftrightarrow{\text{ل}_2} \subset \text{ك}_2$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}_1} \parallel \overleftrightarrow{\text{ل}_2}$ ، $\text{ك}_1 \cap \text{ك}_2 = \overleftrightarrow{\text{ق}}$ فإن ......

د) المستقيم الموازي أحد مستقيمين متوازيين ....

هـ) المستقيم الموازي لمستويين متقاطعين ....

و) نقول إن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يوازي المستوى ك ، إذا ..... .

[٢] ا ب جـ ، ا ب ء مثلثان في مستويين مختلفين ؛ هـ ، و منتصفا $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ا جـ}}$ ؛
أثبت أن : $\overline{\text{و هـ}} \parallel$ (ا ب ء) .

[٣] أثبت أن أضلاع شبه المنحرف تقع في مستوىً واحد .

[٤] $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}_3}$ ثلاثة مستقيمات متقاطعة في نقطة م قطعها مستقيم رابع في النقاط ا ، ب ، جـ .
أثبت أن جميع المستقيمات تقع في مستوىً واحد .

[٥] $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ مستقيمان متخالفان ، م نقطة لاتقع على أيٍّ منهما . بيِّن كيف ترسم من نقطة م مستوىً يوازي كلا من $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$.

[٦] $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ مستقيمان متخالفان ، بيِّن كيف ترسم مستويً ماراً بالمستقيم $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ ، ويوازي $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$.

[٧] ا ب جـ ء هرم ثلاثي ، رسم المستوى س يوازي كلاً $\overline{\text{ا جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ فقطع $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{ا ء}}$ في ا_1 ، ب_1 ، جـ_1 ، ء_1 على الترتيب . أثبت أن :

أولاً : $\text{ا}_1 \text{ب}_1 \text{جـ}_1 \text{ء}_1$ متوازي أضلاع . ثانياً : $\dfrac{|\text{ا}\,\text{ب}_1|}{|\text{ا جـ}|} + \dfrac{|\text{ا}\,\text{ء}_1|}{|\text{ب ء}|} = 1$

[٨] $\overleftrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}_2}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}_3}$ ثلاثة مستقيمات متوازية لايجمعها مستوىً واحد ، أثبت أن أيَّ مستقيم منها يوازي المستوى المحدّد بالمستقيمين الآخرين .

[٩] ا ب جـ ء رباعي سطوح ، النقطتان س ، ص منتصفا $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا جـ}}$ ، ع $\in \overline{\text{ا ء}}$ ، بحيث $\overline{\text{س ع}}$ لايوازي $\overline{\text{ب ء}}$ ، هـ نقطة تقاطع امتداد $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ ، و نقطة تقاطع امتداد $\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$. أثبت أن :
١ ▪ $\overline{\text{س ص}} \parallel$ (ب جـ ء) ، ٢ ▪ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$.

[١٠] ا ب جـ ء شكل رباعي ، م نقطة خارجة عنه ، النقاط ا_1 ، ب_1 ، جـ_1 ، ء_1 تقع على $\overline{\text{م ا}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{م ء}}$ على الترتيب . بحيث أن $\overline{\text{ا}_1\text{ب}_1}$ ، $\overline{\text{ب}_1\text{جـ}_1}$ غير موازيين لكل من $\overline{\text{ا ء}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$.
أوجد نقاط تقاطع المستوى ($\text{ا}_1 \text{ب}_1 \text{جـ}_1 \text{ء}_1$) مع المستقيمات $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{م ء}}$.

٨ – ٣ المستـــويات المتـــوازيـــــة

كما مرت بك مبرهنات المستقيمات المتوازية ، فإنك في هذا البند تتعرف على بعض المبرهنات المتعلقة بالمستويات المتوازية .

مبرهنة (٨–٦)

إذا قطـــع المستـــوى ك مستويين متوازيين $ى_1$ ، $ى_2$ في المستقيمات $\overleftrightarrow{ل}_1$ ، $\overleftrightarrow{ل}_2$ على التوالي ، فإن $\overleftrightarrow{ل}_1 \,//\, \overleftrightarrow{ل}_2$

المعطيات : $ى_1 \,//\, ى_2$ ، $ك \cap ى_1 = \overleftrightarrow{ل}_1$ ، $ك \cap ى_2 = \overleftrightarrow{ل}_2$

[شكل (٨ – ٢٧)]

المطلوب : إثبات أن : $\overleftrightarrow{ل}_1 \,//\, \overleftrightarrow{ل}_2$

البرهان : $\because$ $ى_1 \,//\, ى_2$ ، $\overleftrightarrow{ل}_1 \subset ى_1$ ، $\overleftrightarrow{ل}_2 \subset ى_2$

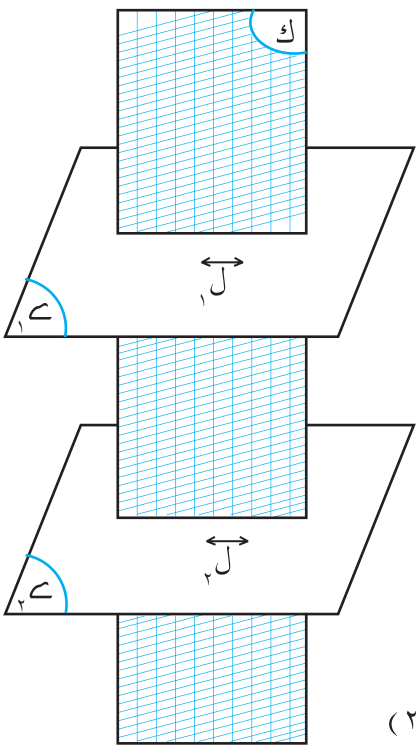
$\therefore$ $\overleftrightarrow{ل}_1 \cap \overleftrightarrow{ل}_2 = \varnothing$ —— (١)

، $\because$ $\overleftrightarrow{ل}_1$ ، $\overleftrightarrow{ل}_2$ يجمعهما مستوىً واحد هو ك

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ل}_1$ ، $\overleftrightarrow{ل}_2$ غير متخالفين —— (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ل}_1 \,//\, \overleftrightarrow{ل}_2$



الشكل (٨ – ٢٧)

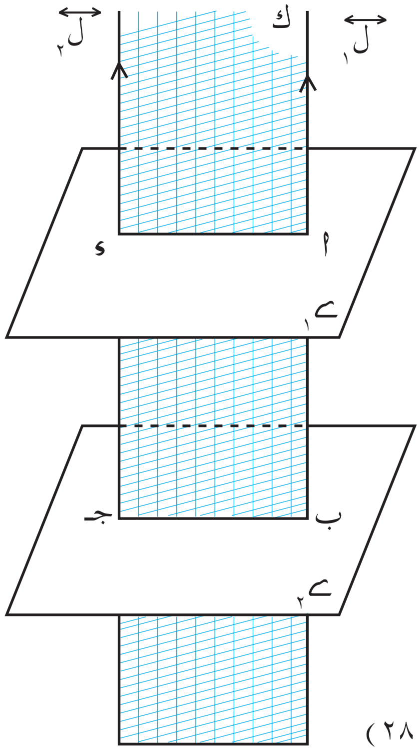
نتيجة (٨ – ٣)

المستويان المتوازيان يحددان على مستقيمين متوازيين قطعتين متساويتين .

المعطيات : $\overleftrightarrow{ل}_1 \,//\, \overleftrightarrow{ل}_2$ ، $ى_1 \,//\, ى_2$ ،

$ى_1$ يقطع $\overleftrightarrow{ل}_1$ ، $\overleftrightarrow{ل}_2$ في أ ، ء

، $ى_2$ يقطع $\overleftrightarrow{ل}_1$ ، $\overleftrightarrow{ل}_2$ في ب ، جـ [شكل (٨ – ٢٨)]



الشكل (٨ – ٢٨)

المطلوب : إثبات أن : | أ ب | = | ء جـ | .

البرهان : ∵ ل١ // ل٢ فهما يعينان مستوىً ليكن ك

يقطع ى١ ، ى٢ في أ ء ، ب جـ

∴ أ ء // ب جـ ——— (١) مبرهنة (٨ – ٦)

∵ ل١ // ل٢

∴ أ ب // ء جـ ——— (٢)

من (١) ، (٢)

∴ الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع

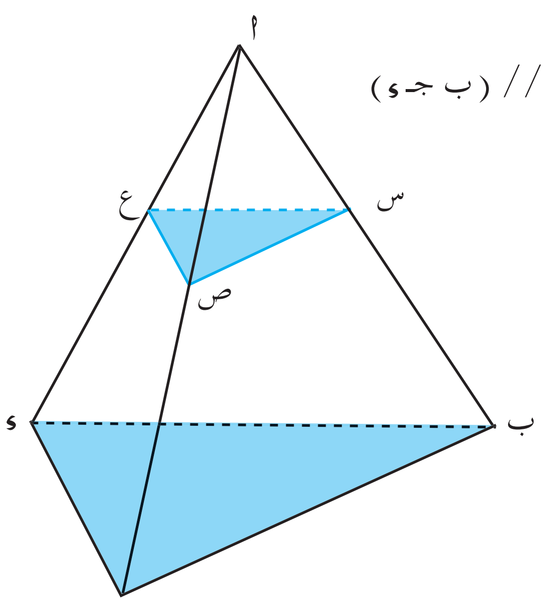
∴ | أ ب | = | ء جـ | . هـ . ط . ث .

مثال (٨ – ٥)

أ ب ، أ جـ ، أ ء ثلاث قطع مستقيمة لايجمعها مستوىً واحد ،رسم المستوى ك يوازي المستوى (ب جـ ء) ويلاقي أ ب ، أ جـ ، أ ء في س ، ص ، ع على الترتيب ، أثبت أن :

■١ س ص // ب جـ . ■٢ ص ع // جـ ء . ■٣ س ع // ب ء .

الحـــل :



الشكل (٨ – ٢٩)

المعطيات : أ ب ، أ جـ ، أ ء لايجمعها مستوىً واحد ، ك // (ب جـ ء)

المطلوب : اثبات أن :■١ س ص // ب جـ ،

■٢ ص ع // جـ ء ،

■٣ س ع // ب ء .

البرهان : ∵ (س ص ع) // (ب جـ ء)

(أ ب جـ) قاطع لهما في س ص ، ب جـ

∴ س ص // ب جـ مبرهنة (٨ – ٦)

بالمثل يمكن إثبات أن :

ص ع // جـ ء ، س ع // ب ء

[شكل (٨ – ٢٩)]

تدريب (٨ – ٢)

تأملّ [الشكل (٨ – ٣٠)] الذي يمثّل كرتون صابون وهو على شكل متوازي مستطيلات . اذكر :

أ) عدد المستويات (الاوجه المستويه) .

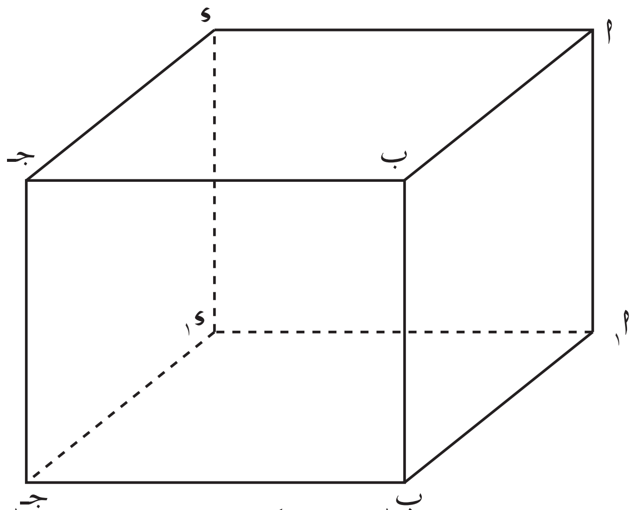
ب) مستوىً يوازي المستوى (أ ب جـ ء) .

جـ) ثلاثة مستقيمات توازي $\overline{\text{أ ب}}$.

د) مستقيمين متخالفين أحدهما $\overline{\text{ء جـ}}$.

هـ) عدد المستقيمات التي توازي المستقيم $\overline{\text{ب}_1\text{جـ}_1}$.

و) مستوىً يقطع المستوى (أ ب جـ ء) .



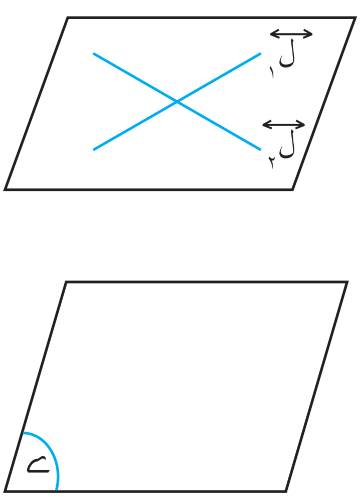
الشكل (٨ – ٣٠)

بعد أن عرفت متى يتوازي مستقيمان ، ومتى يوازي مستقيم مستوىً، ستتعرَّف الآن متى يتوازي مستويان .

تعريف (٨ – ٢)

يتوازى مستويان إذا لم يشتركا بأية نقطة ، أو إذا كانا منطبقين .

ليكن ے١ ، ے٢ مستويين متوازيين فإن جميع المستقيمات الواقعة في أحدهما توازى المستوى الآخر .
إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$ مستقيمين متقاطعين ويوازيان المستوى ے فسوف نجد أن المستوى المعيَّن بالمستقيمين $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$ يوازى المستوى ے .
[شكل (٨ – ٣١)] ، وبما أن المستوى تعيَّن بمستقيمين متقاطعين .
إذن نستنتج مما سبق الحقيقة التالية :



الشكل (٨ –٣١)

حقيقة (٨ – ١) :

يتوازى مستويان ے١ ، ے٢ إذا توازى مستقيمان متقاطعان من ے١ مع مستقيمين متقاطعين من ے٢

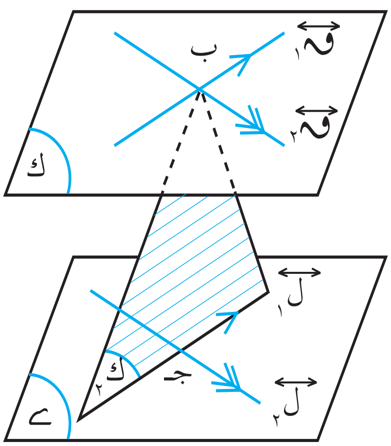
ومن دراستك السابقة تعرف الحقيقة التالية :

حقيقة (٨ – ٢) :

من نقطة خارج مستقيم لايمكن رسم سوى مستقيم واحد يوازيه .

مبرهنة (٨ – ٧)

من نقطة ب خارج مستوىً ى لايمكن رسم سوى مستوىً واحد يوازيه .



الشكل (٨ – ٣٢)

المعطيات : ب $\not\ni$ ى [شكل (٨ – ٣٢)] .

المطلوب : ١ ■ إنشاء مستوىً ك مار بالنقطة ب ويوازي ى .

٢ ■ إثبات أن : المستوى ك وحيد .

البرهان : نرسم من ب المستقيمين $\overleftrightarrow{ق}_1$ ، $\overleftrightarrow{ق}_2$

بحيث $\overleftrightarrow{ق}_1$ // $\overleftrightarrow{ل}_1$ ، $\overleftrightarrow{ق}_2$ // $\overleftrightarrow{ل}_2$.

المستقيمان $\overleftrightarrow{ق}_1$ ، $\overleftrightarrow{ق}_2$ متقاطعان في ب

∴ فهما يعينان مستوىً ليكن ك

∵ $\overleftrightarrow{ق}_1$ // $\overleftrightarrow{ل}_1$ ∧ $\overleftrightarrow{ق}_2$ // $\overleftrightarrow{ل}_2$

∴ ك // ى حقيقة (٨ – ١) وهو المطلوب أولاً .

نفــرض وجــود مستويين ك ، ك$_1$ يمران

بالنقطة ب ويوازيان ى

أي ك // ى ∧ ك$_1$ // ى

∴ $\overleftrightarrow{ل}_1$ ، والنقطة ب يعيّنان مستوىً ليكن ك$_2$ يشترك مع ك$_1$ في النقطة ب .

∴ يشترك ك ، ك$_2$ في المستقيم $\overleftrightarrow{ل}_3$ ، $\overleftrightarrow{ل}_3$ // $\overleftrightarrow{ل}_1$ ——— (١)

وبالمثل ك$_2$ يشترك مع ك في مستقيم $\overleftrightarrow{ل}_4$ // $\overleftrightarrow{ل}_1$ ——— (٢)

من (١) ، (٢) :

أمكن أن نرسم من النقطة ب مستقيمين هما $\overleftrightarrow{ل}_3$ ، $\overleftrightarrow{ل}_4$ يوازيان $\overleftrightarrow{ل}_1$ ، وهذا مخالف للحقيقةالسابقة .

∴ ك ≅ ك$_1$. أي أن المستوى ك وحيد وهو المطلوب ثانياً .

مثال (٨ – ٦)

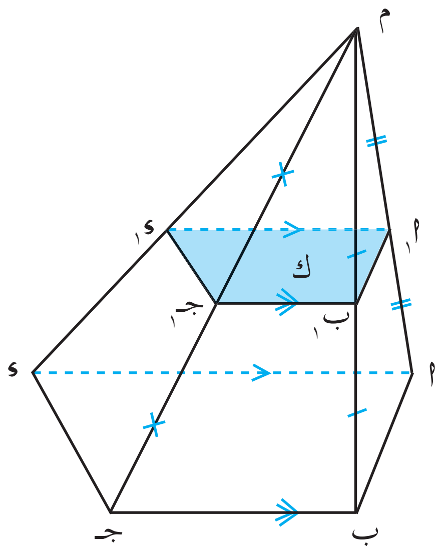
أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، م نقطة خارج مستواه .

فإذا كانت النقاط أ$_1$ ، ب$_1$ ، جـ$_1$ منتصفات $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$ على التوالي ، والمستوى ك محدّد بالمستقيمين المتقاطعين $\overline{أ_1 ب_1}$ ، $\overline{ب_1 جـ_1}$ ، ويقطع $\overline{م ء}$ في ء$_1$ ، أثبت أن :

١ ■ المستوى ك // المستوى (أ ب جـ ء) .

٢ ■ $\overline{ء_1 جـ_1}$ // $\overline{ء جـ}$

الحــــل :



الشكل (٨ – ٣٣)

نرسم الشكل (٨ – ٣٣)] من خلال المعطيات .

البرهان : ∵ أ، ، ب، منتصفي م أ ، م ب

∴ أ، ب، // أ ب

وبالمثل ب، جـ، // ب جـ

∴ المستوى ك // المستوى (أ ب جـ ء)

هـ . ط . ث (١)

∵ ك // المستوى (أ ب جـ ء)

والمستوى (م جـ ء) قاطع لهما في ء، جـ، ، ء جـ

∴ ء، جـ، // ء جـ هـ . ط . ث (٢) .

تدريب (٨ – ٣)

في الشكل (٨ – ٣٣)

أثبت أن : أ، ء، // أ ء // ب جـ

مبرهنة (٨ – ٨)

إذا قطع المستوىً ك أحد مستويين متوازيين ، فإنه يقطع الآخر .

المعطيات : ح_1 // ح_2 ، ك ∩ ح_1 = $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ [شكل (٨ – ٣٤)]

المطلوب : إثبات أن ك يقطع ح_2

البرهان : نأخذ نقطة ب على مستقيم التقاطع $\overleftrightarrow{\text{ل}}$.

نفرض أن ك // ح_2

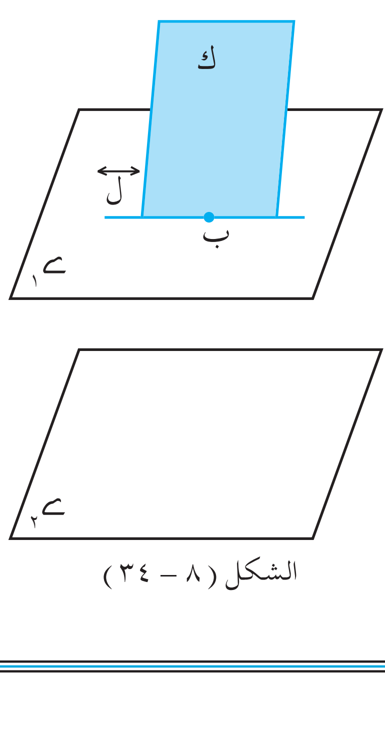
∵ ب ∈ ح_1 ∧ ب ∈ ك

∴ أمكن رسم مستويين ك ، ح_1

يمران بالنقطة ب ويوازيان ح_2

وهذا مستحيل

∴ لابد أن ك يقطع ح_2 هـ . ط . ث .



الشكل (٨ – ٣٤)

نتيجة (٨ – ٤)

المستوى الموازي أحد مستويين متوازيين يوازي الآخر .

المعطيات : ح_1 // ح_2 ، ك // ح_1 [شكل (٨–٣٥)]

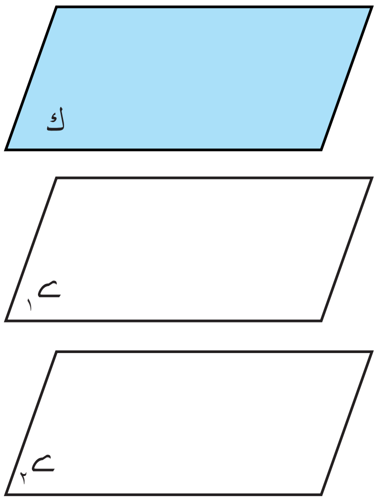
المطلوب : إثبات أن : ك // ح_2

البرهان : نفرض ك يقطع ح_2

∴ ك يقطع الموازي له مبرهنة (٨ – ٨)

∴ ك يقطع ح_1 وهذا مخالف لأن ك // ح_1

∴ ك // ح_2 هـ . ط . ث .



الشكل (٨ – ٣٥)

مبرهنة (٨ – ٩)

المستقيم الموازي أحد مستويين متوازيين يوازي الآخر .

المعطيات : ح_1 // ح_2 ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // ح_1 [شكل (٨ – ٣٦)]

المطلوب : إثبات أن : $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // ح_2

البرهان : نرسم المستوى ك ماراً بالمستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$

بحيث يقطع ح_1 ، ح_2 في $\overleftrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}}_2$

∵ ح_1 // ح_2 ، ك قاطع لهما في $\overleftrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}}_2$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ق}}_1$ // $\overleftrightarrow{\text{ق}}_2$ ——— (١)

∵ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // ح_1 ، $\overleftrightarrow{\text{ل}} \subset$ ك ، ك $\cap\ \text{ح}_1 = \overleftrightarrow{\text{ق}}_1$

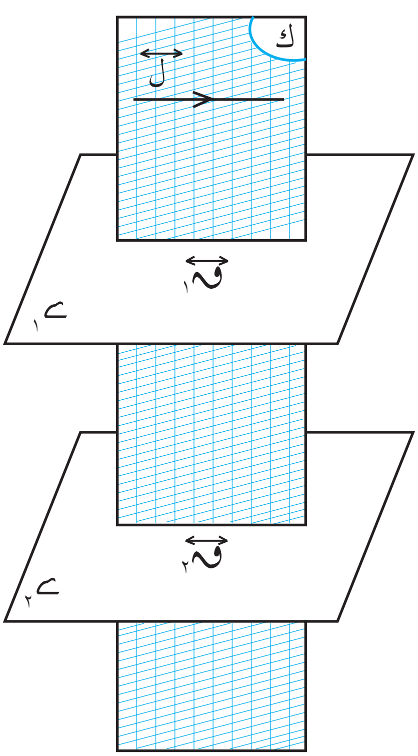
∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ق}}_1$ ——— (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ق}}_2$ لأن علاقة التوازي متعديه .

∵ $\overleftrightarrow{\text{ق}}_2 \subset \text{ح}_2$.

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // ح_2 هـ . ط . ث ..



الشكل (٨ – ٣٦)

نتيجة (٨ – ٥)

المستقيم القاطع أحد مستويين متوازيين قاطع للآخر .

المعطيات : $\text{ى}_1 \parallel \text{ى}_2$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}} \cap \text{ى}_1 = \{\text{ب}\}$ [شكل (٨ – ٣٧)]

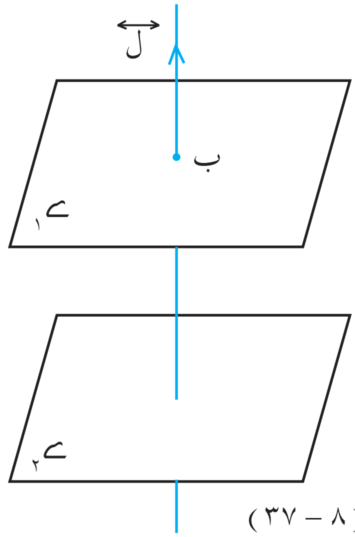
المطلوب : إثبات أن : المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يقطع ى_2

البرهان : نفرض $\overleftrightarrow{\text{ل}} \parallel \text{ى}_2$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{ل}} \parallel \text{ى}_1$ ، وهذا يخالف للفرض

لأن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يقطع ى_1

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يقطع ى_2 هـ . ط . ث .



الشكل (٨ – ٣٧)

مبرهنة (٨ – ١٠)

الزاويتان اللتان ضلعاهما متوازيان وفي اتجاه واحد متطابقتان .

المعطيات : $\overleftarrow{\text{م}_1\text{س}_1} \parallel \overleftarrow{\text{م س}}$ ، $\overleftarrow{\text{م ص}} \parallel \overleftarrow{\text{م}_1\text{ص}_1}$ [شكل (٨ – ٣٨)]

المطلوب : إثبات أن : $\text{هـ}_1 = \text{هـ}_2$

البرهان : نأخذ على $\overleftarrow{\text{م س}}$ ، $\overleftarrow{\text{م}_1\text{س}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{م ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{م}_1\text{ص}_1}$

النقاط أ ، أ_1 ، ب ، ب_1 على الترتيب ؛ بحيث

$|\text{م أ}| = |\text{م}_1\text{أ}_1|$ ، $|\text{م ب}| = |\text{م}_1\text{ب}_1|$.

من خواص جمع المتجهات نجد أن : $\overleftarrow{\text{م ب}} = \overleftarrow{\text{م أ}} + \overleftarrow{\text{أ ب}}$

$\Leftarrow$ $\overleftarrow{\text{أ ب}} = \overleftarrow{\text{م ب}} - \overleftarrow{\text{م أ}}$ ——(١)

وبالمثل $\overleftarrow{\text{م}_1\text{ب}_1} = \overleftarrow{\text{م}_1\text{أ}_1} + \overleftarrow{\text{أ}_1\text{ب}_1}$ $\Leftarrow$ $\overleftarrow{\text{أ}_1\text{ب}_1} = \overleftarrow{\text{م}_1\text{ب}_1} - \overleftarrow{\text{م}_1\text{أ}_1}$.

$\because$ $\overleftarrow{\text{م ب}} = \overleftarrow{\text{م}_1\text{ب}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{م أ}} = \overleftarrow{\text{م}_1\text{أ}_1}$

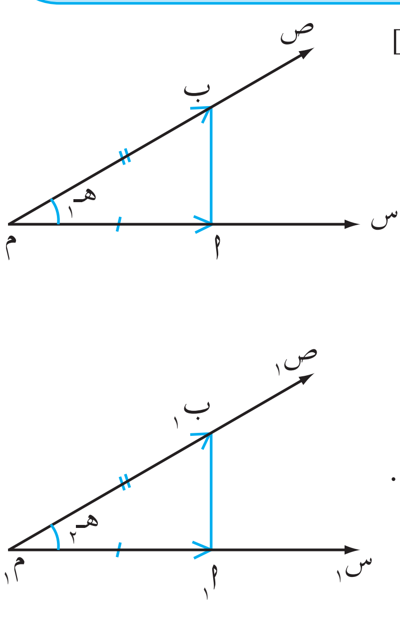
$\therefore$ $\overleftarrow{\text{أ}_1\text{ب}_1} = \overleftarrow{\text{م ب}} - \overleftarrow{\text{م أ}}$ ——(٢)

بمقارنة (١) ، (٢) ينتج أن $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{أ}_1\text{ب}_1}$

$\therefore$ $|\text{أ ب}| = |\text{أ}_1\text{ب}_1|$

$\therefore$ $\Delta\, \text{م أ ب} \cong \Delta\, \text{م}_1\text{أ}_1\text{ب}_1$ ، وينتج من التطابق أن :

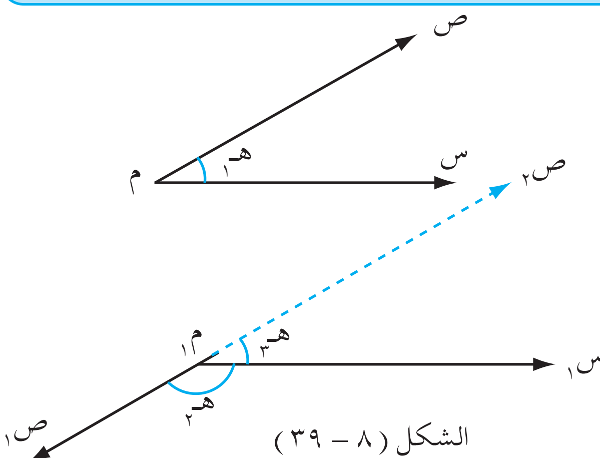
ق ($\measuredangle$ س م ص) = ق ($\measuredangle$ $\text{س}_1\text{م}_1\text{ص}_1$) أي أن $\text{هـ}_1 = \text{هـ}_2$ هـ . ط . ث .



الشكل (٨ – ٣٨)

نتيجة (٨ – ٦)

الزاويتان اللتان ضلعاهما متوازيان وأحدهما معاكس للآخر متكاملتان .



الشكل (٨ – ٣٩)

المعطيات : $\overleftarrow{\text{م س}}$ // $\overleftarrow{\text{م}_1\text{س}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{م ص}}$ // $\overleftarrow{\text{م}_1\text{ص}_1}$ وفي أتجاهين متعاكسين [شكل (٨ – ٣٩)]

المطلوب : إثبات أن : هـ$_1$ + هـ$_2$ = π

البرهان : نرسم $\overleftarrow{\text{م}_1\text{ص}_2}$ // $\overleftarrow{\text{م ص}}$ ، وفي اتجاه واحد .

$\because$ هـ$_1$ = هـ$_3$ مبرهنة (٨ – ١٠)

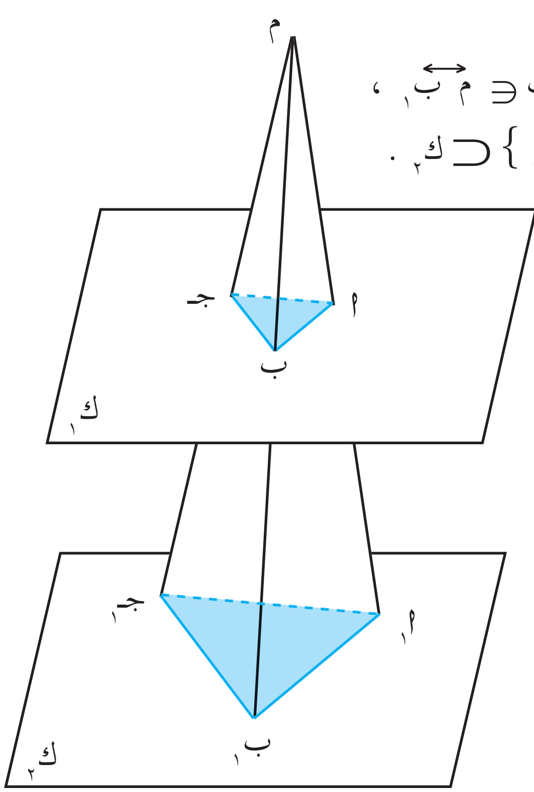
$\because$ هـ$_3$ + هـ$_2$ = π (زاوية مستقيمة)

$\therefore$ هـ$_1$ + هـ$_2$ = π (بالتعويض) هـ . ط . ث .

مثال (٨ – ٧)

م نقطة خارج المستويين المتوازيين ك$_1$ ، ك$_2$ ، رسم منها ثلاثة مستقيمات بحيث لاتقع جميعها في مستوىً واحد فقطعت ك$_1$ في أ ، ب ، جـ وقطعت ك$_2$ في أ$_1$ ، ب$_1$ ، جـ$_1$ على الترتيب .

أثبت أن : Δ أ ب جـ $\sim$ Δ أ$_1$ ب$_1$ جـ$_1$.



الشكل (٨ – ٤٠)

المعطيات : ك$_1$ // ل$_2$ ، م $\not\in$ ك$_1$ ، م $\not\in$ ك$_2$ ، أ $\in$ $\overleftrightarrow{\text{م أ}_1}$ ، ب $\in$ $\overleftrightarrow{\text{م ب}_1}$ ، جـ $\in$ $\overleftrightarrow{\text{م جـ}_1}$ ، { أ ، ب ، جـ } $\subset$ ك$_1$ ، { أ$_1$ ، ب$_1$ ، جـ$_1$ } $\subset$ ك$_2$.

البرهان : $\because$ ك$_1$ // ك$_2$ والمستوى (م أ ب$_1$) قاطع لهما في $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ}_1\text{ب}_1}$.

$\therefore$ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{أ}_1\text{ب}_1}$ ——— (١)

بالمثل $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{ب}_1\text{جـ}_1}$ ——— (٢)

بالمثل $\overline{\text{أ جـ}}$ // $\overline{\text{جـ}_1\text{أ}_1}$ ——— (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن :

ق ($\measuredangle$ أ ب جـ) = ق ($\measuredangle$ أ$_1$ ب$_1$ جـ$_1$)

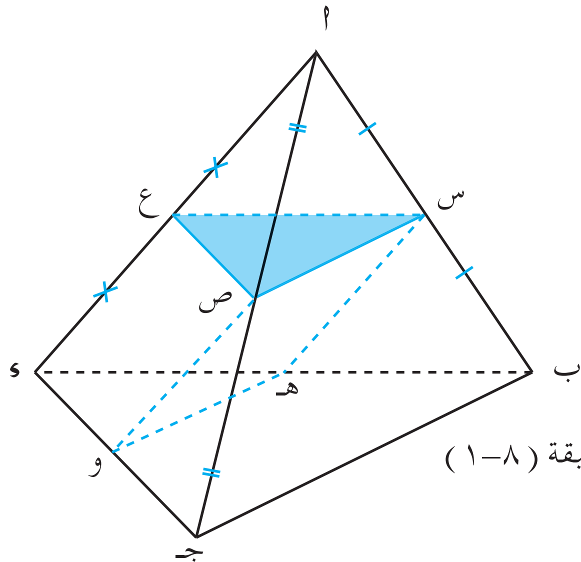
ق ($\measuredangle$ أ جـ ب) = ق ($\measuredangle$ أ$_1$ جـ$_1$ ب$_1$)

ق ($\measuredangle$ ب أ جـ) = ق ($\measuredangle$ ب$_1$ أ$_1$ جـ$_1$)

$\therefore$ Δ أ ب جـ $\sim$ Δ أ$_1$ ب$_1$ جـ$_1$.

مثال (٨ – ٨)

أ ، ب ، جـ ، ء أربع نقاط غير واقعة في مستوىً واحد ،نصفت الأضلاع $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{أ ء}$ بالنقاط س ، ص ، ع على الترتيب هـ ، و منتصفا الضلعين $\overline{ء ب}$ ، $\overline{ء جـ}$ على الترتيب . المطلوب إثبات أن :



الشكل (٨ – ٤١)

١ (س ص ع) // (ب جـ ء)

٢ ∆∆ س ص ع ، ب جـ ء متشابهان .

٣ الشكل س ص و هـ متوازي أضلاع .

البرهان :

١ ∵ س ، ص منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$

∴ $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$ ؛

بالمثل $\overline{ص ع}$ // $\overline{جـ ء}$

∴ المستوى (س ص ع) // المستوى (ب جـ ء) حقيقة (٨–١)

٢ بالطريقة نفسها كما في المثال(٨ – ٧)

٣ ∵ هـ ، و منتصفا $\overline{ء ب}$ ، $\overline{ء جـ}$

∴ $\overline{هـ و}$ // $\overline{ب جـ}$ ، | هـ و | = $\frac{١}{٢}$ | ب جـ | ——(١)

∵ $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$ ، | س ص | = $\frac{١}{٢}$ | ب جـ | ——(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

∴ $\overline{هـ و}$ // $\overline{س ص}$ ، | هـ و | = | س ص |

∴ الشكل س ص و هـ متوازي أضلاع .

تمارين ومسائل (٨ – ٣)

[١] بيّن صواب، أو خطأ العبارات التالية :

أ) المستقيمان الموازيان لمستوىً واحد متوازيان .

ب) إذا توازى مستويان ، فإن أي مستقيم في أحدهما يوازى المستوى الآخر .

جـ) يتوازى المستويان إذا لم يشتركا بأيه نقطة .

د) المستقيم القاطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر .

هـ) إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ // ى ، $\overleftrightarrow{ق}$ ⊂ ى ، فإن $\overleftrightarrow{ل}$ // $\overleftrightarrow{ق}$.

و) إذا كان ك$_١$ ∩ ك$_٢$ = $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$ // ك$_١$ ، فإن $\overleftrightarrow{ل_١}$ // $\overleftrightarrow{ل_٢}$

ز) إذا وازى مستقيم مستويين ، فإن المستويين متوازيان .

ح) إذا وازى مستقيم مستوىً ، فإنه يوازى جميع مستقيماته .

ط) المستويان الموازيان لمستوىً ثالث متوازيان .

ى) المستويان الموازيان لمستقيم واحد متوازيان .

ك) من نقطة خارج مستوىً لايمكن رسم سوىً مستوىً واحد قاطع له .

ل) المستقيم القاطع أحد مستويين متوازيين قاطع للآخر .

م) إذا وازى ضلعا زاوية ضلعا زاوية أخرى ، فإن قياسهما متساوٍ .

[٢] ب جـ ء هـ شبه منحرف فيه $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ ، ٱ نقطة غير واقعة في مستواه لنأخذ نقطة $\text{ب}_{١}$ على $\overline{\text{ٱ ب}}$ ونمرر منها المستوى ك موازياً مستوى القاعدة (ب جـ ء هـ) ، وقاطعاً $\overline{\text{ٱ جـ}}$ ، $\overline{\text{ٱ ء}}$ ، $\overline{\text{ٱ هـ}}$ في $\text{جـ}_{١}$ ، $\text{ء}_{١}$ ، $\text{هـ}_{١}$ على الترتيب .

أ) إثبت أولاً : أن : $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{ب}_{١}\,\text{جـ}_{١}}$.

ثانياً : أن : $\Delta\Delta$ ب جـ ء ، $\text{ب}_{١}\,\text{جـ}_{١}\,\text{ء}_{١}$ متشابهان .

ب) أوجد الفصل المشترك للمستويين ك ، (ٱ ب ء) .

[٣] ٱ ب جـ ء رباعي غير مستو ، م ، ى منتصفي $\overline{\text{ٱ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ على الترتيب رسم المستوى ك يحوى م ، ى ويلاقى $\overline{\text{ٱ ء}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ في و ، هـ على الترتيب .

أ) إثبت أن : $\overline{\text{ٱ ب}}$ // $\overline{\text{م ى}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$.

ب) إذا كانت هـ منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ ، فإثبت أن الشكل م ى هـ و متوازي أضلاع .

[٤] إذا قطعت ثلاث مستويات متوازية $\text{ك}_{١}$ ، $\text{ك}_{٢}$ ، $\text{ك}_{٣}$ المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ في ب ، جـ ، ء ، والمستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}_{١}}$ في $\text{ب}_{١}$ ، $\text{جـ}_{١}$ ، $\text{ء}_{١}$ على الترتيب . فإثبت أن :

$$\frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{جـ ء}|} = \frac{|\text{ب}_{١}\,\text{جـ}_{١}|}{|\text{جـ}_{١}\,\text{ء}_{١}|}$$

[٥] $\overline{\text{ٱ ب}}$ ، $\overline{\text{ٱ جـ}}$ ، $\overline{\text{ٱ ء}}$ ثلاث قطع مستقيمة لايجمعها مستوىً واحد أخذت النقاط س ، ص ، ع على $\overline{\text{ٱ ب}}$ ، $\overline{\text{ٱ جـ}}$ ، $\overline{\text{ٱ ء}}$ على الترتيب بحيث $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (∡ س ص ع) = ق (∡ ب جـ ء)

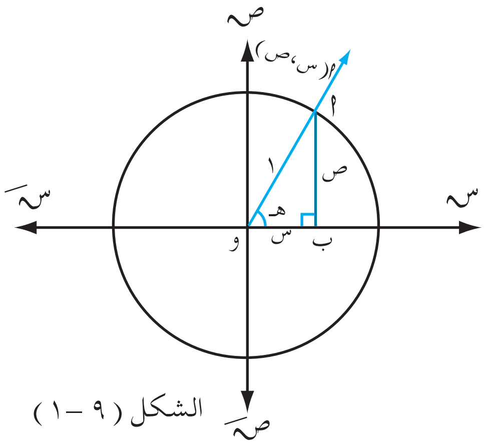
أثبت أن : ١ ■ المستويين (س ص ع) ، (ب جـ ء) متوازيان .

٢ ■ $\overline{\text{س ع}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$.

الوحدة التاسعة حســـاب المثـــلـــثـــــات

٩ – ١ مــراجعـــــة

تذكر :



الشكل (٩ – ١)

لتكن و دائرة مركزها نقطة الأصل نق = وحدة طولية واحدة ، أ (س ، ص) نقطة على الدائرة ، ب (س ، ٠) نقطة على المحــور السيني (الموجب) ، لتكن ق (∢ أ و ب) = هـ ، فإن :

جتاهـ = س ، جا هـ = ص ، ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ (س ≠ ٠) .

انظر الشكل (٩ – ١)، تعرف إن لكل نسبة من النسب المثلثية مقلوب ، نعرفه كما يلي :

قتا هـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$ = $\frac{١}{\text{ص}}$ ، حيث ص ≠٠ ، قا هـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{١}{\text{س}}$ ، حيث س ≠٠ .

ظتا هـ = $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$.

تذكر أنه مهما كانت الزاوية هـ ، فإن :

جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ = ١	(٩ – ١)
١ + ظا^{٢} هـ = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}$ = قا^{٢} هـ	(٩ – ٢)
١ + ظتا^{٢} هـ = $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{ هـ}}$ = قتا^{٢} هـ	(٩ – ٣)
جتا (٢ π – هـ) = جتا (– هـ) = جتا هـ ، جا (٢ π – هـ) = جا (– هـ) = – جا هـ ظا (٢ π – هـ) = ظا (–هـ) = – ظا هـ ، ظتا (٢ π – هـ) = ظتا (– هـ) = – ظتا هـ جتا (٢ π + هـ) = جتا هـ = جتا هـ ، جا (٢ π + هـ) = جا هـ ظا (٢ π + هـ) = ظا = ظا هـ ، ظتا (٢ π + هـ) = ظتا هـ	(٩ – ٤)
جتا (π – هـ) = – جتا هـ ، جا (π – هـ) = جا هـ ظا (π – هـ) = – ظا هـ ، ظتا(π – هـ)= – ظتا هـ	(٩ – ٥)
جتا (π + هـ) = – جتا هـ ، جا (π + هـ) = – جا هـ ظا (π + هـ) = ظا هـ ، ظتا (π + هـ) = ظتا هـ	(٩ – ٦)

جتا $\left(\frac{\pi}{٢} + \text{هـ}\right) = -$ جا هـ ، جا $\left(\frac{\pi}{٢} + \text{هـ}\right) =$ جتا هـ

ظا $\left(\frac{\pi}{٢} + \text{هـ}\right) =$ ظتا هـ ، ظتا $\left(\frac{\pi}{٢} + \text{هـ}\right) = -$ ظا هـ

جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \text{هـ}\right) =$ جا هـ ، جا $\left(\frac{\pi}{٢} - \text{هـ}\right) =$ جتا هـ

ظا $\left(\frac{\pi}{٢} - \text{هـ}\right) =$ ظتا هـ ، ظتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \text{هـ}\right) =$ ظا هـ

(٩ – ٧)

يعطى الجدول (٩ – ١) النسب المثلثية للزوايا الخاصة :

النسبة / الزاوية هـ	جا	جتا	ظا	ظتا
٠°	٠	١	٠	غير معرّفة
$\frac{\pi}{٦} = ٣٠^\circ$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$
$\frac{\pi}{٤} = ٤٥^\circ$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١	١
$\frac{\pi}{٣} = ٦٠^\circ$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
$\frac{\pi}{٢} = ٩٠^\circ$	١	٠	غير معرّفة	٠
$\pi = ١٨٠^\circ$	٠	-١	٠	غير معرّفة
$\frac{٣\pi}{٢} = ٢٧٠^\circ$	-١	٠	غير معرّفة	٠
$٢\pi = ٣٦٠^\circ$	٠	١	٠	غير معرّفة

الجدول (٩ – ١)

مثال (٩ – ١)

أوجد قيم النسب المثلثية الآتية :

أ) جا (٣٠٠°) ، ب) جتا ($\frac{١٣\pi}{٢}$) ، جـ) ظا ($\frac{-١٣\pi}{٣}$) .

الحـــل :

أ) جا (٣٠٠°) = جا ($٣٦٠^\circ - ٦٠^\circ$) = – جا ٦٠° = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

ب) جتا ($\frac{١٣\pi}{٢}$) = جتا ($٦\pi + \frac{\pi}{٢}$) = جتا $\frac{\pi}{٢}$ = ٠ .

جـ) ظا ($\frac{-١٣\pi}{٣}$) = – ظا $\frac{١٣\pi}{٣}$ = – ظا ($٤\pi + \frac{\pi}{٣}$) = – ظا $\frac{\pi}{٣}$ = $-\sqrt{٣}$.

مثال (٩ – ٢)

إذا كانت جتا هـ $= \frac{-٥}{١٣}$ ، وكان قياس الزاوية الموجَّهة هـ تقع في الربع الثالث ، فأوجد كلاً من : جا هـ ، ظا هـ.

الحـــل :

∵ جتا هـ $= -\frac{٥}{١٣}$ ، ∵ جا^{٢}هـ $= ١ - \frac{٢٥}{١٦٩}$

∴ جا^٢ هـ $= \frac{١٤٤}{١٦٩}$ ⟸ جا هـ $= \pm \frac{١٢}{١٣}$

∵ هـ تقع في الربع الثالث ، ∴ جا هـ $= -\frac{١٢}{١٣}$ ، ∴ ظا هـ $= \frac{١٢}{٥}$.

مثال (٩ – ٣)

أثبت أن : جا ١٢٠° جا ١٥٠° + جتا ٢٤٠° جتا ٣٣٠° = ٠ .

الحـــل :

الطرف الأيمن = جا ١٢٠° جا ١٥٠° + جتا ٢٤٠° جتا ٣٣٠°

= جا (١٨٠° – ٦٠°) جا (١٨٠° – ٣٠°) + جتا (١٨٠° + ٦٠°) جتا (٣٦٠° – ٣٠°)

= جا ٦٠° جا ٣٠° – جتا ٦٠° جتا ٣٠° $= \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٠ =$ الطرف الأيسر .

مثال (٩ – ٤)

أثبت أن : ظتا (١٨٠° + هـ) قا (١٨٠° – هـ) = – قتا هـ .

الحـــل :

∵ الطرف الأيمن ظتا (١٨٠° + هـ) قا (١٨٠° – هـ) = ظتا هـ × – قا هـ

$= \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}} \times \frac{-١}{\text{جتا هـ}} = \frac{-١}{\text{جا هـ}} =$ – قتا هـ = الطرف الأيسر .

تمارين ومسائل (٩ – ١)

[١] أوجد القياس الأساسي لكل من الزوايا الموجَّهة في وضعها القياسي مبيناً الربع الذي تقع فيه كل زاوية :

أ) ٣٠° ، ب) ٤٥° ، جـ) –٦٠° ،
د) ٣٩٠° ، هـ) –٨٥٠° ، و) ٣٠٠° .

[٢] أوجد قيم كل مما يلي بدون استخدام الآلة الحاسبة :

جا ٢٤٠° ، جتا ٤٢٠° ، ظا ٣٣٠° ،
قا ٢١٠° ، جا $\frac{٧\pi}{٦}$ ، جتا $\frac{٥\pi}{٣}$ ،
ظا (– $\frac{٧\pi}{٤}$) ، قتا $\frac{٥\pi}{٤}$ ، جتا $\frac{٥\pi}{٦}$.

[٣] أوجد قيم كل مما يلي :

أ) جا ٣٠° + جتا ٩٠° ، ب) ظا ٤٥° + ٢ جا ١٥٠° ،
جـ) ٢ جا ٦٠° + ٤ جتا ٣٠° ، د) $\frac{١}{٢}$ ظتا ٣٠° × $\frac{١}{٤}$ قتا ٦٠° .

[٤] إذا كانت جا هـ = $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ < هـ < π ، فأوجد كلاً من : جتا هـ ، ظا هـ ، قا هـ ، قتا هـ ، ظتا هـ.

[٥] برهن أن : ظا (٣٦٠° – هـ) قتا (١٨٠° + هـ) جتا (١٨٠° – هـ) = ظتا ($\frac{-٥\pi}{٤}$) .

٩ – ٢ النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

أولاً : جيب تمام فرق (أو مجموع) قياسي زاويتين :

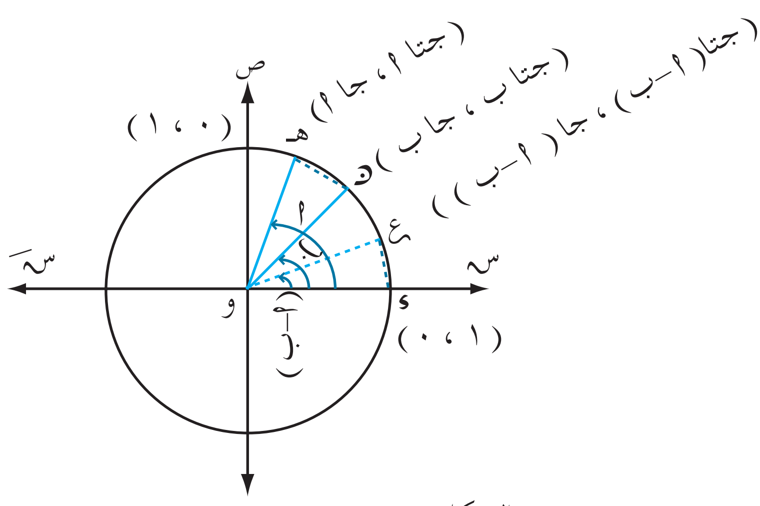
تأمل الشكل (٩ – ٢) تلاحظ أن :

∡ ء و هـ = ١ ، ∡ ء و ى = ب ،

وهما في الوضع القياسي في دائرة الوحدة وإحداثيات النقاط :

ء ، هـ ، ع ، ى هي كالتالي :

ء (١ ، ٠) ، هـ (جتا ١ ، جا ١) ،



الشكل (٩ – ٢)

د (جتا ب ، جا ب) ،ع (جتا (أ – ب) ، جا (أ – ب)) ، ومن الشكل (٩ – ٢) نجد أن :

طول الوتر $\overline{\text{ء ع}}$ = طول الوتر $\overline{\text{د هـ}}$

أي أن : $|$ء ع$|^{2}$ = $|$د هـ$|^{2}$

وباستخدام قانون البعد بين نقطتين نجد أن : [جتا (أ – ب) – ١]^{2} + [جا (أ – ب) – ٠]^{2}

= (جتا أ – جتا ب)^{2} + (جا أ – جا ب)^{2} .

∴ جتا^{2}(أ – ب) – ٢ جتا (أ – ب) + ١ + جا^{2} (أ – ب)

= جتا^{2} أ – ٢ جتا أ جتا ب + جتا^{2}ب + جا^{2} أ – ٢ جا أ جا ب + جا^{2} ب

∴ [جتا^{2} (أ – ب) + جا^{2} (أ – ب)] + ١ – ٢ جتا (أ – ب)

= (جتا^{2} أ + جا^{2} أ) + (جتا^{2} ب + جا^{2} ب) – ٢ جتا أ جتا ب – ٢ جا أ جا ب

∴ ٢ – ٢ جتا (أ – ب) = ٢ – ٢ (جتا أ جتا ب + جا أ جا ب)

∴ $\boxed{\text{جتا (أ – ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب}}$ (٩ – ٨)

بوضع (–ب) بدلاً من ب في العلاقة السابقة (٩–٨) نجد أن :

جتا [أ – (– ب)] = جتا أ جتا (– ب) + جا أ جا (– ب)

∵ جتا (–ب) = جتا ب ، جا (– ب) = – جا ب

∴ جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب + جا أ × (– جا ب)

∴ $\boxed{\text{جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب – جا أ جا ب}}$ (٩ – ٩)

ثانياً : جيب مجموع (أو فرق) قياسي زاويتين :

باستخدام العلاقة جتا (أ – ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب ، وبوضع ($\frac{\pi}{٢}$ – أ) بدلاً من أ نجد :

جتا ($\frac{\pi}{٢}$ – أ – ب) = جتا ($\frac{\pi}{٢}$ – أ) جتا ب + جا ($\frac{\pi}{٢}$ – أ) جا ب

∴ جتا [$\frac{\pi}{٢}$ – (أ + ب)] = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب .

∴ $\boxed{\text{جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب}}$ (٩ – ١٠)

بوضع (–ب) بدلاً من (ب) في العلاقة السابقة (٩–١٠) نجد أن :

جا [أ + (– ب)] = جا أ جتا (– ب) + جتا أ جا (– ب)

حيث أن : جتا (–ب) = جتا ب ، جا (–ب) = – جا ب

∴ $\boxed{\text{جا (أ – ب) = جا أ جتا ب – جتا أ جا ب}}$ (٩ – ١١)

ثالثاً : ظل فرق (أو مجموع) قياسي زاويتين :

تعلم أن : $ظا ٲ = \frac{جا ٲ}{جتا ٲ}$

$$ظا (ٲ - ب) = \frac{جا (ٲ - ب)}{جتا (ٲ - ب)} = \frac{جا ٲ جتا ب - جتا ٲ جا ب}{جتا ٲ جتا ب + جا ٲ جا ب}$$

وبقسمة كلٍّ من البسط والمقام على جتا ٲ جتا ب حيث جتا ٲ $\neq$ ٠ ، جا ٲ $\neq$ ٠

نجد أن :

$$ظا (ٲ - ب) = \frac{\frac{جا ٲ جتا ب - جتا ٲ جا ب}{جتا ٲ جتا ب}}{\frac{جتا ٲ جتا ب + جا ٲ جا ب}{جتا ٲ جتا ب}} = \frac{\frac{جا ٲ}{جتا ٲ} - \frac{جا ب}{جتا ب}}{١ + \frac{جا ٲ}{جتا ٲ} \times \frac{جا ب}{جتا ب}}$$

$$\therefore \boxed{ظا (ٲ - ب) = \frac{ظا ٲ - ظا ب}{١ + ظا ٲ ظا ب} \quad حيث \quad ظا ٲ ظا ب \neq -١} \qquad (٩ - ١٢)$$

بوضع (– ب) بدلاً من ب في القانون (٩ – ١٢)

نجد أن :

$$ظا [ٲ - (-ب)] = \frac{ظا ٲ - ظا (-ب)}{١ + ظا ٲ ظا (-ب)}$$

، $\because$ ظا (– ب) = – ظا ب

$$\therefore \boxed{ظا (ٲ + ب) = \frac{ظا ٲ + ظا ب}{١ - ظا ٲ ظا ب} \quad حيث \quad ظا ٲ ظا ب \neq ١} \qquad (٩ - ١٣)$$

مثال (٩ – ٥)

باستخدام النسب المثلثية للزوايا الخاصة . أوجد ما يلي :

أ) جا ١٠٥° ، ب) جتا ١٥° ، جـ) ظا ٧٥° .

الحـــل :

يمكن وضع الزوايا على شكل مجموع ، أو (فرق) لزوايا خاصة .

أ) $جا ١٠٥° = جا (٦٠° + ٤٥°) = جا ٦٠° جتا ٤٥° + جتا ٦٠° جا ٤٥° = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$$= \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}} .$$

ب) جتا ١٥° = جتا (٤٥° – ٣٠°) = جتا ٤٥° جتا ٣٠° + جا ٤٥° جا ٣٠

$$= \frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٦}}{٤} + \frac{\sqrt{٢}}{٤} = \frac{١}{٤} (\sqrt{٦} + \sqrt{٢}) .$$

جـ) ظا ٧٥° = ظا (٤٥° + ٣٠°) $= \dfrac{\text{ظا } ٤٥° + \text{ظا } ٣٠°}{١ - \text{ظا } ٤٥° \text{ ظا } ٣٠°} = \dfrac{١ + \dfrac{١}{\sqrt{٣}}}{١ - (١ \times \dfrac{١}{\sqrt{٣}})}$

بضرب البسط والمقام في $\sqrt{٣}$ ينتج أن : ظا ٧٥° $= \dfrac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٣} - ١}$.

وبضرب البسط والمقام في مرافق المقام وهو ($\sqrt{٣}$ + ١)

يكون ظا ٧٥° $= \dfrac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٣} - ١} \times \dfrac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٣} + ١} = \dfrac{٣ + ١ + ٢\sqrt{٣}}{٣ - ١} = \dfrac{٤ + ٢\sqrt{٣}}{٢}$

ومنه ظا٧٥° $= \dfrac{٢ (٢ + \sqrt{٣})}{٢} = ٢ + \sqrt{٣}$.

مثال (٩ – ٦)

إذا كان جتا ا $= \dfrac{٣}{٥}$ ، $٠ < ا < \dfrac{\pi}{٢}$ ، جا ب $= \dfrac{٥}{١٣}$ ، $٠ < ب < \dfrac{\pi}{٢}$.

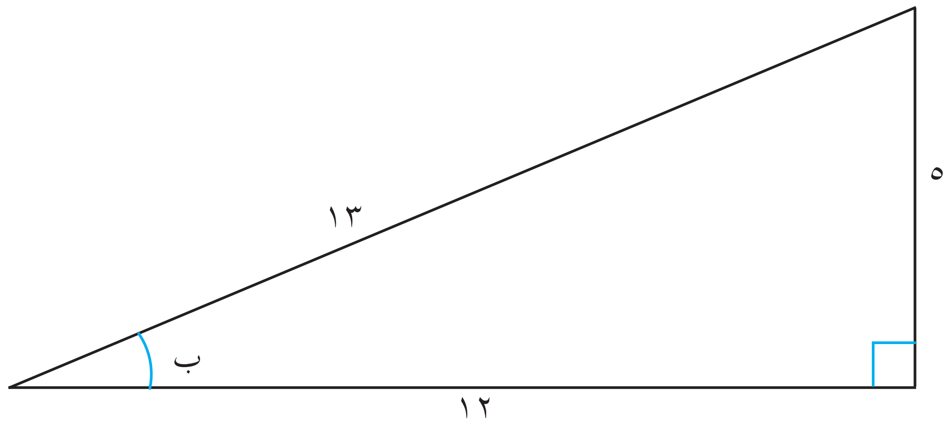
فأوجد كلاً من : ١■ جا (ا – ب) ، ٢■ جتا (ا + ب) ، ٣■ ظا (ا – ب) .

الحــــل :

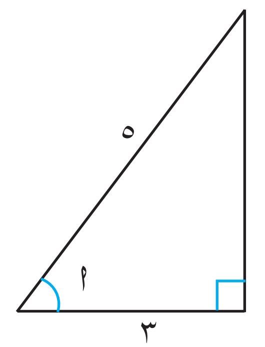
أولاً : نوجد كلاً من : جا ا ، ظا ا ، وكذلك جتا ب ، ظا ب [انظر الشكلين [(٩ – ٣ أ ، ب)] .

جتا ا $= \dfrac{٣}{٥}$ ومنها جا ا $= \dfrac{٤}{٥}$ ، ظا ا $= \dfrac{٤}{٣}$

جا ب $= \dfrac{٥}{١٣}$ ومنها جتا ب $= \dfrac{١٢}{١٣}$ ، ظا ب $= \dfrac{٥}{١٢}$



الشكل (٩ – ٣ ب)



الشكل (٩ – ٣أ)

$$\therefore \text{جا}(أ - ب) = \text{جا أ جتا ب} - \text{جتا أ جا ب} = \frac{٤}{٥} \times \frac{١٢}{١٣} - \frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{٤٨ - ١٥}{٦٥} = \frac{٣٣}{٦٥}$$

$$\text{جتا}(أ + ب) = \text{جتا أ جتا ب} - \text{جا أ جا ب} = \frac{٣}{٥} \times \frac{١٢}{١٣} - \frac{٤}{٥} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{٣٦ - ٢٠}{٦٥} = \frac{١٦}{٦٥}$$

$$\text{ظا}(أ - ب) = \frac{\text{ظا أ} - \text{ظا ب}}{١ + \text{ظا أ ظا ب}} = \frac{\frac{٤}{٣} - \frac{٥}{١٢}}{١ + \frac{٤}{٣} \times \frac{٥}{١٢}} = \frac{٤٨ - ١٥}{٣٦ + ٢٠} = \frac{٣٣}{٥٦} \ .$$

مثال (٩ – ٧)

أثبت أن :
$$\frac{\text{ظا } ٧٨^\circ - \text{ظا } ٤٨^\circ}{١ + \text{ظا } ٧٨^\circ \text{ ظا } ٤٨^\circ} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

الحل :

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{\text{ظا } ٧٨^\circ - \text{ظا } ٤٨^\circ}{١ + \text{ظا } ٧٨^\circ \text{ ظا } ٤٨^\circ} = \text{ظا}(٧٨^\circ - ٤٨^\circ) = \text{ظا } ٣٠^\circ = \frac{١}{\sqrt{٣}} = \text{الطرف الأيسر} \ .$$

مثال (٩ – ٨)

أثبت أن :
$$\frac{\text{جا}(أ - ب)}{\text{جتا أ جتا ب}} + \frac{\text{جا}(ب - جـ)}{\text{جتا ب جتا جـ}} + \frac{\text{جا}(جـ - أ)}{\text{جتا جـ جتا أ}} = ٠ \ .$$

الحل :

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{\text{جا أ جتا ب} - \text{جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب}} + \frac{\text{جا ب جتا جـ} - \text{جتا ب جا جـ}}{\text{جتا ب جتا جـ}} + \frac{\text{جا جـ جتا أ} - \text{جتا جـ جا أ}}{\text{جتا جـ جتا أ}}$$

$$= \frac{\text{جا ٢ جتا ب}}{\text{جتا ٢ جتا ب}} - \frac{\text{جتا ٢ جا ب}}{\text{جتا ٢ جتا ب}} + \frac{\text{جا ب جتا جـ}}{\text{جتا ب جتا جـ}} - \frac{\text{جتا ب جا جـ}}{\text{جتا ب جتا جـ}} + \frac{\text{جا جـ جتا ٢}}{\text{جتا جـ جتا ٢}} - \frac{\text{جتا جـ جا ٢}}{\text{جتا جـ جتا ٢}}$$

= ظا ٢ – ظا ب + ظا ب – ظا جـ + ظا جـ – ظا ٢ = ٠ = الطرف الأيسر .

تمارين ومسائل (٩ – ٢)

[١] أوجد كلا مما يأتي باستخدام النسب المثلثية للزوايا الخاصة . (وبدون استخدام الجداول ، أو الآلة الحاسبة) .

أ) جا ١٦٥ْ ، جتا ١٩٥ْ ، ظا ١٠٥ْ .   ب) جا $\frac{\pi}{٨}$ ، جتا $\frac{\pi}{٨}$ ، جا $\frac{\pi}{١٢}$ ، جتا $\frac{\pi}{١٢}$

[٢] أوجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\frac{\text{ظا ٣٢ْ + ظا ٢٨ْ}}{\text{١ – ظا ٣٢ْ ظا ٢٨ْ}}$ ،   ب) $\frac{\text{١ + ظا ٥٧ْ ظا ١٢ْ}}{\text{ظا ٥٧ْ – ظا ١٢ْ}}$.

[٣] أوجد ما يلي :

أ) جا ٤٠ْ جتا ٢٠ْ + جتا ٤٠ْ جا ٢٠ْ ،   ب) جا ٨٠ْ جتا ٥٠ْ – جتا ٨٠ْ جا ٥٠ْ ،

جـ) جتا ٧٥ْ جتا ١٥ْ + جا ٧٥ْ جا ١٥ْ ،   د) جا ١٢َ ٣٥ْ جتا ٤٨َ ٢٤ْ + جتا ١٢َ ٣٥ْ جا ٤٨َ ٢٤ْ .

[٤] إذاكان : ظا ٢ = $\frac{١}{٢}$ ، ٠ < ٢ < ٩٠ْ و جا ب = $\frac{٢}{٣}$ ، ٩٠ْ < ب < ١٨٠ْ ،

فأكمل الجدول التالي :

جا (٢ + ب)	
جا (٢ – ب)	
جتا (٢ + ب)	
جتا (٢ – ب)	
ظا (٢ + ب)	
ظا (٢ – ب)	

الجدول (٩ – ٢)

[٥] إذا كان جا ٢ = $\frac{٢٤}{٢٥}$ حيث ٢ في الربع الثاني ، جتا ب = $\frac{١٥}{١٧}$ حيث ب في الربع الرابع، أوجد كلاً

مما يلي : جا (٢ + ب) ، جا (٢ − ب) ، جتا (٢ − ب) ، جتا (٢ + ب) ، ظا (٢ − ب) ، ظا (٢ + ب) .

[٦] إذا كان جتا س = $\frac{٣}{٥}$ ، ٢٧٠° < س < ٣٦٠° ، ١٢ جا ص + ٥ = ٠ ، ١٨٠° < ص < ٢٧٠° ،

فأوجد : جا (س − ص) ، جتا (س − ص) ، ظا (س − ص) .

[٧] إذا كان ظا ٢ = $\frac{٣}{٥}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٢}$ حيث ٢ ، ب زاويتان حادتان ،

فأوجد ظا (٢ + ب) ، ظا (٢ − ب) .

[٨] برهن ما يلي :

أ) جتا (٤٥° + هـ) = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جتا هـ − جاهـ) ،

ب) $\frac{\text{جا (جـ + ء)}}{\text{جتا جـ جتا ء}}$ = ظا جـ + ظا ء ،

جـ) جتا (جـ + ء) جتا (جـ − ء) = جتا^{٢} جـ − جا^{٢} ء ،

د) ظا (هـ + ٦٠°) = $\frac{\text{ظا هـ} + \sqrt{٣}}{١ - \sqrt{٣}\ \text{ظا هـ}}$ ،

و) ظا ٧٥° − ظا ٣٠° − ظا ٧٥° ظا ٣٠° = ١ .

[٩] أثبت أن :

أ) جا ($\frac{\pi}{٢}$ + هـ) = جتا هـ ، ب) جتا ($\frac{٣\pi}{٢}$ − هـ) = − جا هـ ،

جـ) ظا (π + هـ) = ظا هـ ، د) جتا (π − هـ) = − جتا هـ .

٩ − ٣ النسب المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

بعد أن استنتجنا النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما بدلالة نسبها المثلثية ، تتعرف الآن على نسب ضعف الزاوية ونصفها ، وكذلك النسب المثلثية لزاوية بدلالة ظل نصفها .

أولاً : النسب المثلثية لضعف الزاوية :

تسمَّى النسب المثلثية (جا ٢ ٢ ، جتا ٢ ٢ ، ظا ٢ ٢) النسب المثلثية لضعف الزاوية ٢ .

- **جيب ضعف الزاوية :**

تعلم أن جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب ، وبوضع ب = أ نحصل على :

جا (أ + أ) = جا أ جتا أ + جتا أ جا أ .

∴ $\boxed{\text{جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ}}$ (٩ – ١٤)

- **جيب تمام ضعف الزاوية :**

نعلم أن : جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب – جا أ جا ب ، وبوضع ب = أ نحصل على :

جتا (أ + أ) = جتا أ جتا أ – جا أ جا ب

∴ $\boxed{\text{جتا ٢أ = جتا}^{٢}\text{أ – جا}^{٢}\text{أ}}$ (٩ – ١٥)

∵ جتا^{٢}أ + جا^{٢}أ = ١

جا^{٢}أ = ١ – جتا^{٢}أ

جتا ٢ أ = جتا^{٢}أ – (١ – جتا^{٢}أ) = جتا^{٢}أ – ١ + جتا^{٢}أ

∴ $\boxed{\text{جتا ٢أ = ٢ جتا}^{٢}\text{أ – ١}}$ (٩ – ١٦)

∵ جتا^{٢}أ = ١ – جا^{٢}أ

جتا ٢أ = (١ – جا^{٢}أ) – جا^{٢}أ

∴ $\boxed{\text{جتا ٢أ = ١ – ٢ جا}^{٢}\text{أ}}$ (٩ – ١٧)

- **ظل ضعف الزاوية :**

نعلم أن : ظا (أ + ب) = $\dfrac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ – ظا أ ظا ب}}$

يوضع ب = أ نحصل على ظا (أ + أ) = $\dfrac{\text{ظا أ + ظا أ}}{\text{١ – ظا أ ظا أ}}$

∴ $\boxed{\text{ظا ٢أ} = \dfrac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ – ظا}^{٢}\text{أ}}}$ حيث : ظا أ ≠ ± ١ (٩ – ١٨)

مثال	**(٩ – ٩)**

إذا كانت جا أ = $\dfrac{٣}{٥}$ ، ٠ < أ < $\dfrac{\pi}{٢}$ ، فاحسب كلاً من جا٢أ ، جتا ٢ أ ، ظا ٢أ .

الحـــل :

∵ جا أ = $\dfrac{٣}{٥}$

$\because$ جتا^2 ا = ١ − جا^2 ا . $\therefore$ جتا^2 ا = ١ − $(\frac{٣}{٥})^2$ = ١ − $\frac{٩}{٢٥}$ = $\frac{١٦}{٢٥}$

$\Leftarrow$ جتا ا = $\pm \frac{٤}{٥}$ ، $\because$ ٠ < ا < $\frac{\pi}{٢}$ $\therefore$ جتا ا = $\frac{٤}{٥}$

$\because$ جا ٢ ا = ٢ جا ا جتا ا

$\therefore$ جا ٢ ا = ٢ × $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

$\because$ جتا ٢ ا = جتا^2 ا − جا^2 ا

$\therefore$ جتا ٢ ا = $\frac{١٦}{٢٥}$ − $\frac{٩}{٢٥}$ = $\frac{٧}{٢٥}$

$\because$ ظا ا = $\frac{\text{جا ا}}{\text{جتا ا}}$ = $\frac{٣}{٤}$

ظا ٢ ا = $\frac{\text{٢ ظا ا}}{\text{١ − ظا}^2\text{ ا}}$ = $\frac{٢ \times \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{٩}{١٦}}$ = $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{١٦}{٧}$ = $\frac{٢٤}{٧}$

ظا ٢ ا = $\frac{٢٤}{٧}$

ثانياً : النسب المثلثية لنصف الزاوية :

تسمي النسب المثلثية (جا $\frac{ا}{٢}$ ، جتا $\frac{ا}{٢}$ ، ظا $\frac{ا}{٢}$) النسب المثلثية لنصف الزاوية .

■ **جيب نصف الزاوية :**

تعلم أن : جتا ٢ ا = ١ − ٢ جا^2 ا (نضع $\frac{ا}{٢}$ بدلاً من ا)

جتا ٢ × $\frac{ا}{٢}$ = ١ − ٢ جا^2 $\frac{ا}{٢}$

٢ جا^2 $\frac{ا}{٢}$ = ١ − جتا ا

جا^2 $\frac{ا}{٢}$ = $\frac{\text{١ − جتا ا}}{٢}$

$\therefore$ $\boxed{\text{جا } \frac{ا}{٢} = \pm\sqrt{\frac{\text{١ − جتا ا}}{٢}}}$ (٩ − ١٩)

■ **جيب تمام نصف الزاوية :**

تعلم أن : جتا ٢ ا = ٢جتا^2 ا − ١ (نضع $\frac{ا}{٢}$ بدلاً من ا)

جتا ٢ × $\frac{ا}{٢}$ = ٢ جتا^2 $\frac{ا}{٢}$ − ١

$$٢ \text{ جتا}^{٢} \frac{أ}{٢} = ١ + \text{جتا } أ$$

$$\therefore \text{ جتا}^{٢} \frac{أ}{٢} = \frac{١ + \text{جتا } أ}{٢}$$

$$\therefore \boxed{\text{جتا } \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ + \text{جتا } أ}{٢}}} \qquad (٩ - ٢٠)$$

■ **ظل نصف الزاوية :**

من (٩ – ١٩) ، (٩ – ٢٠) نحصل على :

$$\text{ظا } \frac{أ}{٢} = \frac{\text{جا } \frac{أ}{٢}}{\text{جتا } \frac{أ}{٢}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{١ - \text{جتا } أ}{٢}}}{\pm \sqrt{\frac{١ + \text{جتا } أ}{٢}}}$$

$$\therefore \boxed{\text{ظا } \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ - \text{جتا } أ}{١ + \text{جتا } أ}}} \qquad (٩ - ٢١)$$

تدريب (٩ – ١)

إذا كانت جا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، $٠ < أ < \frac{\pi}{٢}$ ، تحقق من صوب تعبئة الجدول (٩ –٣) :

جا $\frac{أ}{٢}$	جتا $\frac{أ}{٢}$	ظا $\frac{أ}{٢}$
$\frac{١}{\sqrt{١٠}}$	$\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$	$\frac{١}{٣}$

الجدول (٩ – ٣)

مثال (٩ – ١٠)

باستخدام النسب المثلثية للزوايا الخاصة ، احسب ما يلي :

أ) جا $\frac{\pi}{٨}$ جتا $\frac{\pi}{٨}$ ، ب) ظا $٢٢\frac{١}{٢}^\circ$ ، جـ) ٢ جتا^{٢} $\frac{\pi}{١٢}$ – ١ .

الحل :

أ) جا $\frac{\pi}{8}$ جتا $\frac{\pi}{8}$ = $\frac{1}{2}$ [٢ جا $\frac{\pi}{8}$ جتا $\frac{\pi}{8}$]

∵ ٢ جا أ جتا أ = جا ٢أ ⟸ جا أ جتا أ = $\frac{1}{2}$ جا ٢أ

جا $\frac{\pi}{8}$ جتا $\frac{\pi}{8}$ = $\frac{1}{2}$ جا ٢ ($\frac{\pi}{8}$) = $\frac{1}{2}$ جا $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

ب) ظا ٢٢ $\frac{1}{2}$° = ظا $\frac{45^\circ}{2}$ لاحظ أن القياس ٢٢ $\frac{1}{2}$° يمثل نصف القياس ٤٥° ، وباستخدام قوانين نصف الزاوية نجد أن :

ظا $\frac{45^\circ}{2}$ = ± $\sqrt{\frac{1 - \text{جتا } 45^\circ}{1 + \text{جتا } 45^\circ}}$ = ± $\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}}$ = ± $\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}}}$

= ± $\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}}$ = ± ($\sqrt{2}$ − ١)

جـ) ٢ جتا^2 $\frac{\pi}{12}$ − ١ = جتا ٢ $\frac{\pi}{12}$ = جتا $\frac{\pi}{6}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال (٩ − ١١)

أثبت أن : $\frac{\text{جتا } ٢أ}{1 + \text{جا } ٢أ}$ = $\frac{1 - \text{ظا أ}}{1 + \text{ظا أ}}$

الحل :

الطرف الأيمن = $\frac{\text{جتا } ٢أ}{1 + \text{جا } ٢أ}$ = $\frac{\text{جتا}^2\text{ أ} - \text{جا}^2\text{ أ}}{\text{جا}^2\text{ أ} + \text{جتا}^2\text{ أ} + ٢\text{ جا أ جتا أ}}$ = $\frac{(\text{جتا أ} - \text{جا أ})(\text{جتا أ} + \text{جا أ})}{(\text{جتا أ} + \text{جا أ})^2}$

= $\frac{\text{جتا أ} - \text{جا أ}}{\text{جتا أ} + \text{جا أ}}$ بقسمة كل من البسط والمقام على جتا أ

= $\frac{1 - \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}}{1 + \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}}$ = $\frac{1 - \text{ظا أ}}{1 + \text{ظا أ}}$

ثالثاً : النسب المثلثية لزاوية بدلالة ظل نصف الزاوية :

تعلم أن : جا ٢ أ = ٢ جا أ جتا أ ——— (١)

∵ ١ = جا^{٢} أ + جتا^{٢} أ ——— (٢)

وبقسمة (١) على (٢) نحصل على :

جا ٢ أ = $\frac{\text{٢ جا أ جتا أ}}{\text{جا}^{٢}\text{ أ + جتا}^{٢}\text{ أ}}$ بقسمة كل من البسط والمقام على جتا^{٢} أ فإنه ينتج

جا٢أ = $\frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{ أ}}$ وبوضع ٢ أ = ب نحصل على :

$$\text{جا ب} = \frac{\text{٢ ظا } \frac{\text{ب}}{\text{٢}}}{\text{١ + ظا}^{٢}\, \frac{\text{ب}}{\text{٢}}} \qquad (\text{٩ – ٢٢})$$

وبالمثل : جتا ٢ أ = جتا^{٢} أ – جا^{٢} أ = $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{ أ – جا}^{٢}\text{ أ}}{\text{جا}^{٢}\text{ أ + جتا}^{٢}\text{ أ}}$

وبقسمة كل من البسط والمقام على جتا^{٢} أ ، ينتج جتا ٢ أ = $\frac{\text{١ – ظا}^{٢}\text{ أ}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{ أ}}$

وبالتالي فإن :

$$\text{جتا ب} = \frac{\text{١ – ظا}^{٢}\, \frac{\text{ب}}{\text{٢}}}{\text{١ + ظا}^{٢}\, \frac{\text{ب}}{\text{٢}}} \qquad (\text{٩ – ٢٣})$$

وبقسمة (٩ – ٢٢) على (٩ – ٢٣) نحصل على :

$$\text{ظا ب} = \frac{\text{٢ ظا } \frac{\text{ب}}{\text{٢}}}{\text{١ – ظا}^{٢}\, \frac{\text{ب}}{\text{٢}}} \text{ ، حيث ظا}^{٢}\, \frac{\text{ب}}{\text{٢}} \neq \text{١} \qquad (\text{٩ – ٢٤}) .$$

مثال (٩ – ١٢)

احسب ظا $\frac{\text{أ}}{\text{٢}}$ إذا علمت أن : ٢ جتا أ + جا أ = ١ .

الحل :

نستخدم قوانين (٩ – ٢٢) ، (٩ – ٢٣) فنجد :

$$\frac{٢\left(١ - ظا^٢ \frac{أ}{٢}\right)}{١ + ظا^٢ \frac{أ}{٢}} + \frac{٢ ظا \frac{أ}{٢}}{١ + ظا^٢ \frac{أ}{٢}} = ١$$

$$٢ - ٢ ظا^٢ \frac{أ}{٢} + ٢ ظا \frac{أ}{٢} = ١ + ظا^٢ \frac{أ}{٢}$$

$$٣ ظا^٢ \frac{أ}{٢} - ٢ ظا \frac{أ}{٢} - ١ = ٠$$

$$\left(٣ ظا \frac{أ}{٢} + ١\right)\left(ظا \frac{أ}{٢} - ١\right) = ٠$$

∴ أما أن يكون $ظا \frac{أ}{٢} = -\frac{١}{٣}$ ، أو أن يكون $ظا \frac{أ}{٢} = ١$

تمارين ومسائل (٩ – ٣)

[١] إذا كان جا أ = $\frac{٤}{٥}$ حيث $٠° < أ < ٩٠°$ ، فأوجد كلاً من : جتا أ ، جا ٢ أ ، جتا ٢ أ ، ظا ٢ أ .

[٢] إذا كانت أ زاوية حادة ، وكان جتا أ = $\frac{٧}{٢٥}$ ، فأوجد قيمة كل من جا $\frac{أ}{٢}$ ، جتا $\frac{أ}{٢}$ ، ظا $\frac{أ}{٢}$.

[٣] إذا كانت جا أ = $\frac{-٣}{٤}$ ، $\pi < أ < ٢\pi$ ، وكانت جتا أ = $\frac{٣}{٥}$ ؛ فاحسب كلاً من :

جتا ٢ أ ، جا ٢ أ ، ظا ٢ أ ، جا $\frac{أ}{٢}$ ، جتا $\frac{أ}{٢}$.

[٤] بدون استخدام جداول النسب المثلثية أو الآلة الحاسبة ، أوجد قيم ما يلي :

أ) ٢ جا $\frac{\pi}{١٢}$ جتا $\frac{\pi}{١٢}$ ، ب) ١ – ٢ جا^٢ ٢٢,٥°

جـ) ٢ جا ٧٥° جتا ٧٥° ، د) $\frac{٢ ظا \frac{\pi}{٨}}{١ - ظا^٢ \frac{\pi}{٨}}$.

[٥] إذا كان ظا أ = $-\frac{٣}{٤}$ ، حيث $\frac{٣\pi}{٢} <$ أ $< ٢\pi$ ؛ فأوجد قيمة جا ٢ أ ، جتا (٢ أ − ٣ π)، ظا (π + ٢ أ) .

[٦] اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

أ) ٢ جا ٦ س جتا ٦ س ، ب) ٢ جتا^٢ ٦ س − ١ ،

جـ) $\frac{٢ \text{ ظا } ٢٢\frac{١}{٢}^\circ}{١ - \text{ظا}^٢ ٢٢\frac{١}{٢}^\circ}$.

[٧] إذا علمت أن : جتا أ + ٢ جا أ = ١ ؛ فأوجد ظا $\frac{أ}{٢}$ ، ثم أوجد جا أ ، جتا أ ، ظا أ .

[٨] أثبت صحة ما يلي :

أ) قا ٢ أ − ظا ٢ أ = $\frac{\text{جتا أ} - \text{جا أ}}{\text{جتا أ} + \text{جا أ}}$ ، ب) جتا^٤ جـ − جا^٤ جـ = جتا ٢ جـ ،

جـ) ٢ قتا ٢ أ = قتا أ قا أ ، د) جا ٨ أ = ٨ جا أ جتا أ جتا ٢ أ جتا ٤ أ .

هـ) ١ + جا أ = ٢ جا^٢ ($\frac{\pi}{٤}$ + $\frac{أ}{٢}$) ، و) ١ − جا أ = ٢ جتا^٢ ($\frac{\pi}{٤}$ + $\frac{أ}{٢}$) .

ز) ظا ٣ أ = $\frac{\text{٣ ظا أ} - \text{ظا}^٣ \text{أ}}{١ - ٣\text{ظا}^٢ \text{أ}}$.

٩ − ٤ تحويل مجموع وفرق جيبي أو جيبي تمام إلى حاصل ضرب والعكس

تعرف أن :

جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب (٩ − ١٠)

جا (أ − ب) = جا أ جتا ب − جتا أ جا ب (٩ − ١١)

جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب (٩ − ٩)

جتا (أ − ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب (٩ − ٨)

من هذه القوانين يمكننا أن نستنتج بعض القوانين الأخرى التي تساعدنا في حل كثير من التمارين والمسائل في حساب المثلثات .

أولاً : بجمع (٩ − ١٠) ، (٩ − ١١) نحصل على :

$\boxed{\text{جا (أ + ب) + جا (أ − ب) = ٢ جا أ جتا ب}}$ (٩ − ٢٥)

ثانياً : بطرح (٩ – ١١) من (٩ – ١٠) نحصل على :

$$\boxed{\text{جا } (أ + ب) - \text{جا } (أ - ب) = ٢ \text{ جتا } أ \text{ جا } ب} \qquad (٩ - ٢٦)$$

ثالثاً : بجمع (٩ – ٩) ، (٩ – ٨) نحصل على :

$$\boxed{\text{جتا } (أ + ب) + \text{جتا } (أ - ب) = ٢ \text{ جتا } أ \text{ جتا } ب} \qquad (٩ - ٢٧)$$

رابعاً : بطرح (٩ – ٨) من (٩ – ٩) نحصل على :

$$\boxed{\text{جتا } (أ + ب) - \text{جتا } (أ - ب) = -٢ \text{ جا } أ \text{ جا } ب} \qquad (٩ - ٢٨)$$

نفرض أن : أ + ب = س ، أ – ب = ص

فإن أ $= \frac{س + ص}{٢}$ ، ب $= \frac{س - ص}{٢}$

وبالتعويض المباشر في المعادلة (٩ – ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨) نحصل على :

$$\text{جا س} + \text{جا ص} = ٢ \text{ جا } \frac{س + ص}{٢} \text{ جتا } \frac{س - ص}{٢} \qquad (٩ - ٢٩)$$

$$\text{جا س} - \text{جا ص} = ٢ \text{ جتا } \frac{س + ص}{٢} \text{ جا } \frac{س - ص}{٢} \qquad (٩ - ٣٠)$$

$$\text{جتا س} + \text{جتا ص} = ٢ \text{ جتا } \frac{س + ص}{٢} \text{ جتا } \frac{س - ص}{٢} \qquad (٩ - ٣١)$$

$$\text{جتا س} - \text{جتا ص} = -٢ \text{ جا } \frac{س + ص}{٢} \text{ جا } \frac{س - ص}{٢} \qquad (٩ - ٣٢)$$

مثال (٩ – ١٣)

بسّط ما يلي :

أ) جا ٧٥° + جا ١٥° ، ب) جتا ٨٠° – جتا ٢٠° ،

جـ) حول إلى حاصل ضرب : جتا ٥ جـ + جتا ٣ جـ .

الحـــل :

أ) ∵ جا س + جا ص $= ٢ \text{ جا } \frac{س + ص}{٢} \text{ جتا } \frac{س - ص}{٢}$

∴ جا ٧٥° + جا ١٥° $= ٢ \text{ جا } \left(\frac{٧٥° + ١٥°}{٢}\right) \text{ جتا } \left(\frac{٧٥° - ١٥°}{٢}\right) = ٢ \text{ جا } ٤٥° \text{ جتا } ٣٠°$

$= ٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$.

ب) $\because$ جتا س − جتا ص = −٢ جا $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$ جا $\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$

$\therefore$ جتا ٨٠° − جتا ٢٠° = −٢ جا ($\frac{٨٠° + ٢٠°}{٢}$) جا ($\frac{٨٠° - ٢٠°}{٢}$) = −٢ جا ٥٠° جا ٣٠° = − جا ٥٠° .

جـ) $\because$ جتا س + جتا ص = ٢ جتا $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$ جتا $\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$

$\therefore$ جتا ٥ جـ + جتا ٣ جـ = ٢جتا $\frac{٥ \text{ جـ} + ٣ \text{ جـ}}{٢}$ جتا $\frac{٥ \text{ جـ} - ٣ \text{ جـ}}{٢}$ = ٢ جتا ٤ جـ جتا جـ .

مثال (٩ − ١٤)

اكتب كلاً مما يأتي على صورة مجموع (أو فرق) جيبي (أو جيبي تمام) :

أ) ٢ جا ٧ ص جتا ٣ ص ، ب) ٢ جتا $\frac{٦ \text{ س}}{٤}$ جتا $\frac{\text{س}}{٤}$

الحـــل :

أ) $\because$ ٢ جا ؛ جتا ب = جا (؛ + ب) + جا (؛ − ب)

٢ جا ٧ ص جتا ٣ ص = جا (٧ ص + ٣ ص) + جا (٧ ص − ٣ ص) = جا ١٠ ص + جا ٤ ص .

ب) $\because$ ٢ جتا ؛ جتا ب = جتا (؛ + ب) + جتا (؛ − ب)

٢ جتا $\frac{٦ \text{ س}}{٤}$ جتا $\frac{\text{س}}{٤}$ = جتا ($\frac{٦ \text{ س}}{٤}$ + $\frac{\text{س}}{٤}$) + جتا ($\frac{٦ \text{ س}}{٤}$ − $\frac{\text{س}}{٤}$) = جتا $\frac{٧ \text{ س}}{٤}$ + جتا $\frac{٥ \text{ س}}{٤}$.

مثال (٩ − ١٥)

أثبت أن : $\frac{\text{جا ٧ ؛ − جا ٥ ؛}}{\text{جتا ٧ ؛ + جتا ٥ ؛}}$ = ظا ؛ .

الحـــل :

باستخدام قوانين تحويل مجموع (أو فرق) جيبي تمام (أو جيبي) قياس زاويتين إلى حاصل ضرب يكون :

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{٢\text{جتا} \left(\frac{(٧ ؛ + ٥ ؛)}{٢} \right) \text{جا} \left(\frac{(٧ ؛ - ٥ ؛)}{٢} \right)}{٢\text{جتا} \left(\frac{(٧ ؛ + ٥ ؛)}{٢} \right) \text{جتا} \left(\frac{(٧ ؛ - ٥ ؛)}{٢} \right)} = \frac{٢\text{جتا ٦ ؛ جا ؛}}{٢\text{جتا ٦ ؛ جتا ؛}}$$

= $\frac{\text{جا ؛}}{\text{جتا ؛}}$ = ظا ؛ = الطرف الأيسر .

تمارين ومسائل (٩ – ٤)

[١] اكتب كلاً مما يأتي على صورة مجموع (أو فرق) جيبي (أو جيبي تمام) :

أ) جا ٣ ص جتا ٧ ص ، ب) ٢ جا (أ + ٣ ب) جا (٢ أ + ٥ ب) ،

جـ) ٢ جتا ٦٠° جتا ٨٠° ، د) جتا ١٤٠° جا ٧٣° ،

هـ) جتا $\frac{٥ م}{٢}$ جتا $\frac{م}{٢}$.

[٢] عبر عمّا يأتي بصورة حاصل ضرب :

أ) جا ٩٠° + جا ٣٠° ، ب) جتا ٩٠° + جتا ٣٠° ،

جـ) جتا ١٠٠° – جتا ٤٠° ، د) جا ٥٤° + جتا ٧٨° ،

هـ) جتا ٩ جـ – جتا ٣ جـ ، و) جا ٦ أ – جا ٤ أ ،

ز) جا (أ + ب) + جا أ ، ح) جا (٩٠° – ص) – جا ٣ ص ،

ى) جا ($\frac{\pi}{٢}$ – أ) – جتا ب .

[٣] أثبت ما يأتي :

أ) جتا ٤٥° جا ١٥° + جتا ١٥° جتا ٧٥° = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ،

ب) $\frac{\text{جا ٨٠° – جا ٢٠°}}{\text{جتا ٨٠° + جتا ٢٠°}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ،

جـ) $\frac{\text{جا ١٠° + جا ٢٠°}}{\text{جتا ٢٠° + جتا ١٠°}}$ = ظا ١٥° .

[٤] أثبت ما يأتي :

أ) $\frac{\text{جا ٣ جـ + جا جـ}}{\text{جتا جـ – جتا ٣ جـ}}$ = ظتا جـ ، ب) $\frac{\text{جتا ٥ جـ + جتا ٢ جـ}}{\text{جا ٢ جـ + جا ٥ جـ}}$ = ظتا $\frac{\text{٧ جـ}}{٢}$ ،

جـ) $\frac{\text{جا ٣ جـ + جا ٧ جـ – جا ٥ جـ}}{\text{جتا ٧ جـ + جتا ٣ جـ – جتا ٥ جـ}}$ = ظا ٥ جـ ،

د) جا^{٢} (أ + ب) – جا^{٢} (أ – ب) = جا ٢ أ جا ٢ ب .

[٥] إذاكان : أ + ب + جـ = ١٨٠° . فبرهن ما يأتي :

$\frac{\text{جا أ – جا ب}}{\text{جا أ + جا ب}}$ = ظا $\frac{\text{جـ}}{٢}$ ظا $\frac{\text{(أ – ب)}}{٢}$.

٩ – ٥ المعادلات المثلثية

عرفت المعادلات الجبرية ، وطرق حلها ، كما تعرفت على المعادلات الأسية ، واللوغاريتمية ، وكيفية حلها ، وفي هذا البند ستتعرف على نوعٍ آخر من المعادلات ، وهي المعادلات التي تحتوي على نسب مثلثية ، وتسمى مثل هذه المعادلات بالمعادلات المثلثية .

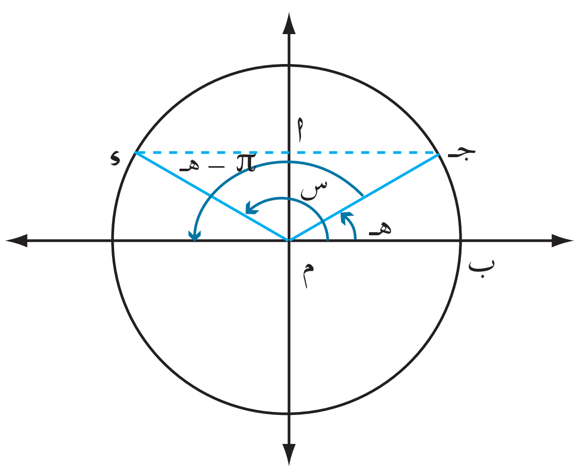
تعريف (٩ – ١)

المعادلة المثلثية هي معادلة تحتوي على نسبة مثلثية على الأقل لزاوية متغيرة .

المعادلات : ظا س = ١ ، جا س = $\sqrt{٢}$ ، جتا س = جتا $\frac{٣ س}{٢}$ معادلات مثلثية ، ويتم حلها بإيجاد قيم الزاوية التي تحقق تلك المعادلة .

وفي هذا البند تتعرف على طرق حل المعادلات المثلثية التي على صورة : جا س = أ ، جتا س = أ ، ظا س = أ .

أولاً : حل المعادلة المثلثية جا س = أ



الشكل (٩ – ٤)

كي يكون للمعادلة جا س = أ حل ينبغي أن يتحقق الشرط $-١ \leq$ أ ≤ ١ ؛ وبالتالي إذا كانت أ > ١ أو أ < -١ ، فإن المعادلة تصبح مستحيلة الحل في مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) ، أي أن مجموعة الحل [في (ح)] = $\varnothing$.

وإذا كانت أ $\in$ [–١ ، ١] ، فإنه يوجد على الأقل زاوية قياسها هـ (زاوية الإسناد) ، بحيث جا هـ = أ ، فيكون جا س = جا هـ ، وبذلك يكون س = هـ = ق∡ (ب م جـ) [انظر الشكل (٩ – ٤)] ، وحيث إن :

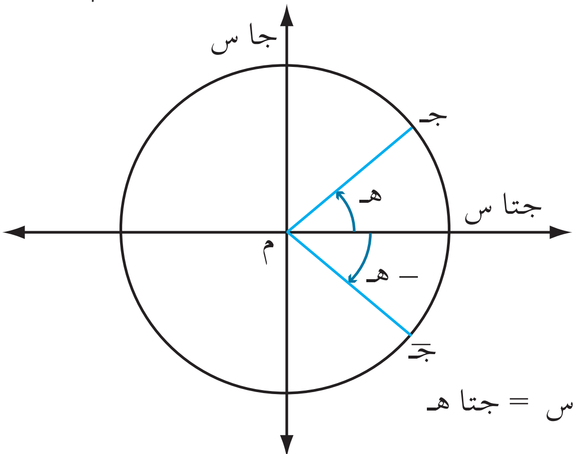
جاس = جا (π – هـ) = جا هـ $\Leftarrow$ س = π – هـ .

وبشكل عام يكون : جا (هـ + ٢ ك π) = أ ، جا (π – هـ + ٢ ك π) = أ .

ويكون القياس العام للزاوية س التي تمثل مجموعة الحل للمعادلة جا س = أ في مجموعة الأعداد الحقيقية هي :

$$\boxed{\{ \text{س : س = هـ + ٢ ك } \pi \ \vee \ \text{س} = (\pi - \text{هـ}) + \text{٢ ك } \pi \text{ ، ك} \in \text{ص} \}}$$ .... (١)

ثانياً : حل المعادلة جتا س = أ



الشكل (٩ – ٥)

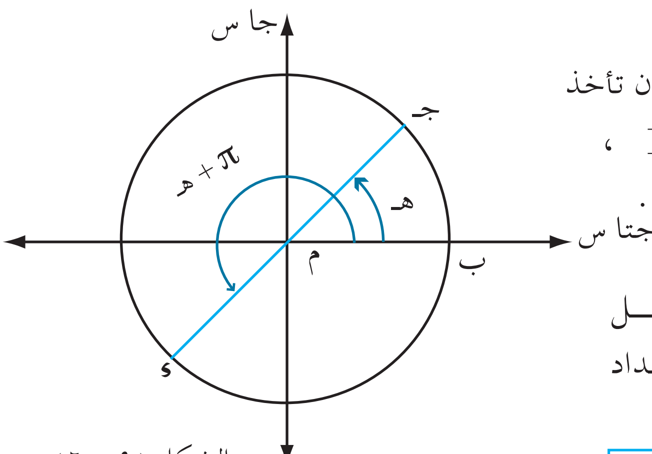
كي يكون للمعادلة جتا س = أ حل ينبغي أن يتحقق الشرط −١ ≤ أ ≤ ١ ، وبالتالي إذا كانت أ > ١ ، أو أ < −١ ، فأن المعادلة تصبح مستحيلة الحل في (ح) ؛ أي أن مجموعة الحل [في (ح)] = ∅ ، إما إذا كانت أ ∈ [−١ ، ١] ، فإنه يوجد على الأقل زاوية قياسها هـ (زاوية الإسناد) بحيث جتا هـ = أ فيكون جتا س = جتا هـ

وبذلك يكون قياس الزاوية س = هـ أو س = − هـ ، (حيث هـ زاوية الإسناد) [انظر الشكل (٩ – ٥)] .

فيكون القياس العام للزاوية س الذي يمثل مجموعة حل المعادلة جتا س = جتا هـ = أ في مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) هي :

$$\{ \text{س} : \text{س} = \pm \text{هـ} + ٢ \text{ك} \pi ، \text{ك} \in \text{صم} \} . \quad \ldots\ldots (٢)$$

ثالثاً : حل المعادلة ظا س = أ



الشكل (٩ – ٦)

كي يكون للمعادلة ظا س = أ حل فإن أ يمكن أن تأخذ أي عدد حقيقي أي أن : أ ∈] −∞ ، ∞ [، وتصبح المعادلة ظا س = ظا هـ = ظا (هـ + π) = أ . [انظر الشكل (٩ – ٦)] .

فيكون قياس الزاوية س الذي يمثل مجموعة حل المعادلة ظا س = ظا هـ = أ هي مجموعة الأعداد الحقيقية ، هي :

$$\{ \text{س} : \text{س} = \text{هـ} + \text{ك} \pi ، \text{ك} \in \text{صم} \} . \quad \ldots\ldots\ldots (٣)$$

مثال (٩ – ١٦)

أوجد مجموعة حل المعادلة جا س = $\frac{١}{٢}$

الحل :

من المعلوم أن جا $\frac{\pi}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$. أي أن جا س = جا $\frac{\pi}{٦}$ ، وهذا يعني أن هـ = $\frac{\pi}{٦}$

وبالتعويض في العلاقة (١) نجد أن :

∴ س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ك π ، أو س = π − $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ك π = $\frac{٥\pi}{٦}$ + ٢ ك π .

∴ مجموعة الحل هي : { س : س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ك π ∨ س = $\frac{٥\pi}{٦}$ + ٢ ك π ، ك ∈ صم } .

مثال (٩ – ١٧)

أوجد مجموعة حل المعادلة جا س = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

الحـــل :

جا س = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\Leftarrow$ هـ س تقع في الربع الثالث أو الرابع جا س = جا $-\frac{\pi}{٣}$ ، وهذا يعني أن هـ = $-\frac{\pi}{٣}$

وبالتعويض في العلاقة (١): $\therefore$ س = $-\frac{\pi}{٣}$ + ٢ ك π

أو س = π – ($-\frac{\pi}{٣}$) + ٢ ك π = π + $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ ك π = $\frac{٤\pi}{٣}$ + ٢ ك π

$\therefore$ مجموعة الحل هي : {س : س = $\frac{-\pi}{٣}$ + ٢ ك π $\vee$ س = $\frac{٤\pi}{٣}$ + ٢ ك π ، ك $\in$ صـ}.

مثال (٩ – ١٨)

أوجد مجموعة حل المعادلة جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ في الفترات الآتية :

أ) [٠ ، π] ، ب) [$-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، جـ) [٠ ، ٢ π] ، د) ح .

الحـــل :

جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\Leftarrow$ هـ س تقع في الربع الأول أو الرابع ، جتا س = جتا $\frac{\pi}{٦}$ ، وهذا يعني أن هـ = $\frac{\pi}{٦}$

وبالتعويض في العلاقة (٢):

أ) في [٠ ، π] يكون س = $\frac{\pi}{٦}$

$\therefore$ مجموعة الحل هي { $\frac{\pi}{٦}$ } .

ب) في [$-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$] يكون س = $-\frac{\pi}{٦}$ ، أو س = $\frac{\pi}{٦}$

$\therefore$ مجموعة الحل هي { $\frac{-\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٦}$ } .

جـ) في [٠ ، ٢ π] يكون س = $\frac{\pi}{٦}$ ، أو س = $\frac{١١\pi}{٦}$

$\therefore$ مجموعة الحل هي { $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$ } .

د) في ح مجموعة الحل هي { س : س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ك π $\vee$ س = $\frac{١١\pi}{٦}$ + ٢ ك π ، ك $\in$ صـ } .

مثال (٩ - ١٩)

أوجد مجموعة حل المعادلة ظا س = $\sqrt{٣}$.

الحل :

ظا س = $\sqrt{٣}$ $\Leftarrow$ هـ س تقع في الربع الأول أو الثالث، ظا $\frac{\pi}{٣}$ = $\sqrt{٣}$ ، وهذا يعني أن هـ = $\frac{\pi}{٣}$

وبالتعويض في العلاقة (٣):

$\therefore$ مجموعة الحل هي $\{$ س : س = $\frac{\pi}{٣}$ + ك π ، ك $\in$ ص $\}$.

مثال (٩ - ٢٠)

أوجد مجموعة الحل للمعادلة المثلثية جتا $\frac{١٣}{٢}$ س = جتا ٥ س .

الحل :

هناك حالتان تحقق المعادلة : جتا $\frac{١٣}{٢}$ س = جتا ٥ س

أولاً : $\frac{١٣}{٢}$ س = ٥ س + ٢ ك π

$\Leftarrow$ $\frac{١٣}{٢}$ س − ٥ س = ٢ ك π

$\Leftarrow$ $\frac{٣}{٢}$ س = ٢ ك π

$\therefore$ س = $\frac{٤}{٣}$ ك π حيث ك $\in$ ص .

ثانياً : $\frac{١٣}{٢}$ س = − ٥ س + ٢ ك π

$\Leftarrow$ $\frac{١٣}{٢}$ س + ٥ س = ٢ ك π

$\Leftarrow$ $\frac{٢٣}{٢}$ س = ٢ ك π

$\therefore$ س = $\frac{٤}{٢٣}$ ك π .

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة هي : $\{$ س : س = $\frac{٤}{٣}$ ك π $\vee$ س = $\frac{٤}{٢٣}$ ك π ، ك $\in$ ص $\}$.

مثال (٩ – ٢١)

أوجد مجموعة حل المعادلة ٢ جتا^{٢} جـ – جتا جـ – ١ = صفر ، ٠ ≤ جـ < ٢ π .

الحــــل :

لحل مثل هذه المعادلة نستخدم تحليل المقدار الثلاثي ؛ نفرض أن جتا جـ = س ونعوض في المعادلة الأصلية

فنحصل على ٢ س^{٢} – س – ١ = ٠

∴ (٢ س + ١) (س – ١) = ٠

فيكون هناك حالتان لحل المعادلة .

أما ٢ س + ١ = ٠ ⟸ س = – $\frac{١}{٢}$ ، أو س – ١ = ٠ ⟸ س = ١

أولاً : عندما س = – $\frac{١}{٢}$

∴ جتا جـ = – $\frac{١}{٢}$ ، ∵ ٠ ≤ جـ < ٢ π .

∴ أما جـ = π – $\frac{π}{٣}$ = $\frac{٢π}{٣}$ أو جـ = π + $\frac{π}{٣}$ = $\frac{٤π}{٣}$

فتكون مجموعة حل المعادلة جتا جـ = – $\frac{١}{٢}$ هي { $\frac{٢π}{٣}$ ، $\frac{٤π}{٣}$ }.

ثانياً : عندما س = ١

∴ جتا جـ = ١ ، ∵ ٠ ≤ جـ < ٢ π ، ∴ جـ = ٠ .

فتكون مجموعة حل المعادلة جتا جـ = ١ هي { ٠ } .

∴ مجموعة حل المعادلة : ٢ جتا^{٢} جـ – جتا جـ – ١ = صفر هي { ٠ ، $\frac{٢π}{٣}$ ، $\frac{٤π}{٣}$ } .

تمارين ومسائل (٩ – ٥)

[١] أوجد مجموعة الحل للمعادلات المثلثية الآتية :

أ) جا جـ = –١ ، ٠ ≤ جـ < ٢ π ، ب) جتا جـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ٠ ≤ جـ < ٢ π ،

جـ) ظا جـ = ٠ ، د) جا جـ = ١

هـ) جا جـ = جا ٢ جـ ، ٠ ≤ جـ < ٢ π ، و) ظا جـ = – $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$.

[٢] حل المعادلات الآتية :

أ) جتا ٣ س = جتا ٥ س ، ب) جا $\frac{١٩ س}{٣}$ = جا ٧ س ،

جـ) جا $\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤} \right)$ = جا ٢ س ، د) ظا $\left(٧\,\text{س} + \frac{\pi}{٤} \right)$ = ظا $\left(٣\,\text{س} - \frac{\pi}{٢} \right)$.

[٣] حل المعادلات الآتية :

أ) ٤ جا^{٢} س − ٢ جا س − ١ = ٠ ، ب) ٨ جا^{٤} س − ٨ جا^{٢} س + ١ = ٠ ،

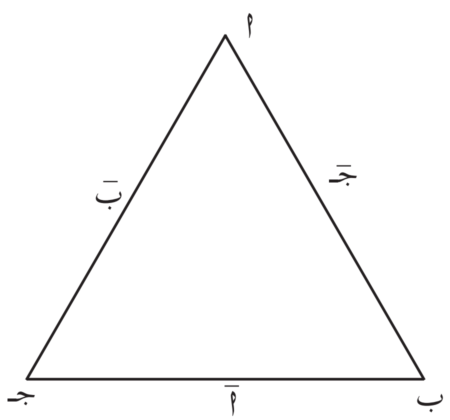
جـ) جتا س − $\sqrt{٣}$ جا س = ١ ، د) ١٦ جتا^{٤} س − ٢٠ جتا^{٢} س + ٥ = ٠ ،

هـ) ظا^{٢} س − ظا س − ٢ = ٠ .

٩ − ٦ حل المثلث وتطبيقاته

تعرف أن العناصر الأساسية للمثلث ستة عناصر : ثلاثة منها قياسات زواياه ، والثلاثة الأخرى أطوال أضلاعه الثلاثة . وإيجاد العناصر الستة معاً يسمى حل المثلث ، ونستطيع إيجاد هذه العناصر من خلال معرفة ثلاثة عناصر على الأقل منها طول أحد الأضلاع ، وذلك بتطبيق بعض العلاقات المثلثية . ولانستطيع معرفة أطوال الأضلاع بمعرفة زواياه الثلاث فقط .

أولاً : العلاقات في المثلث :



الشكل (٩ − ٧)

تعرف أنه يرمز لأطوال أضلاع المثلث أ ب جـ بالرموز :

| أ ب | = جـ̄ ، | ب جـ | = أ̄ ، | جـ أ | = ب̄ ،

ولقياسات زواياه بالرمز : أ ، ب ، جـ .

١ ■ **العلاقة الأولى** : يتم التعبير عن طول ضلع في المثلث بدلالة الضلعين الآخرين والزاوية المحصورة بينهما . هذه هي العلاقة الأساسية الأولى،ويمكن صياغتها رمزياً على النحو التالي :

$$\bar{\text{أ}}^{٢} = \bar{\text{ب}}^{٢} + \bar{\text{جـ}}^{٢} - ٢\,\bar{\text{ب}}\,\bar{\text{جـ}}\ \text{جتا أ}$$

$$\bar{\text{ب}}^{٢} = \bar{\text{جـ}}^{٢} + \bar{\text{أ}}^{٢} - ٢\,\bar{\text{جـ}}\,\bar{\text{أ}}\ \text{جتا ب}$$

$$\bar{\text{جـ}}^{٢} = \bar{\text{أ}}^{٢} + \bar{\text{ب}}^{٢} - ٢\,\bar{\text{أ}}\,\bar{\text{ب}}\ \text{جتا جـ}$$

(٩−٣٣)

مثال (٩ − ٢٢)

احسب قياس زوايا المثلث أ ب جـ إذا علمت أن $\bar{\text{أ}} = \sqrt{٢٤}$ ، $\bar{\text{ب}} = ٤$ ، $\bar{\text{جـ}} = \sqrt{١٢} + ٢$.

الحـــل :

من العلاقة $\bar{\text{أ}}^{٢} = \bar{\text{ب}}^{٢} + \bar{\text{جـ}}^{٢} - ٢\,\bar{\text{ب}}\,\bar{\text{جـ}}$ جتا أ نحصل على أن :

$$\text{جتا أ} = \frac{\bar{\text{ب}}^{٢} + \bar{\text{جـ}}^{٢} - \bar{\text{أ}}^{٢}}{٢\,\bar{\text{ب}}\,\bar{\text{جـ}}} = \frac{(٤)^{٢} + (\sqrt{١٢} + ٢)^{٢} - (\sqrt{٢٤})^{٢}}{٢ \times ٤ \times (\sqrt{١٢} + ٢)}$$

$$= \frac{١٦ + ١٢ + ٤\sqrt{١٢} + ٤ - ٢٤}{٨\sqrt{١٢} + ١٦} = \frac{٨ + ٤\sqrt{١٢}}{٨\sqrt{١٢} + ١٦} = \frac{٤(\sqrt{١٢} + ٢)}{٨(\sqrt{١٢} + ٢)} = \frac{١}{٢}$$

جتا أ $= \frac{١}{٢}$ $\Longleftarrow$ أ $= ٦٠^\circ$

$$\text{جتا ب} = \frac{\overline{جـ}^٢ + \overline{أ}^٢ - \overline{ب}^٢}{٢\ \overline{جـ}\ \overline{أ}} = \frac{(\sqrt{١٢} + ٢)^٢ + (\sqrt{٢٤})^٢ - (٤)^٢}{٢(\sqrt{١٢} + ٢)(\sqrt{٢٤})} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

جتا ب $= \frac{١}{\sqrt{٢}}$ $\Longleftarrow$ ب $= ٤٥^\circ$

$\therefore$ جـ $= ١٨٠^\circ - (٦٠^\circ + ٤٥^\circ) = ٧٥^\circ$.

مثال (٩ – ٢٣)

حل المثلث أ ب جـ حيث $\overline{أ}$ = ٥سم ، $\overline{ب}$ = ٣ سم ، جـ = ١٢٠° .

الحـــل :

$\because$ $\overline{جـ}^٢ = \overline{أ}^٢ + \overline{ب}^٢ - ٢\overline{أ}\,\overline{ب}$ جتا جـ ، $\therefore$ ٢٥ + ٩ – ٢ × ١٥ جتا ١٢٠° = ٣٤ – ٣٠ $(-\frac{١}{٢})$ = ٤٩ .

$\therefore$ $\overline{جـ} = \sqrt{٤٩}$ = ٧سم

$$\text{جتا أ} = \frac{\overline{ب}^٢ + \overline{جـ}^٢ - \overline{أ}^٢}{٢\ \overline{ب}\ \overline{جـ}} = \frac{٩ + ٤٩ - ٢٥}{٢ \times ٣ \times ٧} = \frac{٣٣}{٤٢} = ٠{,}٧٩ \ .$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن أ ≈ ٣٨°

$\therefore$ ب ≈ ١٨٠° – (١٢٠° + ٣٨°) = ١٨٠° – ١٥٨° = ٢٢°

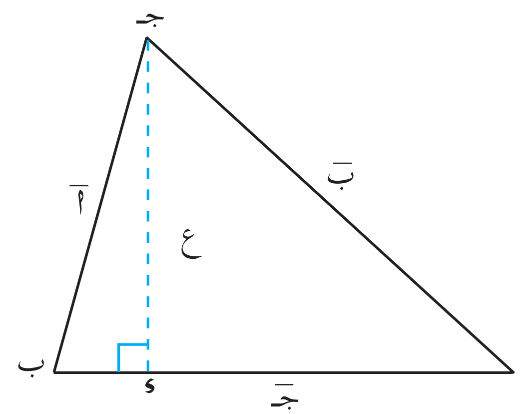
٢ ■ **العلاقة الثانية :** يتم التعبير عن العناصر الستة في تناسب بين أطوال الأضـــلاع وجيـــب الزاوية المقابلة لكل ضلع وتعتبر هذه العلاقة الأساسية الثانية ، وتكتب هذه العلاقة رمزياً على النحو التالي :

$$\boxed{\frac{\overline{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\overline{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\overline{جـ}}{\text{جا جـ}}} \qquad \text{———— (٩ – ٣٤)}$$

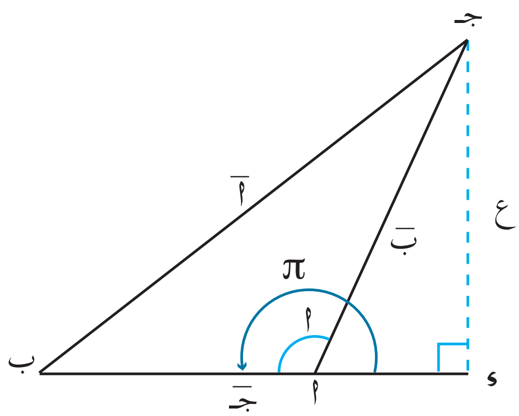
ولإثبات هذه العلاقة [انظر الشكلين (٩ – ٨) ، (٩ – ٩)] .

$\therefore$ ب ≈ ١٨٠° – (١٢٠° + ٣٨°) = ١٨٠° – ١٥٨° = ٢٢°

نفرض أن ع هو الارتفاع النازل من جـ على أ ب .



الشكل (٩ –٨)



الشكل (٩ – ٩)

مساحة المثلث أ ب جـ (م) = $\frac{١}{٢}$ $\overline{\text{جـ}}$ × ع ، م = $\frac{١}{٢}$ $\overline{\text{جـ}}$ × ع

م = $\frac{١}{٢}$ $\overline{\text{جـ}}$ × $\overline{\text{ب}}$ جا أ ، م = $\frac{١}{٢}$ $\overline{\text{جـ}}$ × $\overline{\text{ب}}$ جا (π – أ)

= $\frac{١}{٢}$ $\overline{\text{جـ}}$ $\overline{\text{ب}}$ جا أ ، = $\frac{١}{٢}$ $\overline{\text{جـ}}$ $\overline{\text{ب}}$ جا أ

أي أن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما ، أي أن :

م = $\frac{١}{٢}$ $\overline{\text{ب}}$ $\overline{\text{جـ}}$ جا أ = $\frac{١}{٢}$ $\overline{\text{ب}}$ $\overline{\text{أ}}$ جا جـ = $\frac{١}{٢}$ $\overline{\text{أ}}$ $\overline{\text{جـ}}$ جا ب

∵ $\frac{١}{٢}$ $\overline{\text{ب}}$ $\overline{\text{جـ}}$ جا أ = $\frac{١}{٢}$ $\overline{\text{أ}}$ $\overline{\text{جـ}}$ جا ب (بالقسمة على $\frac{١}{٢}$ $\overline{\text{جـ}}$ نحصل على)

$\overline{\text{ب}}$ جا أ = $\overline{\text{أ}}$ جا ب ⟸ $\frac{\overline{\text{أ}}}{\text{جا أ}} = \frac{\overline{\text{ب}}}{\text{جا ب}}$ ——— (١)

وبالمثل $\overline{\text{جـ}}$ جا ب = $\overline{\text{ب}}$ جا جـ ⟸ $\frac{\overline{\text{ب}}}{\text{جا ب}} = \frac{\overline{\text{جـ}}}{\text{جا جـ}}$ ——— (٢)

ومن (١) ، (٢) ينتج أن :

$$\frac{\overline{\text{أ}}}{\text{جا أ}} = \frac{\overline{\text{ب}}}{\text{جا ب}} = \frac{\overline{\text{جـ}}}{\text{جا جـ}}$$ هـ . ط . ث .

مثال (٩ – ٢٤)

احسب مساحة المثلث أ ب جـ الذي فيه $\overline{ب}$ = ٨سم ، أ = ٢٥° ، ب = ٤٠° .

الحـــل :

جـ = ١٨٠° – (٢٥° + ٤٠°) = ١١٥° .

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن : جا أ ≈ ٠,٤٢ ، جا ب ≈ ٠,٦٤ ، جا جـ ≈ ٠,٩

∵ $\frac{\overline{أ}}{جا\ أ} = \frac{\overline{ب}}{جا\ ب}$ ⟸ $\overline{أ} = \frac{جا\ أ \times \overline{ب}}{جا\ ب} \approx \frac{٠,٤٢ \times ٨}{٠,٦٤} = \frac{٣,٣٦}{٠,٦٤}$ = ٥,٢٥سم .

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ $\overline{ب}$ $\overline{أ}$ جا جـ ≈ $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٥,٢٥ × ٠,٩ = ١٨,٩سم^٢ .

٣ مساحة المثلث بمعرفة أطوال أضلاعه :

مبرهنة (٩ – ١)

ليكن أ ب جـ مثلث ، فإن مساحة المثلث = $\sqrt{ل\ (ل - \overline{أ})\ (ل - \overline{ب})\ (ل - \overline{جـ})}$ ، حيث ل نصف محيط المثلث .

البرهان :

مساحة المثلث (م) = $\frac{١}{٢}$ $\overline{ب}$ $\overline{جـ}$ جا أ

∴ جا أ = $\frac{٢\ م}{\overline{ب}\ \overline{جـ}}$ ⟸ جا^٢ أ = $\frac{٤\ م^٢}{\overline{ب}^٢\ \overline{جـ}^٢}$

وحيث أن : $\overline{أ}^٢ = \overline{ب}^٢ + \overline{جـ}^٢$ – ٢ $\overline{ب}$ $\overline{جـ}$ جتا أ ⟸ جتا أ = $\frac{\overline{ب}^٢ + \overline{جـ}^٢ - \overline{أ}^٢}{٢\ \overline{ب}\ \overline{جـ}}$

⟸ جتا^٢ أ = $\frac{(\overline{ب}^٢ + \overline{جـ}^٢ - \overline{أ}^٢)^٢}{٤\ \overline{ب}^٢\ \overline{جـ}^٢}$

∵ جتا^٢ أ + جا^٢ أ = ١ ⟸ $\frac{(\overline{ب}^٢ + \overline{جـ}^٢ - \overline{أ}^٢)^٢}{٤\ \overline{ب}^٢\ \overline{جـ}^٢} + \frac{٤\ م^٢}{\overline{ب}^٢\ \overline{جـ}^٢}$ = ١

∴ $\frac{(\overline{ب}^٢ + \overline{جـ}^٢ - \overline{أ}^٢)^٢ + ١٦\ م^٢}{٤\ \overline{ب}^٢\ \overline{جـ}^٢}$ = ١

٤ $\overline{ب}^٢$ $\overline{جـ}^٢$ = ١٦ م^٢ + ($\overline{ب}^٢ + \overline{جـ}^٢ - \overline{أ}^٢$)^٢

١٦ م^٢ = ٤ $\overline{ب}^٢$ $\overline{جـ}^٢$ – ($\overline{ب}^٢ + \overline{جـ}^٢ - \overline{أ}^٢$)^٢

= [٢ $\overline{ب}$ $\overline{جـ}$ + ($\overline{ب}^٢ + \overline{جـ}^٢ - \overline{أ}^٢$)] [٢ $\overline{ب}$ $\overline{جـ}$ – ($\overline{ب}^٢ + \overline{جـ}^٢ - \overline{أ}^٢$)]

= [($\overline{ب}^٢$ + ٢ $\overline{ب}$ $\overline{جـ}$ + $\overline{جـ}^٢$) – $\overline{أ}^٢$] [$\overline{أ}^٢$ – ($\overline{ب}^٢$ – ٢ $\overline{ب}$ $\overline{جـ}$ + $\overline{جـ}^٢$)]

١٦ م^{٢} = [($\overline{\text{ب}}$ + $\overline{\text{جـ}}$)^{٢} − $\overline{\text{أ}}^{٢}$] [$\overline{\text{أ}}^{٢}$ − ($\overline{\text{ب}}$ − $\overline{\text{جـ}}$)^{٢}]

= ($\overline{\text{ب}}$ + $\overline{\text{جـ}}$ + $\overline{\text{أ}}$) ($\overline{\text{ب}}$ + $\overline{\text{جـ}}$ − $\overline{\text{أ}}$) ($\overline{\text{أ}}$ + $\overline{\text{جـ}}$ − $\overline{\text{ب}}$) ($\overline{\text{أ}}$ + $\overline{\text{ب}}$ − $\overline{\text{جـ}}$)

وحيث أن : ٢ ل = $\overline{\text{ب}}$ + $\overline{\text{جـ}}$ + $\overline{\text{أ}}$ (حيث ل نصف محيط المثلث)

∴ ١٦ م^{٢} = ٢ ل (٢ ل − ٢$\overline{\text{أ}}$) (٢ ل − ٢ $\overline{\text{ب}}$) (٢ ل − ٢ $\overline{\text{جـ}}$)

= ١٦ ل (ل − $\overline{\text{أ}}$) (ل − $\overline{\text{ب}}$) (ل − $\overline{\text{جـ}}$)

∴ م^{٢} = ل (ل − $\overline{\text{أ}}$) (ل − $\overline{\text{ب}}$) (ل − $\overline{\text{جـ}}$)

∴ م = $\sqrt{\text{ل (ل − } \overline{\text{أ}} \text{) (ل − } \overline{\text{ب}} \text{) (ل − } \overline{\text{جـ}} \text{)}}$.

مثال (٩ – ٢٥)

أوجد مساحة المثلث أ ب جـ الذي فيه $\overline{\text{أ}}$ = ٨سم ، $\overline{\text{ب}}$ = ١٠سم ، $\overline{\text{جـ}}$ = ١٢سم .

الحـــل :

٢ ل = $\overline{\text{أ}}$ + $\overline{\text{ب}}$ + $\overline{\text{جـ}}$ = ٣٠سم .

∴ ل = ١٥ سم .

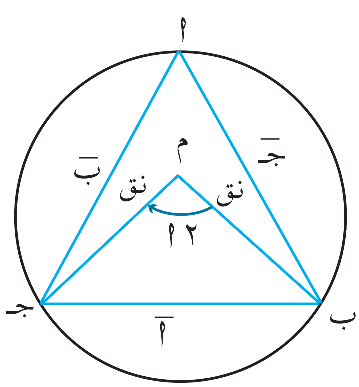
∴ مساحة المثلث = $\sqrt{\text{ل (ل − } \overline{\text{أ}} \text{) (ل − } \overline{\text{ب}} \text{) (ل − } \overline{\text{جـ}} \text{)}}$ = $\sqrt{\text{١٥ × ٧ × ٥ × ٣}}$ = $\sqrt{\text{١٥٧٥}}$ ≈ ٣٩,٧سم^{٢} .

٤ ■ طول نصف قطر الدائرة المرسومة خارج مثلث :

مبرهنة (٩ – ٢)

نصف قطر الدائرة المرسومة خارج مثلث يساوي طول أي ضلع في المثلث مقسوماً على ضعف جيب الزاوية المقابلة لهذا الضلع . أي أن :

نق = $\dfrac{\overline{\text{أ}}}{\text{٢جا أ}}$ = $\dfrac{\overline{\text{ب}}}{\text{٢جا ب}}$ = $\dfrac{\overline{\text{جـ}}}{\text{٢جا جـ}}$



الشكل (٩ – ١٠)

البرهــان :

في الشكل (٩ – ١٠) ق (∡ ب م جـ) = ٢أ (لماذا ؟)

∵ $\overline{\text{أ}}^{٢}$ = $\overline{\text{ب}}^{٢}$ + $\overline{\text{جـ}}^{٢}$ − ٢ $\overline{\text{ب}}$ $\overline{\text{جـ}}$ جتا أ

في المثلث ب م جـ

$\overline{\text{أ}}^{٢}$ = نق^{٢} + نق^{٢} − ٢ نق . نق جتا ٢أ = ٢ نق^{٢} − ٢ نق^{٢} جتا ٢أ = ٢ نق^{٢} (١ − جتا ٢أ)

ولكن جتا ٢ أ = (١ – ٢ جا^{٢} أ)

∴ $\overline{أ}^{٢}$ = ٢ نق^{٢} [١ – (١ – ٢ جا^{٢} أ)]

⟸ $\overline{أ}^{٢}$ = ٤ نق^{٢} جا^{٢} أ

⟸ $\overline{أ}$ = ٢ نق جا أ

∴ نق = $\frac{\overline{أ}}{\text{٢ جا أ}}$

∵ $\frac{\overline{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\overline{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\overline{جـ}}{\text{جا جـ}}$

∴ نق = $\frac{\overline{أ}}{\text{٢ جا أ}} = \frac{\overline{ب}}{\text{٢جا ب}} = \frac{\overline{جـ}}{\text{٢جا جـ}}$ هـ . ط . ث .

مثال (٩ – ٢٦)

أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث أ ب جـ الذي فيه $\overline{أ}$ = ١٧سم ، $\overline{ب}$ = ٢٠سم ، $\overline{جـ}$ = ٢٩سم .

الحــــل :

$\overline{أ}^{٢}$ = $\overline{ب}^{٢}$ + $\overline{جـ}^{٢}$ – ٢ $\overline{ب}$ $\overline{جـ}$ جتا أ

∴ جتا أ = $\frac{\overline{ب}^{٢} + \overline{جـ}^{٢} - \overline{أ}^{٢}}{\text{٢ } \overline{ب}\ \overline{جـ}} = \frac{٤٠٠ + ٨٤١ - ٢٨٩}{٢ \times ٢٠ \times ٢٩} = \frac{٩٥٢}{١١٦٠}$ = ٠,٨٢

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن: أ ≈ ٣٥ْ

∴ طول نصف قطر الدائرة (نق) ≈ $\frac{\overline{أ}}{\text{٢ جا أ}} = \frac{١٧}{\text{٢ جا ٣٥ْ}} = \frac{١٧}{١,١٤}$ ≈ ١٥سم .

ثانياً : حالات حل المثلث :

هناك ثلاث حالات لحل المثلث هي :

١ ■ حل المثلث بمعلومية زاويتين وضلع :

مثال (٩ – ٢٧)

حل المثلث أ ب جـ ، الذي فيه : جـ = ٥٠ْ ، ب = ٧٥ْ ، $\overline{ب}$ = ٨سم .

الحــــل :

أ = ١٨٠ْ – (٥٠ْ + ٧٥ْ) = ٥٥ْ .

$$\frac{\overline{\text{أ}}}{\text{جا أ}} = \frac{\overline{\text{ب}}}{\text{جا ب}} = \frac{\overline{\text{جـ}}}{\text{جا جـ}} \Longleftarrow \frac{\overline{\text{أ}}}{\text{جا }٥٥^\circ} = \frac{٨}{\text{جا }٧٥^\circ} = \frac{\overline{\text{جـ}}}{\text{جا }٥٠^\circ}$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن :

$$\frac{\overline{\text{أ}}}{٠,٨٢} = \frac{٨}{٠,٩٦} \Longleftarrow \overline{\text{أ}} = \frac{٨ \times ٠,٨٢}{٠,٩٦} = \frac{٦,٥٦}{٠,٩٦} \approx ٦,٨\text{سم}$$

$$\frac{\overline{\text{جـ}}}{٠,٧٧} = \frac{٨}{٠,٩٦} \Longleftarrow \overline{\text{جـ}} = \frac{٨ \times ٠,٧٧}{٠,٩٦} = \frac{٦,١٦}{٠,٩٦} \approx ٦,٤\text{سم} \;.$$

٢ ■ حل المثلث بمعلومية ضلعين وزاوية :

مثال (٩ – ٢٨)

حل المثلث أ ب جـ ، الذي فيه : $\overline{\text{أ}} = ١٢$سم ، $\overline{\text{ب}} = ١٥$سم ، جـ $= ٨٠^\circ$.

الحـــل :

$$\overline{\text{جـ}}^٢ = \overline{\text{أ}}^٢ + \overline{\text{ب}}^٢ - ٢\,\overline{\text{أ}}\,\overline{\text{ب}} \text{ جتا جـ} = ١٤٤ + ٢٢٥ - ٢ \times ١٢ \times ١٥ \text{ جتا } ٨٠^\circ$$

$$= ١٤٤ + ٢٢٥ - ٣٦٠ \times ٠,١٧ = ٣٠٧,٨$$

$$\therefore \overline{\text{جـ}} = \sqrt{٣٠٧,٨} = ١٧,٥٤\text{سم}$$

$$\because \frac{\overline{\text{أ}}}{\text{جا أ}} = \frac{\overline{\text{ب}}}{\text{جا ب}} = \frac{\overline{\text{جـ}}}{\text{جا جـ}}$$

$$\therefore \text{جا أ} = \frac{\overline{\text{أ}}\text{ جا جـ}}{\overline{\text{جـ}}} = \frac{١٢ \times ٠,٩٨}{١٧,٥٤} \approx ٠,٦٧$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن : أ $\approx ٤٢^\circ$

$\therefore$ ب $= ١٨٠^\circ - (٨٠^\circ + ٤٢^\circ) = ٥٨^\circ$.

٣ ■ حل المثلث بمعلومية أضلاعه الثلاثة :

مثال (٩ – ٢٩)

حل المثلث أ ب جـ ، الذي فيه : $\overline{\text{أ}} = ٨$سم ، $\overline{\text{ب}} = ٦$سم ، $\overline{\text{جـ}} = ٤$سم .

الحـــل :

$$\because \overline{\text{أ}}^٢ = \overline{\text{ب}}^٢ + \overline{\text{جـ}}^٢ - ٢\,\overline{\text{ب}}\,\overline{\text{جـ}} \text{ جتا أ}$$

$$\therefore \text{جتا أ} = \frac{\overline{\text{ب}}^٢ + \overline{\text{جـ}}^٢ - \overline{\text{أ}}^٢}{٢\,\overline{\text{ب}}\,\overline{\text{جـ}}} = \frac{٣٦ + ١٦ - ٦٤}{٢ \times ٦ \times ٤} = \frac{-١٢}{٤٨} = \frac{-١}{٤} = -٠,٢٥ \;.$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن : أ $\approx ١٠٤,٥^\circ$

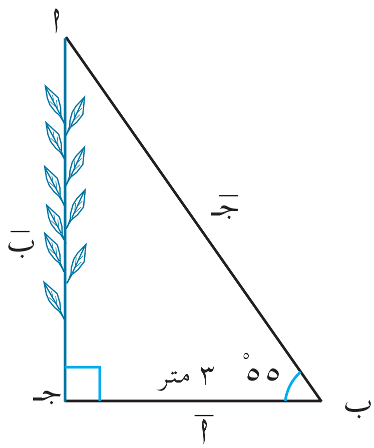
$\overline{\text{ب}}^{٢} = \overline{\text{أ}}^{٢} + \overline{\text{جـ}}^{٢} - ٢\,\overline{\text{أ}}\,\overline{\text{جـ}}\ \text{جتا ب} \Leftarrow \text{جتا ب} = \dfrac{\overline{\text{أ}}^{٢} + \overline{\text{جـ}}^{٢} - \overline{\text{ب}}^{٢}}{٢\,\overline{\text{أ}}\,\overline{\text{جـ}}} = \dfrac{٦٤ + ١٦ - ٣٦}{٢ \times ٨ \times ٤} = ٠,٦٨٧٥$

$\therefore$ ب $\approx$ ٤٦,٥° $\Leftarrow$ جـ = ٢٩° .

ثالثاً : تطبيقات على حل المثلث :

مثال (٩ – ٣٠)

ظل شجـرة على المستـوى الأفقـي المار بقاعدتهـا يساوى ٣متر ، أوجد ارتفاعها إذا كانت زاوية ارتفاع الشجرة تساوى ٥٥° .



الشكل (٩ – ١١)

الحــــل :

نفرض أن ارتفاع الشجرة = $\overline{\text{ب}}$

$\because$ جـ = ٩٠° ، ب = ٥٥° ،

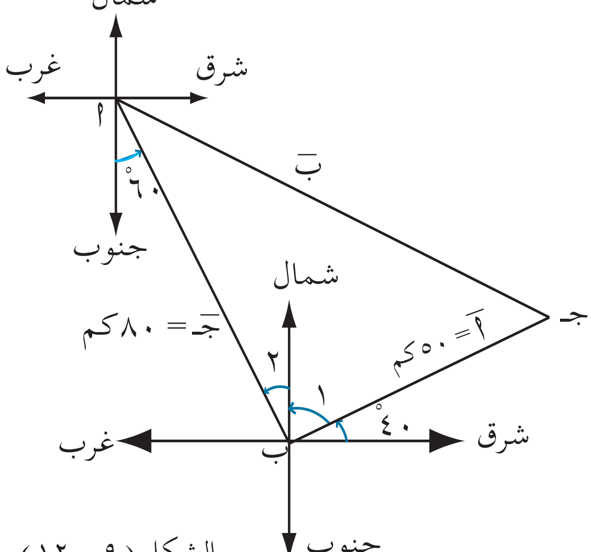
$\overline{\text{أ}}$ = ٣ متر

$\text{ظا ب} = \dfrac{\overline{\text{ب}}}{\overline{\text{أ}}}$

$\overline{\text{ب}} = \overline{\text{أ}}$ ظا ب = ٣ × ١,٤٣ = ٤,٢٩ متر .

مثال (٩ – ٣١)

تحركت باخرة من الميناء أ بالاتجاه ٦٠° جنوب شرقي ، وبعد أن قطعت مسافة ٨٠كم ، وصلت إلى نقطة لتكن (ب) ، ثم غيّرت اتجاهها بزاوية مقدارها ٤٠° شمال الشرق ، وتوقفت عند الميناء جـ . فإذا كانت المسافة بين ب ، جـ تساوى ٥٠ كم . احسب المسافة بين أ ، جـ .



الشكل (٩ – ١٢)

الحــــل :

[انظر الشكل (٩ – ١٢)] .

ق($\measuredangle$ ١) = ٩٠° – ٤٠° = ٥٠° .

ق($\measuredangle$ ٢) = ٦٠° .

$\therefore$ ق($\measuredangle$ أ ب جـ) = ٥٠° + ٦٠° = ١١٠° .

وحيث أن البعد بين أ ، جـ هو $\overline{\text{ب}}$.

$\because \overline{\text{ب}}^{٢} = \overline{\text{أ}}^{٢} + \overline{\text{جـ}}^{٢} - ٢\,\overline{\text{أ}}\,\overline{\text{جـ}}$ جتا ب .

$= (٥٠)^{٢} + (٨٠)^{٢} - ٢ \times ٥٠ \times ٨٠$ جتا ١١٠° .

$\overline{\text{ب}}^{٢} \approx ١١٦٣٦$.

$\therefore \overline{\text{ب}} \approx \sqrt{١١٦٣٦} \approx ١٠٨$كم .

تمارين ومسائل (٩-٦)

[١] احسب قياسات زوايا المثلث أ ب جـ ، إذا علمت أن : $\overline{\text{أ}}$ = ١٣سم ، $\overline{\text{ب}}$ = ٧سم ، $\overline{\text{جـ}}$ = ١٠سم .

[٢] احسب قياسات زوايا المثلث أ ب جـ الذي فيه : $\overline{\text{أ}} = \sqrt{3} + 1$ ، $\overline{\text{ب}} = \sqrt{6}$ ، $\overline{\text{جـ}} = 2$

[٣] حل المثلث أ ب جـ في كل مما يلي :

أ) $\overline{\text{أ}}$ = ١٢ ، ب = °٦٠ ، جـ = °٤٥ ،

ب) $\overline{\text{جـ}}$ = ٩ ، ب = °٤٠ ، أ = °٧٥ ،

جـ) $\overline{\text{أ}}$ = ٢٤ ، $\overline{\text{ب}}$ = ١٣ ، $\overline{\text{جـ}}$ = ١٥ ،

د) $\overline{\text{أ}}$ = ١٦ ، $\overline{\text{ب}}$ = ١١ ، $\overline{\text{جـ}}$ = ٨ ،

هـ) $\overline{\text{أ}}$ = ٢٠ ، $\overline{\text{ب}}$ = ٨ ، أ = °١١٧ ،

و) $\overline{\text{أ}} = 2\sqrt{2}$ ، $\overline{\text{ب}}$ = ٢ ، جـ = °٤٥ .

[٤] باستخدام الآلة الحاسبة . أوجد قيم :

أ) جا °٢٤٠ ، ب) جتا °٨٠ ، جـ) جتا -°٥٥

د) ظا °٣٢ ، هـ) جا -°٢٣٠ ، و) ظا °٣٦٠ .

[٥] أثبت أنه لايمكن رسم المثلث أ ب جـ الذي فيه : $\overline{\text{أ}}$ = ٥سم ، $\overline{\text{ب}}$ = ٨سم ، أ = °٤٠ .

[٦] احسب مساحة المثلث أ ب جـ الذي فيه : $\overline{\text{أ}}$ = ٨سم ، $\overline{\text{ب}}$ = ٧سم ، $\overline{\text{جـ}}$ = ٥سم .

[٧] إذا كان أ ب جـ مثلثاً ، أطوال أضلاعه هي : $\overline{\text{أ}}$ = ٥ ، $\overline{\text{ب}} = 2\sqrt{5}$ ، $\overline{\text{جـ}} = \sqrt{15}$ ، فأثبت أن :
٨ جتا أ جتا جـ = ٣ جتا ب .

[٨] في المثلث أ ب جـ : $\overline{\text{أ}}$ = ١٢ ، $\overline{\text{ب}}$ = ١٥ ، $\overline{\text{جـ}}$ = ١٧ ، احسب مساحة المثلث ، ونصف قطر الدائرة المحيط به .

[٩] أ ب جـ مثلث فيه : $\overline{\text{أ}} = \sqrt{3}$ ، $\overline{\text{ب}} = \sqrt{2}$ ، $\overline{\text{جـ}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1)$ ، احسب :

أ) قياسات زوايا هذا المثلث ، ب) نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث .

[١٠] المثلث أ ب جـ فيه $\overline{\text{ب}} = \overline{\text{جـ}} = \sqrt{2}$ متر ، ومساحته $\frac{1}{2}$ متر مربع ؛ أوجد أ .

[١١] سلّم طوله ٤ متر ، وضع مرتكزاً بطرفه الأسفل على الأرض ، وبطرفه العلوي على حائط ، وكان قياس زاويته مع الأرض °٧٥ . فإذا أزيح طرفه الأسفل على الأرض نحو الحائط بمقدار ٢٠سم . فما مقدار المسافة التي يرتفع طرفه العلوي على الحائط .

[١٢] أراد شخص أن يقيس عرض نهر فحدد نقطتين أ ، جـ متقابلتين على ضفتي النهر بحيث يكون المستقيم الواصل بينهما عمودياً على ضفتي النهر ثم سار على حافة النهر مسافة ٤٢ متراً حتى وصل إلى النقطة ب ، ثم قاس زاوية جـ ب أ ، فوجدها °٣٥ . أوجد عرض النهر ؟

[١٣] شجرتان ارتفاع كل منهما ٧,٥ متر ، والمسافة بينهما ١٥ متراً .أخذت النقطة م على المستقيم الواصل بين موقعيهما ، وبحيث كانت على بعد ٥ متر من إِحدى الشجرتين ، أوجد زاويتي ارتفاع قمتي الشجرتين من النقطة م .

[١٤] أبحرت باخرة من الميناء أ بالاتجاه ٨٠° شمال غربي بسرعة ٤٠ كم/ساعة ، وبعد مرور ٣ ساعات من بدء حركتها وصلت إِلى نقطة ب ، ثم غيّرت اتجاهها وسارت بزاوية ٧٠° اتجاه الجنوب الغربي حتى وصلت إِلى النقطة جـ التي تقع بزاوية قدرها ٤٠° جنوب غرب النقطة أ . أوجد بعد النقطة جـ عن الميناء أ .

[١٥] تمثل النقطة أ قمة مئذنة ، ب قاعدتها ، والنقطتان ل ، ك في المستوى الافقي لقاعدة المئذنة ، والمسافة بين ل ، ك تساوى ٢٧ √٢ متر ؛ فإِذا كانت ل واقعة جنوب المئذنة وتقع ك باتجاه الجنوب الشرقي بزاوية قدرها ٣٠° بالنسبة للمئذنة ، ق(∡ ل ك ب) = ٤٥° . أوجد ارتفاع المئذنة مع العلم أن قياس زاوية ارتفاع المئذنة من النقطة ل تساوى ٣٠° .

الوحدة العاشرة　الإحصاء والاحتمالات

١٠ – ١　مراجعة

درست سابقاً مقاييس النزعة المركزية والتشتت ، وفي هذه الوحدة ستتعرف على الارتباط والانحدار وبعض المبادئ الأولية في الاحتمالات ؛ ويتطلّب الأمر هنا أن تتذكر مجموعة من المفاهيم والقوانين التي سبق وأن درستها .

الانحراف المتوسط :

هو مقياس من مقاييس التشتت ويستدل منه على الشكل الذي تتوزع به المشاهدات حول متوسطها الحسابي، وفي الحقيقية إن هذا المقياس يستخدم لقياس التباين . وعند دراستنا للإحصاء نحتاج أحياناً إلى إجراء بعض التحويلات الخطية على العلامات الخام والتعبير عنها بصورة أخرى .

ويتم حساب الانحراف المتوسط بأخذ القيم المطلقة للعلامات الانحرافية ، وفق القاعدة التالية :

$|ح_ر| = |س_ر - \bar{س}|$ حيث $س_ر$ تمثل المشاهدات الأصلية ، $\bar{س}$ تمثل المتوسط الحسابي للمشاهدات ، ثم نوجد المتوسط الحسابي لهذه الانحرافات المطلقة فيكون هذا المتوسط الناتج لكل الانحرافات هو متوسط انحرافات المشاهدات عن متوسطها الحسابي وعادةً ما يرمز له بالرمز « $\bar{ح}$ » :

$$\bar{ح} = \frac{مجـ |ح_ر|}{ن}$$ حيث « ن » تمثل عدد المشاهدات ــــــ(١٠ – ١)

وكلما صغرت قيمة هذا المتوسط كلما اقتربت المشاهدات من متوسطها الحسابي وكلما كبرت ابتعدت عنه .

وهذا المتوسط يعتبر بمثابة دليل أو مؤشر على قرب (أو ابتعاد) المشاهدات عن متوسطها الحسابي .

وتستخدم العلاقة (١٠ – ١) للقيم المفردة ،أما في حالة التوزيعات التكرارية المجدولة في فئات فأننا نوجد متوسط الانحراف باستخدام العلاقة التالية :

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر \times س_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر}$$

حيث $س_ر$ = مركز الفئة ، $ك_ر$ = التكرار المقابل لكل فئة .

$$\boxed{\bar{ح} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر |ح_ر|}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر}}$$ ــــــ(١٠ – ٢)

التباين :

هو مجموع مربعات انحرافات المشاهدات عن متوسطها الحسابي مقسوماً على عددها (ن) مطروحاً منه واحد .

ويمكن كتابة هذا التعريف بشكل رمزي على النحو التالي :

$$ع^{2} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_{ر} - \bar{س})^{2}}{ن - 1} \quad \text{———} (١٠ - ٣)$$

حيث : $ع^{2}$ = التباين .

وإذا كانت الدراسة للمجتمع كله (عدده كبير نسبياً)فيقسم مجموع المربعات على « ن » بدلاً من (ن – ١) .

لاحظ أن التباين يكون دوماً موجباً لأنه ناشئ عن مجموع مربعات ، ووحدة قياسه هي مربع الوحدة المستخدمة في البيان الإحصائي الأصلي .

وتستخدم هذه العلاقة عندما يكون المطلوب إيجاد التباين للقيم المفردة من البيانات ، أمَّا إذا كان المطلوب إيجاد التباين عن طريق المتوسط الحسابي لبيانات مجدولة في فئات فنستخدم العلاقة التالية :

$$ع^{2} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_{ر} - \bar{س})^{2} \times ك_{ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_{ر}} \quad \text{———} (١٠ - ٤)$$

وفي حالة ما يكون المطلوب إيجاد التباين لبيانات مجدوله في فئات من خلال العلامات الخام نستخدم العلاقة التالية:

$$ع^{2} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_{ر}\, س_{ر}^{2}}{ن} - \left(\frac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_{ر} \times س_{ر}}{ن} \right)^{2} \quad \text{———} (١٠ - ٥)$$

الانحراف المعياري :

يعتبر هذا المقياس من أهم مقاييس التشتت لما له من فوائد كبيرة في المقارنات الإحصائية بين المجتمعات أو في الاستنتاجات الإحصائية المنبثقة عن فحص الفرضيات ، وهو يشير إلى مدى تقارب وتباعد البيانات عن متوسطها الحسابي . ويعرف الانحراف المعياري بأنه الجذر التربيعي الموجب للتباين ويرمز له عادة بالرمز « ع » أي :

$$ع = \sqrt{\text{التباين}} = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_{ر} - \bar{س})^{2}}{ن - 1}} \quad \text{———} (١٠ - ٦)$$

وتستخدم هذه العلاقة في إيجاد الانحراف المعياري من خلال استخدام المتوسط الحسابي لمجموعة من البيانات المفردة وإذا أردنا ايجاد الانحراف المعياري لمجموعة من البيانات باستخدام العلامات الخام للقيم المفردة نستخدم العلاقة التالية :

$$ع = \frac{1}{ن} \left[\sqrt{ن \sum_{ر=1}^{ن} س_{ر}^{2} - (\sum س_{ر})^{2}} \right] \quad \text{———} (١٠ - ٧)$$

وإذا كانت البيانات مجدولة في فئات نوجد الانحراف المعياري من خلال المتوسط الحسابي باستخدام العلاقة التالية :

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{د} (س_ر - \bar{س})^2 \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{د} ك_ر}} \quad \text{———} (١٠ - ٨)$$

وأخيراً إذا اردنا إيجاد الانحراف المعياري لبيانات مجدوله في فئات من خلال العلامات الخام نستخدم العلاقة التالية :

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{د} ك_ر \times س_ر^2}{د} - \left(\frac{\sum_{ر=1}^{د} ك_ر \times س_ر}{د}\right)^2} \quad \text{———} (١٠ - ٩)$$

مثال (١٠ - ١)

لتكن درجات خمسة طلاب في أحد الاختبارات التحصيلية لمادة الأحصاء هي :

٧ ، ٤ ، ٣ ، ٥ ، ٦ (الدرجة من ١٠)

أوجد : ■١ الانحراف المتوسط . ■٢ التباين . ■٣ الانحراف المعياري .

الحـــل :

■١ $\bar{س} = \frac{٧ + ٤ + ٣ + ٥ + ٦}{٥} = ٥$

$$\sum_{ر=1}^{٥} |ح_ر| = |٧ - ٥| + |٤ - ٥| + |٣ - ٥| + |٥ - ٥| + |٦ - ٥|$$

$$= |٢| + |-١| + |-٢| + |٠| + |١|$$

$$= ٢ + ١ + ٢ + ٠ + ١ = ٦$$

$$\therefore \sum_{ر=1}^{٥} |ح_ر| = ٦$$

$$\therefore \text{الانحراف المتوسط} \quad \bar{ح} = \frac{\sum_{ر=1}^{د} |ح_ر|}{د} = \frac{٦}{٥} = ١,٢$$

■٢ التباين $ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{د} (س_ر - \bar{س})^2}{د - ١}$

$$\therefore\ \text{ع}^{2} = \frac{\sum_{\text{د}=1}^{5}\left[(\text{٧} - \text{٥})^{2} + (\text{٤} - \text{٥})^{2} + (\text{٣} - \text{٥})^{2} + (\text{٥} - \text{٥})^{2} + (\text{٦} - \text{٥})^{2}\right]}{\text{٥} - \text{١}}$$

$$= \sum_{\text{د}=1}^{5} \frac{(\text{٤} + \text{١} + \text{٤} + \text{٠} + \text{١})}{\text{٤}} = \frac{\text{١٠}}{\text{٤}} = \text{٢,٥}$$

$\therefore$ ع^{2} = ٢,٥ .

٣■ $\because$ الانحراف المعياري ع = $\sqrt{\text{التباين}}$

$\therefore$ ع = $\sqrt{\text{٢,٥}}$ = ١,٦

مثال (١٠ – ٢)

الجدول التكراري التالي(١٠ – ١ أ) يبيِّن أعمار ٣٠ معلماً .

جدول (١٠ – ١ أ)

الفئات العمرية بالسنوات	٣٥– ٣٧	٣٨–٤٠	٤١– ٤٣	٤٤–٤٦	٤٧–٤٩	٥٠–٥٢	٥٣–٥٥	٥٦–٥٨	٥٩–٦١
التكرارات (ك$_{ر}$)	١	٣	٤	٧	٥	٤	٣	٢	١

أوجد : ١■ المتوسط الحسابي
٢■ الانحراف المتوسط .
٣■ التباين .
٤■ الانحراف المعياري .

الحــــل :

نكوّن جدول (١٠ – ١ب) الآتي :

جدول (١٠ – ١ب)

الفئات	التكرار ك$_{ر}$	مراكز الفئات س$_{ر}$	س$_{ر}^{2}$	ك$_{ر}$ × س$_{ر}$	ك$_{ر}$ × س$_{ر}^{2}$	|ح$_{ر}$| = |س$_{ر}$ – $\bar{\text{س}}$|	ك$_{ر}$ × |ح$_{ر}$|
٣٥ – ٣٧	١	٣٦	١٢٩٦	٣٦	١٢٩٦	١١,٢	١١,٢
٣٨ – ٤٠	٣	٣٩	١٥٢١	١١٧	٤٥٦٣	٨,٢	٢٤,٦
٤١ – ٤٣	٤	٤٢	١٧٦٤	١٦٨	٧٠٥٦	٥,٢	٢٠,٨
٤٤ – ٤٦	٧	٤٥	٢٠٢٥	٣١٥	١٤١٧٥	٢,٢	١٥,٤
٤٧ – ٤٩	٥	٤٨	٢٣٠٤	٢٤٠	١١٥٢٠	٠,٨	٤,٠٠
٥٠ – ٥٢	٤	٥١	٢٦٠١	٢٠٤	١٠٤٠٤	٣,٨	١٥,٢
٥٣ – ٥٥	٣	٥٤	٢٩١٦	١٦٢	٨٧٤٨	٦,٨	٢٠,٤
٥٦ – ٥٨	٢	٥٧	٣٢٤٩	١١٤	٦٤٩٨	٩,٨	١٩,٦
٥٩ – ٦١	١	٦٠	٣٦٠٠	٦٠	٣٦٠٠	١٢,٨	١٢,٨
المجموع	٣٠			١٤١٦	٦٧٨٦٠		١٤٤

١ ■ المتوسط الحسابي : $\bar{س} = \frac{مجـــك_ر \times س_ر}{مجـــك_ر} = \frac{١٤١٦}{٣٠} = ٤٧,٢$

٢ ■ الانحراف المتوسط : $\bar{ح} = \frac{مجـــك_ر \times |ح_ر|}{مجـــك_ر} = \frac{١٤٤}{٣٠} = ٤,٨$

٣ ■ التباين : $ع^٢ = \frac{مجـك_ر \times س_ر^٢}{ن} - \left(\frac{مجـك_ر \times س_ر}{ن}\right)^٢ = \frac{٦٧٨٦٠}{٣٠} - \left(\frac{١٤١٦}{٣٠}\right)^٢$

$= ٢٢٦٢ - ٢٢٢٧,٨٤ = ٣٤,١٦$

٤ ■ الانحراف المعياري : $ع = \sqrt{التباين} = \sqrt{٣٤,١٦} = ٥,٨$

١٠ – ٢ الارتباط وأشكال الانتشار

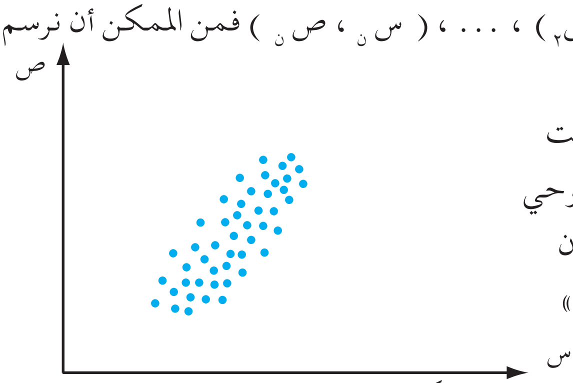
مقاييس النزعة المركزية أو مقاييس التشتت تساعد في تسفير البيانات المتعلقة بمتغير واحد، ولكن هناك ظواهر لا تقتصر دراستها على متغير واحد، بل تتعدى ذلك إلى معالجة البيانات المتعلقة بمتغيرين أو أكثر مرتبطين بتلك الظاهرة، حيث يؤدي التغير في أحدهما إلى تغير في الآخر، ومن بين هذه الظواهر: طول الفرد ووزنه، أو العلاقة بين الإنفاق الكلي للأسرة ، والإنفاق على مجموعة معينة من السلع ، . . . وما شابه ذلك من علاقات في شتى مجالات الحياة .

أولاً : أشكال الانتشار :

من السهل تكوين فكرة أولية سريعة عن اتجاه وقوة العلاقة بين متغيرين ، وذلك من خلال رسم ما يسمَّى بشكل الانتشار ، أو من خلال جدول الانتشار نفسه . وهو شكل يعبّر فيه عن كل زوج من المشاهدات المستقلة والتابعة بنقطة في مستوى ، والغرض منه هو أن نحدد (بالنظر) ما إذا كانت توجد علاقة خطية تقريبية بين المتغير التابع (ص) والمتغير المستقل (س) . وكلما كانت مجموعة النقط قريبة من خط يتوسط هذه النقط كلما كانت العلاقة بين المتغيرين قوية ، وإذا كانت النقط مبعثرة وبعيدة كانت العلاقة بين المتغيرين ضعيفة ويسمي الإحصائيون الخط الذي يتوسط النقط خط الانتشار (أو خط الانحدار) .

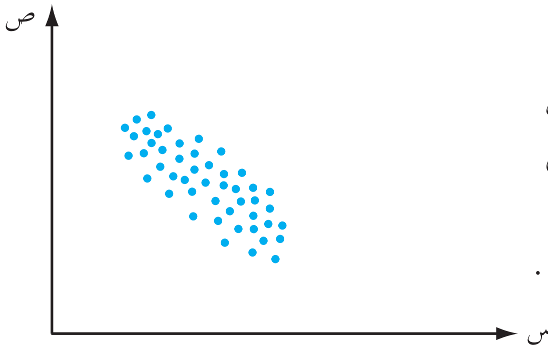
وأشكال الانتشار كثيرة ؛ وهنا فقط نتعرض للأشكال التي توافق خطوط مستقيمة ، ولمزيد من التوضيح دعنا نفترض أن لدينا أزواجا من النقط ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) ، . . . ، ($س_ن$ ، $ص_ن$) فمن الممكن أن نرسم شكل الانتشار لهذه النقط كما يلي :

١ ■ إذا كانت النقط منتشرة في شكل حزمة ذات اتجاه ثابت من اعلى اليمين إلى أدنى اليسار ، فإن مثل هذا الشكل يوحي بوجود علاقة إيجابية بين المتغيرين س ، ص ؛ حيث إن المتغير « ص » يزيد بزيادة المتغير « س » [انظر شكل (١٠ – ١)] .



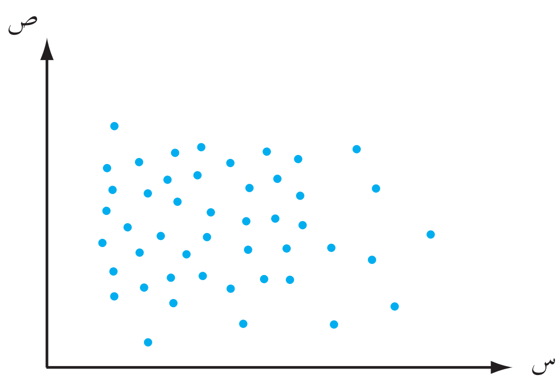
شكل (١٠ – ١) علاقة ايجابية

■٢ إذا كانت النقط منتشرة في شكل حزمة ذات اتجاه ثابت من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين ،فإن مثل هذا الشكل يوحي بوجود علاقة سلبية بين المتغيرين س ، ص ؛ حيث إن المتغير « ص » ينقص بزيادة « س » [انظر شكل(١٠ –٢)] .



شكل (١٠ – ٢)
علاقة سلبية

■٣ إذا كانت النقط منتشرة بحيث لايوجد فرق في تركزها من مكان لآخر في المستوى فإن مثل هذا الشكل يوحي بأنه لاتوجد علاقة بين المتغيرين س ، ص .
[أنظر شكل (١٠–٣)] .



شكل (١٠ – ٣)
لاتوجد علاقة بين المتغيرين

مثال (١٠ – ٣)

قام أحد المدرسين بقياس نسبة الذكاء (المتغير ص) لدى عشرة من الطلاب وتحصيلهم العلمي (المتغير س) ، وكانت درجاتهم ومستوى ذكائهم هي كما يبينها جدول (١٠ – ٢) المقابل :

المطلوب :

أ) كوِّن جدول الانتشار للمتغيرين س ، ص .

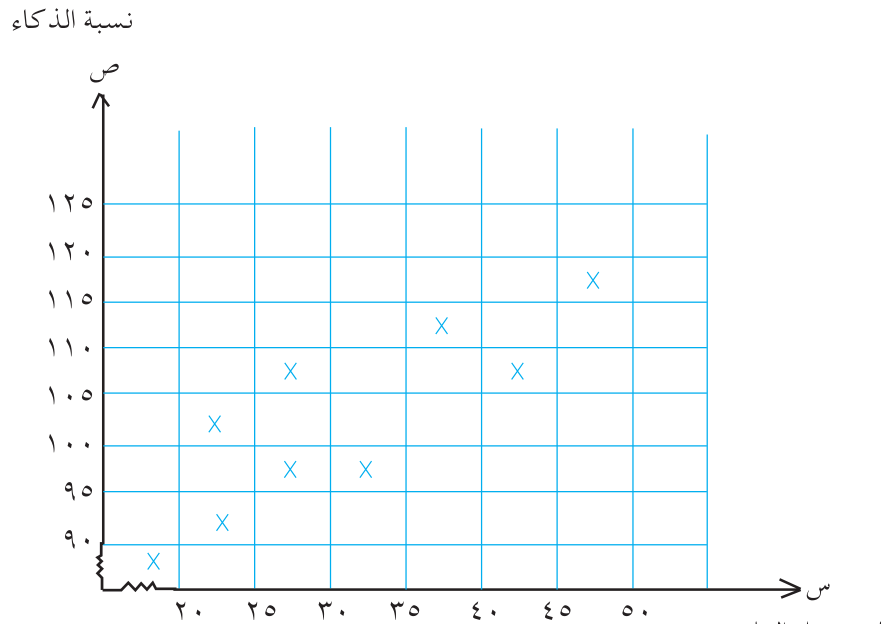
ب) ارسم شكل الانتشار للمتغيرين س ، ص .

جدول (١٠ – ٢)

رقم الطالب	ص	س
١	٩٠	٢٠
٢	٩٥	٢٥
٣	١٠٠	٣٥
٤	١٠٠	٣٠
٥	١٠٠	٣٠
٦	١١٠	٣٠
٧	١١٠	٤٥
٨	١١٥	٤٠
٩	١٢٠	٥٠
١٠	١٠٥	٢٥

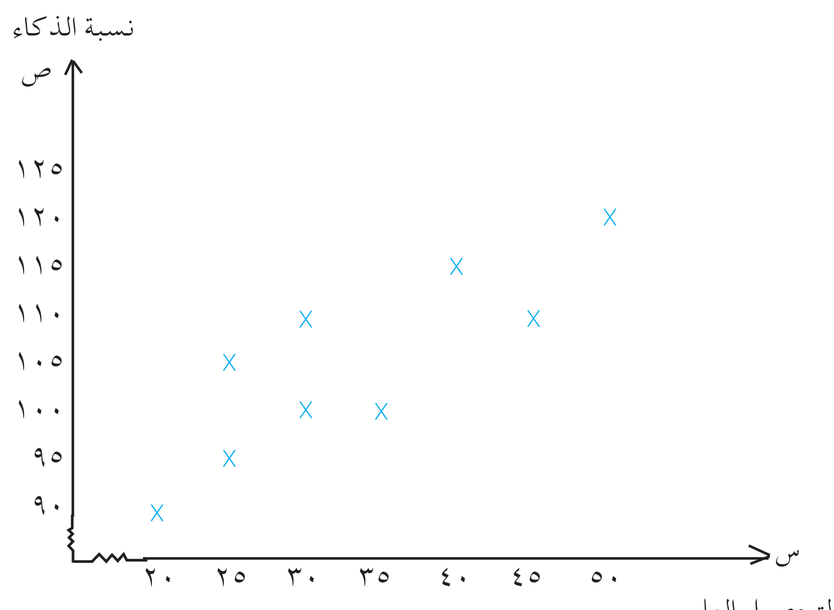
الحـــــل :

أ) يسمى شكل (١٠ – ٤) جـدول الانـتـشـار للمتغيرين س ، ص .



شكل(١٠ – ٤)

ب) يسمى شكل (١٠ – ٥) شـكل الانتشار للمتغيرين س ، ص .



شكل(١٠ – ٥)

يلاحظ مـن جـدول الانتشار شكل (١٠ – ٤) [أو من شكل الانتشار شكل (١٠ – ٥)] أن العلاقة بين المتغيرين س ، ص هي علاقة طردية (موجبة) من حيث الاتجاه ؛ أمَّا من حيث درجة ، أو قوة الارتباط بين المتغيرين فهي عادةً ما تقاس بمعامل يسمَّى معامل الارتباط .

ثانياً : الارتباط الخطي :

يقصد بالارتباط الخطي بين متغيرين أو ظاهرتين وجود علاقة بينهما بحيث إذا تغيرت أحداهما في اتجاه معين ، فإن الثانية تميل إلى التغير في الاتجاه نفسه أو الاتجاه المضاد ، مع ملاحظة أنه قد لاتوجد أية علاقة بين أي متغيرين مثل : الذكاء ولون العيون ، أو الذكاء والنوع . وانعدام العلاقة بين متغيرين يعنى أن معرفتنا باتجاه أحد المتغيرين وقيمته لاتساعدنا بحال من الأحوال على التنبؤ باتجاه المتغير الآخر ، أو قيمته . وعادة ماتقاس درجة الارتباط الخطي بين متغيرين بمعامل يُسمّى معامل الارتباط الخطي ، نرمز له بالرمز « ر » وعندما تكون قيمة ر = +١ فهذا يعني أن العلاقة بين المتغيرين تكون علاقة طردية تامة (ارتباط خطي موجب تام) أي تقع جميع النقط في شكل الأنتشار على خط مستقيم وعندما تكون قيمة ر = −١ فهذا يعني أن العلاقة بين المتغيرين علاقة عكسية تامة (ارتباط خطي سالب تام) أي تقع جميع النقط في شكل الانتشار على خط مستقيم ايضاً . أمَّا عندما يكون قيمة ر = ٠ فهذا يعني عدم وجود أية علاقة بين المتغيرين إطلاقاً . ونشير هنا أن قيمة « ر » لاتتجاوز واحداً صحيحاً سواء بإشارة موجبة أم بإشارة سالبة ، أي أن : $\boxed{-١ \leq ر \leq ١}$

نستنتج مما سبق أن مقاييس الارتباط تفيد في :

١ ■ تحديد مدى قوة الارتباط بين المتغيرين (قوية ، ضعيفة ، منعدمة) .

٢ ■ تحديد اتجاه العلاقة بين المتغيرين (طردية ، عكسية) .

٣ ■ إعطاء مؤشرات لإمكان تقدير المتغيرات بدلالة الآخر .

٤ ■ تعد الأساس في دراسة تحليل العلاقات السببية .

وهناك أنواع عديدة لمعاملات الارتباط أشهرها معامل « بيرسون » ، « معامل سبيرمان » .

ثالثاً : معامل بيرسون لقياس الارتباط الخطي بين متغيرين :

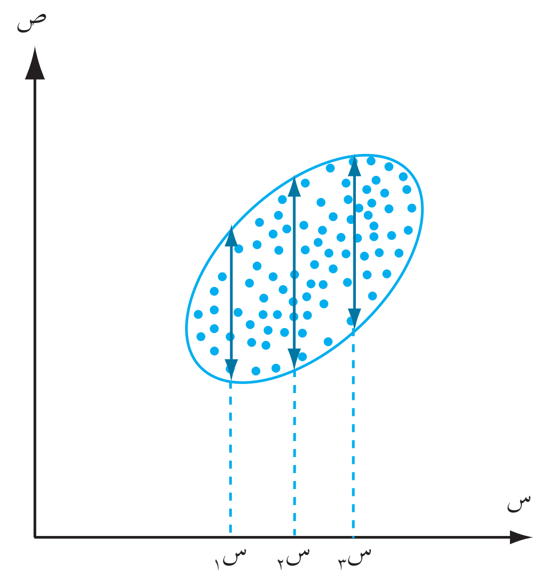
يعد هذا المعامل من أكثر معاملات الارتباط شيوعاً واستخداماً ، يتطلّب استخدامه التحقق من شرطين أساسيين هما :

١ ■ ان تكون العلاقة بين المتغيرين علاقة خطية ، أي تقع جميع النقط في شكل الانتشار على خط مستقيم ، أو تنتشر حوله .

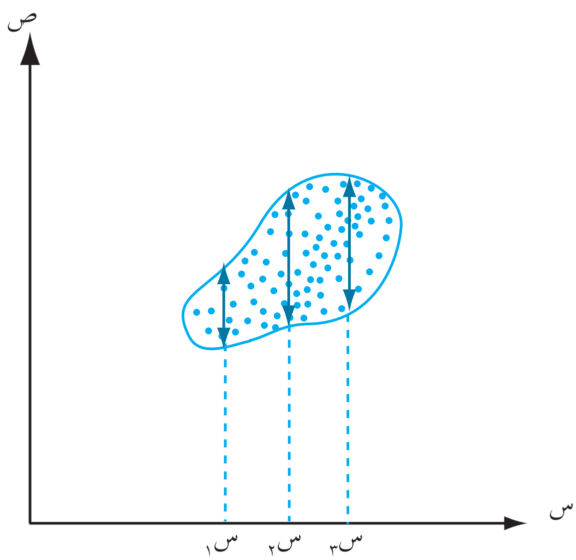
٢ ■ توفر تجانس التباين (ضيق المدى) .

ولتوضيح هذا المعنى أكثر ،دعنا نقول أنه لأية قيمة من قيم « س » نجد عدة قيم للمتغير « ص » وكل مجموعة من قيم « ص » يكون لها متوسط وتباين . وبذلك يكون لدينا عدد من التباينات في قيم « ص » بنفس عدد قيم « س » . وعند استخدام معامل بيرسون فإن هذة التباينات يفترض أن تكون متساوية ؛ أي باختصار الحالات التي لايتوفر فيها تجانس التباين يكون فيها معامل بيرسون لايعبر عن العلاقة الموجودة فعلاً بين المتغيرين ، فهو يصغرها بالرغم من كونها قوية في المناطق التي يقل فيها التباين ويبالغ فيها بالرغم من كونها ضعيفة في المناطق التي يزداد فيها التباين ، وذلك لأنه يأخذ بعين الأعتبار متوسط القيم ، وشكل (١٠ −٦) يوضح حالتين لايتوفر فيها تجانس التباين وحالة واحدة يتوفر فيها ذلك التجانس .

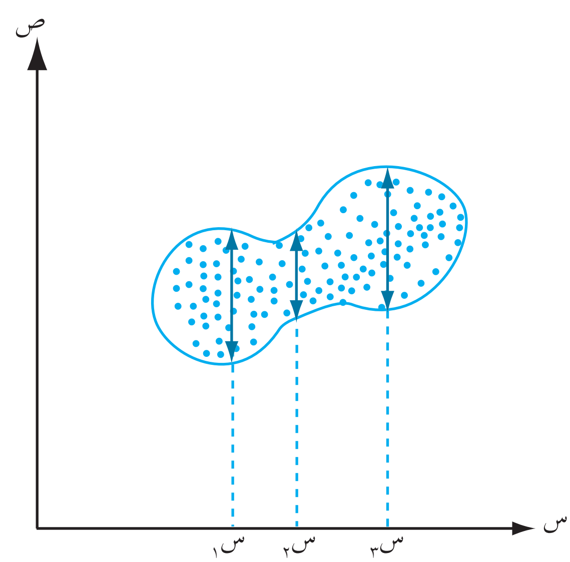
شكل (١٠ –٦) : رسوم توضيحية لتباين « ص » عند قيم مختلفة للمتغير « س »



(أ)



(ب)



(جـ)

شكل(١٠ – ٦)

الشكل (أ) يمثل تجانس التباين ، والشكلان (ب) ، (جـ) يمثلان حالتين من حالات عدم التجانس .

طرق حساب معامل ارتباط بيرسون

أ) حساب معامل ارتباط بيرسون باستخدام العلامات المعيارية :

يعـرف معامـل بيرسـون بأنه متوسط مجموع ضرب كل علامتين معياريتين متناظرتين .

ويكتب رياضياً كما يلي :

$$ر = \frac{\text{مجـ } ز_{س} \times ز_{ص}}{ن} \qquad (١٠ - ١٠)$$

حيث : $ر$ = معامل بيرسون ، $ن$ = عدد أزواج المشاهدات ، $ز_{س}$ (العلامة المعيارية لقيم المتغير س) = $\frac{ح_{س}}{ع_{س}}$

$ز_{ص}$ (العلامة المعيارية لقيم المتغير ص) = $\frac{ح_{ص}}{ع_{ص}}$ ، $ح_{س} = س - \bar{س}$ ، $ع_{س} = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^{٢}}{ن}}$

$ح_{ص} = ص - \bar{ص}$ ، $ع_{ص} = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(ص - \bar{ص})^{٢}}{ن}}$

والمثال التالي يوضح عملياً كيفية حساب معامل بيرسون باستخدام العلامات المعيارية .

مثال (١٠ - ٤)

أوجد معامل بيرسون بين المتغيرين س ، ص باستخدام العلامات المعيارية من بيانات الجدول (١٠ - ٣أ) التالي :

جدول (١٠ - ٣ أ)

س	٢٠	١٨	١٦	١٥	١٤	١٢	١٢	١٠	٨	٥
ص	١٢	١٦	١٠	١٤	١٢	١٠	٩	٨	٧	٢

الحـــل : نكوّن جدول (١٠ - ٣ب) التالي :

جدول (١٠ - ٣ب)

س	ص	$ح_{س} = (س - \bar{س})$	$(س - \bar{س})^{٢}$	$ح_{ص} = (ص - \bar{ص})$	$(ص - \bar{ص})^{٢}$	$ز_{س} = \frac{ح_{س}}{ع_{س}}$	$ز_{ص} = \frac{ح_{ص}}{ع_{ص}}$	$ز_{س} \times ز_{ص}$
٢٠	١٢	٧	٤٩	٢	٤	$\frac{٧}{٤,٣} = ١,٦٢$	$\frac{٢}{٣,٧١} = ٠,٥٤$	٠,٨٧٥
١٨	١٦	٥	٢٥	٦	٣٦	١,١٦	١,٦٢	١,٨٧٩
١٦	١٠	٣	٩	٠	٠	٠,٧	٠,٠٠	٠,٠٠٠
١٥	١٤	٢	٤	٤	١٦	٠,٤٧	١,٠٨	٠,٥٠٨
١٤	١٢	١	١	٢	٤	٠,٢٣	٠,٥٤	٠,١٢٤
١٢	١٠	−١	١	٠	٠	−٠,٢٣	٠,٠٠	٠,٠٠٠
١٢	٩	−١	١	−١	١	−٠,٢٣	−٠,٢٧	٠,٠٦٢
١٠	٨	−٣	٩	−٢	٤	−٠,٧٠	−٠,٥٤	٠,٣٧٨
٨	٧	−٥	٢٥	−٣	٩	−١,١٦	−٠,٨١	٠,٩٣٩
٥	٢	−٨	٦٤	−٨	٦٤	−١,٨٦	−٢,١٦	٤,٠١٨
مجـ س = ١٣٠	مجـ ص = ١٠٠		١٨٨		١٣٨			٨,٧٨٣

$\because$ د $= ١٠$ $\therefore$ $\bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{د}} = \frac{١٣٠}{١٠} = ١٣$ ، $\bar{ص} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{د}} = \frac{١٠٠}{١٠} = ١٠$

$$ع_س = \sqrt{\frac{\text{مجـ }(س - \bar{س})^٢}{\text{د}}} = \sqrt{\frac{١٨٨}{١٠}} = \sqrt{١٨{,}٨} = ٤{,}٣$$

$$ع_ص = \sqrt{\frac{\text{مجـ }(ص - \bar{ص})^٢}{\text{د}}} = \sqrt{\frac{١٣٨}{١٠}} = \sqrt{١٣{,}٨} = ٣{,}٧١$$

$$\therefore ر = \frac{\text{مجـ } ز_س \times ز_ص}{\text{د}} = \frac{٨{,}٧٨٣}{١٠} = ٠{,}٨٧٨٣ \quad .$$

ب) حساب معامل ارتباط بيرسون باستخدام العلاقة المختزلة :

لاحظ أن حساب معامل بيرسون بالطريقة المعيارية كانت مستنفده للوقت والجهد ، وخصوصاً إذا كانت قيم المتوسطين $\bar{س}$ ، $\bar{ص}$ تحتوي على كسور ، ولهذا فكر الإحصائيون في إيجاد صيغة أخرى تسهل عملية حساب معامل ارتباط بيرسون عن طريق إجراء بعض المعالجات الجبرية للطريقة المعيارية السابقة ، وأوصلوها إلى العلاقة المختزلة التالية :

$$ر = \frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{[\text{مجـ}(س - \bar{س})^٢] \bullet [\text{مجـ}(ص - \bar{ص})^٢]}} \qquad (١٠ - ١١)$$

والمثال التالي يوضِّح عملياً كيفية حساب معامل ارتباط بيرسون باستخدام العلاقة المختزلة .

مثال (١٠ – ٥)

أوجد معامل ارتباط بيرسون بين س ، ص باستخدام العلاقة المختزلة من بيانات الجدول (١٠ – ٤أ) التالي :

جدول (١٠ – ٤ أ)

س	٥	١٠	٥	١١	١٢	٤	٣	٢	٧	١
ص	١	٦	٢	٨	٥	١	٤	٦	٥	٢

الحـــل :

نكوّن جدول (١٠ – ٤ب) التالي :

جدول (١٠ – ٤ب)

س	ص	س – س̄	(س – س̄)^٢	(ص – ص̄)	(ص – ص̄)^٢	(س – س̄)(ص – ص̄)
٥	١	–١	١	–٣	٩	+٣
١٠	٦	+٤	١٦	+٢	٤	+٨
٥	٢	–١	١	–٢	٤	+٢
١١	٨	+٥	٢٥	+٤	١٦	+٢٠
١٢	٥	+٦	٣٦	+١	١	+٦
٤	١	–٢	٤	–٣	٩	+٦
٣	٤	–٣	٩	٠	٠	٠
٢	٦	–٤	١٦	+٢	٤	–٨
٧	٥	+١	١	+١	١	+١
١	٢	–٥	٢٥	–٢	٤	+١٠
المجموع ٦٠	٤٠	صفر	١٣٤	صفر	٥٢	٤٨

$$\because \text{ن} = ١٠ \qquad \therefore \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{٦٠}{١٠} = ٦ \quad ، \quad \bar{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} = \frac{٤٠}{١٠} = ٤$$

$$\therefore \text{ر} = \frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})(\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\sqrt{[\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^٢] \bullet [\text{مجـ}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^٢]}} \qquad \therefore \text{ر} = + \frac{٤٨}{\sqrt{١٣٤ \times ٥٢}}$$

$$= + \frac{٤٨}{\sqrt{٦٩٦٨}} = +٠{,}٥٨ \; .$$

ملاحظة :

يمكن تسهيل العمل الحسابي في إيجاد معامل ارتباط بيرسون إذا ما بسطنا الأرقام بطرح قيمة ثابتة من جميع قيم « س » لنحصل على الانحرافات البسيطة للمتغير « س » ولنرمز لها بالرمز « $\text{ح}_{\text{س}}$ » وبطرح قيمة ثابتة أخرى من قيم « ص » لنحصل على الانحرافات البسيطة للمتغير « ص »ولنرمز لها بالرمز « $\text{ح}_{\text{ص}}$ » ويكون معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين س ، ص هو نفسه معامل الارتباط بين الانحرافات $\text{ح}_{\text{س}}$ ، $\text{ح}_{\text{ص}}$ أي أن :

$$\text{ر} = \frac{\text{مجـ}(\text{ح}_{\text{س}} \times \text{ح}_{\text{ص}}) - \frac{(\text{مجـ ح}_{\text{س}})(\text{مجـ ح}_{\text{ص}})}{\text{ن}}}{\sqrt{[\text{مجـ ح}^٢_{\text{س}} - \frac{(\text{مجـ ح}_{\text{س}})^٢}{\text{ن}}][\text{مجـ ح}^٢_{\text{ص}} - \frac{(\text{مجـ ح}_{\text{ص}})^٢}{\text{ن}}]}} \qquad \text{—— (١٠ – ١٢)}$$

مثال (١٠ – ٦)

الجدول (١٠ – ٥ أ) يوضِّح بيانات عن عمر الزوج (س) وعمر الزوجة (ص) لخمس أسر :

جدول (١٠ – ٥ أ)

عمر الزوج (س)	٤٠	٣٦	٥٥	٢٩	٣٩
عمر الزوجة (ص)	٣٥	٣١	٤٩	٣٠	٣٨

احسب معامل الارتباط الخطي بين س ، ص .

الحــــل :

نطبق العلاقة (١٠ – ١٢) في حل هذا المثال وذلك بطرح (٤٠) من قيم س ، (٣٥) من قيم ص لتسهيل العمل الحسابي ونكوّن جدول (١٠ – ٥ب) التالي :

جدول (١٠ – ٥ب)

س	ص	$ح_س = س - ٤٠$	$ح_ص = ص - ٣٥$	$ح_س \times ح_ص$	$ح_س^٢$	$ح_ص^٢$
٤٠	٣٥	٠	٠	٠	٠	٠
٣٦	٣١	٤–	٤–	١٦	١٦	١٦
٥٥	٤٩	١٥	١٤	٢١٠	٢٢٥	١٩٦
٢٩	٣٠	١١–	٥–	٥٥	١٢١	٢٥
٣٩	٣٨	١–	٣	٣–	١	٩
المجموع		١–	٨+	٢٧٨ +	٣٦٣	٢٤٦

$$ر = \frac{\text{مجـ}(ح_س \times ح_ص) - \frac{(\text{مجـ } ح_س)(\text{مجـ } ح_ص)}{ن}}{\sqrt{\left[\text{مجـ } ح_س^٢ - \frac{(\text{مجـ } ح_س)^٢}{ن}\right]\left[\text{مجـ } ح_ص^٢ - \frac{(\text{مجـ } ح_ص)^٢}{ن}\right]}} \quad ، \quad ن = ٥$$

$$\therefore ر = \frac{٢٧٨ - \frac{(-١)(٨)}{٥}}{\sqrt{\left[٣٦٣ - \frac{(-١)^٢}{٥}\right]\left[٢٤٦ - \frac{(٨)^٢}{٥}\right]}} = \frac{٢٧٨ + ١,٦}{\sqrt{(٣٦٣ - ٠,٢)(٢٤٦ - ١٢,٨)}}$$

$$= \frac{٢٧٩,٦}{\sqrt{٣٦٢,٨ \times ٢٣٣,٢}} = \frac{٢٧٩,٦}{\sqrt{٨٤٦٠٤,٩٦}} = ٠,٩٦ \ .$$

تمارين ومسائل (١٠-١)

[١] ليكن لدينا أزواج القياسات في الجدول (١٠ – ٦) التالي :

جدول (١٠ – ٦)

س	١١	١٣	١٥	١٩	٧
ص	٣	٤	٧	٥	١

احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص .

[٢] احسب معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين س ، ص من جدول (١٠ – ٧) التالي :

جدول (١٠ – ٧)

س	٥	٤	٦	٧	٨	١٠
ص	٢٠	٢٠	١٥	١٢	١٠	١٠

[٣] في الجدول(١٠ – ٨) بيانات الدرجات التي حصل عليها (٢٠) طالباً في مادة اللغة العربية (س) والدرجات التي حصل عليها الطلاب انفسهم في مادة التربية الإسلامية (ص) .

جدول (١٠ – ٨)

درجة اللغة العربية (س)	٥٣	٣٦	٨٨	٨٤	٨٦	٦٤	٤٥	٤٨	٣٩	٦٧	٥٤	٧٣	٦٥	٢٩	٥٢	٢٢	٧٦	٣٢	٥١	٣٧
درجة التربية الإسلامية(ص)	٤٥	٤٣	٨٩	٧٩	٨٤	٦٦	٤٩	٤٨	٤٣	٧٦	٥٩	٧٧	٥٦	٢٨	٥١	٢٧	٧٦	٣٤	٦٠	٣٢

أ) ارسم شكل الانتشار للبيانات المبينة في الجدول (١٠ – ٨) .

ب) احسب معامل الارتباط الخطي بين (س ، ص) .

[٤] إذا كانت البيانات التي في الجدول (١٠ – ٩) تمثل عدد المتقدمين للالتحاق بجامعة صنعاء (س) وعدد المقبولين فيها فعلاً (ص) خلال الأعوام (٩٤ – ٢٠٠١م) .

جدول (١٠ – ٩)

السنة	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١
عدد المتقدمين بالألف س	٤٠	٥٠	٥٥	٦٥	٧٥	٩٠	١٠٠	١١٠
عدد المقبولين بالألف ص	١٠	١٥	١٨	٢٠	٢٥	٢٧	٢٩	٣٠

أ) احسب معامل الارتباط الخطي بين عدد المتقدمين وعدد المقبولين في جامعة صنعاء.

[٧] باستخدام العلامات المعيارية للبيانات في الجدول (١٠ – ١٠) :

جدول (١٠ – ١٠)

س	١	٣	٤	٦	٨	٩	١١	١٤
ص	١	٢	٤	٤	٥	٧	٨	٩

احسب معامل الارتباط الخطي بين س ، ص .

[٨] يوضِّح الجدول (١٠ – ١١) العمر (س) وضغط الدم (ص) لاثنى عشر رجلاً .

جدول (١٠ – ١١)

العمر (س)	٥٦	٤٢	٧٢	٣٦	٦٣	٤٧	٥٥	٤٩	٣٨	٤٢	٦٨	٦٠
ضغط الدم (ص)	١٤٧	١٢٥	١٦٠	١١٨	١٤٩	١٢٨	١٥٠	١٤٥	١١٥	١٤٠	١٥٢	١٥٥

احسب معامل الارتباط الخطي بين س ، ص .

[٩] يوضِّح الجدول (١٠ – ١٢) أوزان عيِّنة مكونة من ١٢ أب (س) وأكبر الأبناء (ص) .

جدول (١٠ – ١٢)

الوزن س للأب	٦٥	٦٣	٦٧	٦٤	٦٨	٦٢	٧٠	٦٦	٦٨	٦٧	٦٩	٧١
الوزن ص للأبن	٤٥	٤٣	٣٢	٣٥	٤٢	٤٠	٥٠	٣٣	٤٧	٣٨	٤١	٥٥

أوجد معامل الارتباط الخطي بين س ، ص .

[١٠] يوضِّح الجدول (١٠ – ١٣) أول درجتين يرمز لهما بالرمزين س ، ص على الترتيب لعشرة طلاب في امتحانين قصيرين في مادة الرياضيات .

جدول (١٠ – ١٣)

درجة الامتحان الأول س	٦	٥	٨	٨	٧	٦	١٠	٤	٩	٧
درجة الامتحان الثاني ص	٨	٧	٧	١٠	٥	٨	١٠	٦	٨	٦

أ) ارسم شكل الانتشار للبيانات المبيّنة في جدول (١٠ – ١٣) .

ب) أوجد معامل الارتباط الخطي بين س ، ص .

١٠ – ٣ الانحدار الخطى

تعرف من دراستك السابقة أن المعادلة: ص = ؟ س + ب تمثل خطاً مستقيماً ؛ حيث (؟) ميل هذا المستقيم، أي ظل الزاوية التي يصنعها هذا المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، (ب) الجزء المقطوع من محور الصادات . عندما تكون قيمة س = ٠ ؛ والثابتان ؟ ، ب يحددان الخط المستقيم تماماً ، ونسمي هذه المعادلة هنا معادلة خط الانحدار (أو للتبسيط معادلة الانحدار) . يستخدم الانحدار في التنبؤ باية تقديرات تكون موضوع الدراسة والبحث .

وقد جاء مفهوم الانحدار من العالم فرنسيس جالتون الذي أطلق عليه هذا الاسم نتيجة لدراسته علاقة أطوال الأبناء بأطوال آبائهم ، ونسمي الظاهرة المراد تقدير قيمتها بالمتغير التابع ويرمز لها عادة بالرمز (ص) وتأخذ المحور الصادي، وتسمى الظاهرة الأخرى بالمتغير المستقل ويرمز لها بالرمز (س) وتأخذ عادة المحور السيني . ويمر خط الانحدار بنقطة المتوسطات أي بنقطة تقاطع متوسط المتغير المستقل (س) مع متوسط المتغير التابع (ص) أي [بالنقطة ($\bar{س}$ ، $\bar{ص}$)] . ويمكن تقسيم الانحدار حسب المتغيرات الداخلة فيه إلى نوعين :

أ) الانحدار الخطى : هو ذلك الانحدار الذي يربط بين متغيرين بعلاقة خطية ، ويتم التنبؤ بأحدهما من خلال معرفة الآخر .

ب) الانحدار المتعدد : هو ذلك الانحدار الذي يربط بين متغير تابع (ص) ، وبين متغيرين آخرين أو أكثر من المتغيرات المستقلة $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ... ، ويتم التنبؤ بأحد المتغيرات بمعرفة المتغيرات الأخرى .

وتقتصر دراستنا في هذا البند على النوع الأول فقط .

لكي نحل المعادلة: ص = ؟ س + ب يتطلب منا حساب الثابتين ؟ ، ب على أساس البيانات المتوفرة للمتغيرين س ، ص . ويسمي الإحصائيون الثابتين ؟ ، ب معاملي الانحدار . وعادة ما يكون استخراج قيمة ؟ شرطاً مسبقاً لاستخراج قيمة ب . وعندما نريد التنبؤ بقيم ص من خلال قيم س نستخدم المعادلة: ص = ؟ س + ب ،

حيث : $\boxed{؟ = \frac{ن\ مجـ (س \times ص) - (مجـ س)(مجـ ص)}{ن\ مجـ س^2 - (مجـ س)^2}}$ ——— (١٠ – ١٥) ، ب = $\bar{ص}$ – ؟ $\bar{س}$

وعندما نريد التنبؤ بقيم س من خلال قيم ص نستخدم المعادلة : س = ؟ ص + ب ؛

حيث : $\boxed{؟ = \frac{ن\ مجـ (س \times ص) - (مجـ س)(مجـ ص)}{ن\ مجـ ص^2 - (مجـ ص)^2}}$ ——— (١٠ – ١٦) ، ب = $\bar{س}$ – ؟ $\bar{ص}$

ويمكن الاستفادة من العلاقة (١٠ – ١٥) في استنباط عدة صور لقيمة ؟ من ضمنها العلاقة التالية :

$$؟ = ر \times \frac{ع_{ص}}{ع_{س}}$$

وهذه الصورة هي العلاقة بين معامل الانحدار (؟)، ومعامل الارتباط (ر) عندما يكون التنبؤ بقيم ص من

خلال قيم س . امَّا عندما يكون التنبؤ بقيم س من خلال قيم ص نستخدم العلاقة التالية :

$$ا = ر \times \frac{ع_{س}}{ع_{ص}}$$.

حيث :

ر = معامل الارتباط بين ص ، س

$ع_{س}$ = الانحراف المعياري لقيم س

$ع_{ص}$ = الانحراف المعياري لقيم ص

مثال (١٠-٧)

قام أحد المدرسين بإجراء اختبارين تحصيليين لطلاب الصف الحادي عشر العلمي : الأول (س) لمادة الرياضيات والثاني (ص) لمادة الفيزياء ؛ فإذا كان متوسط درجات الاختبار الأول هي $\bar{س}$ = ٥٠ ، والانحراف المعياري له $ع_{س}$ = ١٥ ؛ ومتوسط درجات الاختبار الثاني هي $\bar{ص}$ = ٨٠ والانحراف المعياري له $ع_{ص}$ = ٢٠ ، ومعامل الارتباط ر = ٠,٧ ؛ أوجد :

١ ■ معادلة الانحدار التي نتنبأ فيها بقيم ص باستخدام قيم س .

٢ ■ معادلة الانحدار التي نتنبأ فيها بقيم س باستخدام قيم ص .

٣ ■ درجة الطالب محمد في الفيزياء (ص) . إذا علمت أنّ درجته في الرياضيات (س) تساوي ٦٠ درجة .

الحـــل :

١ ■ $ا = ر \times \frac{ع_{ص}}{ع_{س}}$

$\therefore$ $ا = ٠,٧ \times \frac{٢٠}{١٥} = ٠,٩٣٣$

$ب = \bar{ص} - ا\bar{س}$

$\therefore$ ب = ٨٠ − ٠,٩٣٣ × ٥٠ = ٨٠ − ٤٦,٦٥ = ٣٣,٣٥

وحيث أن معادلة الانحدار التي نتنبأ فيها بقيم ص باستخدام قيم س هي :

ص = ا س + ب

$\therefore$ ص = ٠,٩٣٣ س + ٣٣,٣٥ .

٢ ■ $ا = ر \times \frac{ع_{س}}{ع_{ص}}$ ، $\therefore$ $ا = ٠,٧ \times \frac{١٥}{٢٠} = ٠,٥٢٥$

$ب = \bar{س} - ا\bar{ص}$ ،

∴ ب = ٥٠ – ٠,٥٢٥ X ٨٠ = ٥٠ – ٤٢ = ٨

وحيث ان معادلة الانحدار التي نتنبأ فيها بقيم س باستخدام قيم ص هي :

س = أ ص + ب ∴ س = ٠,٥٢٥ ص + ٨ .

■٣ لإيجاد درجة الطالب محمد في الفيزياء (ص) بالنسبة لدرجته في الرياضيات (س) تساوى ٦٠ درجة نستخدم المعادلة :

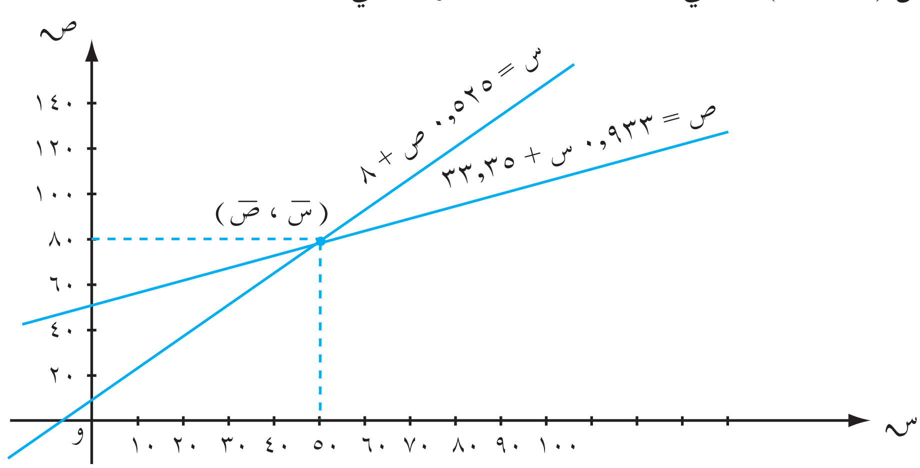
ص = ٠,٩٣٣ س + ٣٣,٣٥

∴ ص = ٠,٩٣٣ X ٦٠ + ٣٣,٣٥ = ٨٩,٣٣ درجة .

إذن درجة محمد في الفيزياء هي ٨٩,٣ درجة .

تلاحظ من المثال السابق أن هناك خطي انحدار يتقاطعان في النقطة (سَ ، صَ) = (٥٠ ، ٨٠) ؛ ويزداد انفراج الزاوية بين خطى الانحدار كلما قلّ معامل الأرتباط (ر) بين المتغيرين س ، ص ، وتصغر الزاوية بينهما كلَّما زاد معامل الارتباط بينهما بحيث ينطبقا ن على بعضهما عندما تكون العلاقة بين المتغيرين تامة .

ويوضح شكل (١٠ –٧) خطي الانحدار للبيانات الواردة في المثال السابق :



شكل(١٠ – ٧)

مثال (١٠–٨)

الجدول(١٠– ١٤ أ)يمثل الدخل الشهري(س) بآلاف الريالات،وعدد الأطفال(ص)في عيِّنة مكوِّنه من ١٢ أسرة .

جدول (١٠ – ١٤ أ)

الدخل الشهري (س)	١٥	٢٠	٣٠	١٥	٢٠	٤٠	٦٠	١٠٠	٨٠	٩٠	٥٠	٥٥
عدد الأطفال (ص)	٦	٦	٥	٥	٥	٤	٤	٦	٥	٦	٤	٣

أ) احسب معادلة الانحدار الخطي للمتغير ص على س .

ب) هل نحصل على نفس المعادلة لو أننا استخدمنا بيانات عيِّنة أخرى من ١٢ أسرة من المجتمع نفسه ، ولماذا؟

جـ) أوجد معامل الارتباط الخطى بين س ، ص .

الحـــل :

أ) لحساب معادلة الانحدار الخطى للمتغير ص على س نكوّن الجدول (١٠ – ١٤ ب) التالي :

جدول (١٠ – ١٤ ب)

س	ص	س^{٢}	ص^{٢}	(س × ص)
١٥	٦	٢٢٥	٣٦	٩٠
٢٠	٦	٤٠٠	٣٦	١٢٠
٣٠	٥	٩٠٠	٢٥	١٥٠
١٥	٥	٢٢٥	٢٥	٧٥
٢٠	٥	٤٠٠	٢٥	١٠٠
٤٠	٤	١٦٠٠	١٦	١٦٠
٦٠	٤	٣٦٠٠	١٦	٢٤٠
١٠٠	٦	١٠٠٠٠	٣٦	٦٠٠
٨٠	٥	٦٤٠٠	٢٥	٤٠٠
٩٠	٦	٨١٠٠	٣٦	٥٤٠
٥٠	٤	٢٥٠٠	١٦	٢٠٠
٥٥	٣	٣٠٢٥	٩	١٦٥
٥٧٥	٥٩	٣٧٣٧٥	٣٠١	٢٨٤٠

$$\text{أ} = \frac{\text{ن مجـ (س × ص) − (مجـ س) (مجـ ص)}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}} = \frac{١٢ \times ٢٨٤٠ - ٥٧٥ \times ٥٩}{١٢ \times ٣٧٣٧٥ - (٥٧٥)^{٢}}$$

$$\therefore \text{أ} = \frac{٣٤٠٨٠ - ٣٣٩٢٥}{٤٤٨٥٠٠ - ٣٣٠٦٢٥} = \frac{١٥٥}{١١٧٨٧٥} = ٠{,}٠٠١ \text{ ،}$$

$$\text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{أ}\,\bar{\text{س}} \qquad \therefore \text{ب} = \frac{٥٩}{١٢} - ٠{,}٠٠١ \times \frac{٥٧٥}{١٢}$$

$$\therefore \text{ب} = ٤{,}٩٢ - ٠{,}٠٠١ \times ٤٧{,}٩٢ \approx ٤{,}٨٧ \text{ .}$$

معادلة انحدار ص على س هي : ص = أ س + ب

$\therefore$ ص = ٠,٠٠١ س + ٤,٨٧ .

ب) إذا استخدمنا بيانات عيّنة أخرى مكوَّنة من ١٢ أسرة من المجتمع نفسه ؛ فإن معادلة الانحدار قد تتغير لأن بيانات العينات المختلفة تختلف نتيجةً لعشوائية الاختيار .

جـ) $\text{أ} = \text{ر} \times \frac{\text{ع}_{\text{ص}}}{\text{ع}_{\text{س}}} \Longleftarrow \text{ر} = \text{أ} \times \frac{\text{ع}_{\text{س}}}{\text{ع}_{\text{ص}}}$

وحيث أن : $ع_{س} = \sqrt{\frac{مجـ س^{٢}}{ﻫ} - \left(\frac{مجـ س}{ﻫ}\right)^{٢}}$

$\therefore ع_{س} = \sqrt{\frac{٣٧٣٧٥}{١٢} - \left(\frac{٥٧٥}{١٢}\right)^{٢}} = \sqrt{٣١١٤,٥٨ - ٢٢٩٦,٠١}$

$\therefore ع_{س} = \sqrt{٨١٨,٥٧} = ٢٨,٦١$

وبالمثل : $ع_{ص} = \sqrt{\frac{مجـ ص^{٢}}{ﻫ} - \left(\frac{مجـ ص}{ﻫ}\right)^{٢}} = \sqrt{\frac{٣٠١}{١٢} - \left(\frac{٥٩}{١٢}\right)^{٢}}$

$= \sqrt{٢٥,٠٨ - ٢٤,١٧} = \sqrt{٠,٩١} = ٠,٩٥$

وحيث: $ر = أ \times \frac{ع_{س}}{ع_{ص}}$

$\therefore ر = ٠,٠٠١ \times \frac{٢٨,٦١}{٠,٩٥} = ٠,٠٣$

$\therefore ر = ٠,٠٣$.

تمارين ومسائل (١٠-٢)

[١] من الجدول (١٠ – ١٥) :

جدول (١٠ – ١٥)

س	٢	٤	٥	٦	٨	١١
ص	١٨	١٢	١٠	٨	٧	٥

أوجد معادلة انحدار ص على س .

[٢] أجرى معلم الرياضيات اختبارين لعشرة طلاب الأول في الجبر (س) والآخر في الاحصاء (ص) وكانت نتائج الاختبارين كما هي مبيَّنة في الجدول (١٠ – ١٦) التالي :

جدول (١٠ – ١٦)

س	٦	٥	٨	٨	٧	٦	١٠	٤	٩	٧
ص	٨	٧	٧	١٠	٥	٨	١٠	٦	٨	٦

أوجد معادلة انحدار س على ص .

[٣] إذا علمت أن $\bar{\text{س}}$ = ٦٠٠ ، $\bar{\text{ص}}$ = ٤,٨ ، ر = ٠,٥٨ ، $\text{ع}_{\text{س}}$ = ١٠٠ ، $\text{ع}_{\text{ص}}$ = ٠,٤ .

أ) ما هي القيمة المتوقعة للمتغير ص عندما تكون س = ٣٥٠ ؟

ب) ما هي القيمة المتوقعة للمتغير س عندما تكون ص = ٥,١ ، ص = ٤,٨ ؟

[٤] أجري في إحدى المدارس امتحانان لعشرة طلاب : الأول في الكيميـــاء (س) والثاني في الفيزياء (ص) ، وكانـــت درجات الامتحانين كما هي مبينة في الجدول (١٠ – ١٧) التالي :

جدول (١٠ – ١٧)

الامتحان الأول س	٧	٩	٤	١٠	٦	٧	٨	٨	٥	٦
الامتحان الثاني ص	٦	٨	٦	١٠	٨	٥	١٠	٧	٧	٨

أوجد : ١■ معادلة انحدار ص على س . ٢■ معادلة انحدار س على ص .

[٥] يوضّح الجدول (١٠ – ١٨) العمر (س) وضغط الدم (ص) لاثنى عشر معلماً :

جدول (١٠ – ١٨)

العمر (س)	٥٦	٤٢	٧٢	٣٦	٦٣	٤٧	٥٥	٤٩	٣٨	٤٢	٦٨	٦٠
ضغط الدم (ص)	١٥٥	١٥٢	١٤٠	١١٥	١٤٥	١٥٠	١٢٨	١٤٩	١١٨	١٦٠	١٢٥	١٤٧

أوجد : ١■ معادلة انحدار ص على س . ٢■ قدّر ضغط الدم لمعلّم عمره ٤٥ سنة .

[٦] في الجدول (١٠ – ١٩) بيانات عن معدلات الزواج (س) ومعدلات الطلاق (ص) لكل ألف من السكان في الجمهورية اليمنية في سنوات مختلفة :

جدول (١٠ – ١٩)

السنة	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢
معدلات الزواج(س) في الألف	١٥	١٨	٢١	٢٢	٢٧	٢٩	٣٢	٣٣	٣٥	٣٧	٣٩	٤٢
معدلات الطلاق(ص) في الألف	٢	٣	٣	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٥

أوجد معادلة الانحدار الخطى لمعدل الطلاق على معدل الزواج ثم استخدم المعادلة للتنبؤ بقيمة معدلات الطلاق في اليمن في سنة ما إذا عُلم أن معدّل الزواج في تلك السنة كان ١٤ في الألف .

[٧] من الجدول (١٠ – ٢٠) التالي :

جدول(١٠ – ٢٠)

س	٢	٤	٥	٦	٨	١١
ص	١٨	١٢	١٠	٨	٧	٥

أوجد معادلة انحدار س على ص .

[٨] رغبت إحدى الشركات في التعرف على جودة انتاجها من السمن فسحبت عيِّنة عشوائية (س) من علب السمن وتم فحصها وتحديد العيوب الموجودة بكل علبة (ص) وكانت نتيجة الفحص كما هي مبينة في جدول (١٠ – ٢١) :

جدول (١٠ – ٢١)

عدد العلب (س)	١٥	١٢	٦	٤	٣
عدد العيوب (ص)	٥	٤	٢	٢	١

أوجد : ١ ■ معادلة انحدار ص على س ٢ ■ قدِّر العيوب الممكن ظهورها في عدد ٧ علب من السمن .

[٩] يوضح الجدول (١٠ – ٢٢) درجات عشرة طلاب في امتحان نهائي في مادتي الجبر (س) والهندسة (ص) .

جدول (١٠ – ٢٢)

س	٧٤	٨٩	٧٢	٩٥	٨٠	٩١	٧٢	٨٦	٧٨	٨٢
ص	٧٧	٨٤	٦٨	٩٨	٧١	٨٧	٦٥	٩٣	٨٠	٧٥

أوجد : ١ ■ معادلة انحدار ص على س .

٢ ■ إذا حصل طالب على ٤٩ درجة في الجبر ، فما هي الدرجة المتوقَّع أن يحصل عليها الطالب نفسه في الهندسة .

[١٠] ليكن لدينا الجدول (١٠ – ٢٣) :

جدول (١٠ – ٢٣)

س	١٥	١٤	١٠	٩	٨	٨	٧	٦	٤	٢
ص	٤	٦	٤	٨	٧	٨	١٠	٩	١٤	١٢

أوجد :

أ) معامل الارتباط الخطي بين س ، ص .

ب) معادلة انحدار ص على س .

جـ) معادلة انحدار س على ص .

١٠ – ٤ الاحتمالات

مقدمـــــة :

يرجع ظهور علم الاحتمال إلى الأبحاث التي قام بها العالمان الفرنسيان باسكال وفيرمات في منتصف القرن السابع عشر عند دراستهما لأرقام معينة في عالم المراهنة وألعاب الخط . ومنذ ذلك الحين اشترك الكثير من الرياضيين والعلماء في أبحاث هذا العلم ، وعلى الرغم من أنه علم قديم إلاَّ أنه لم توضع له مسلّمات إلاَّ في القرن الماضي ، ويحتل هذا العلم الآن وضعاً متميزاً بين أساسيات الرياضيات ، حيث أصبح أداة هامة في مجالات متعددة مثل الطبيعة ، والطب ، وعلم النفس ، والعلوم السياسية والتربية وغيرها من المجالات المختلفة .

والعبارات الاحتمالية شائعة بين الناس ، فكثير ما نستعمل عبارات الاحتمال في معظم حياتنا اليومية للتعبير عن أحداث في ظروف عدم التأكّد كأن نقول : احتمال أن تسقط الأمطار غداً ، أو احتمال أن يفوز فريق أ على فريق ب في إحدى مسابقات البرامج التعليمية . وهناك العديد من الأمثلة الأخرى في حياتنا . والجدير بالذكر أنّ قضايا الحظ والصدفة كانت تعتبر في الماضي من الأمور الغامضة التي لاتخضع لتحليل رياضي أو تنبؤ علمي ولكن الرياضيين اثبتوا عكس ذلك حين استطاعوا أن يحوّلوا مثل هذه القضايا إلى علم يساهم في التنمية وتقدم البشر .

ويهتم علم الاحتمال بدراسة التجارب العشوائية ، والتي يمكن أن نقسّم إلى قسمين :

١ ▪ **تجارب علمية** : وهي تجارب المختبرات الفيزيائية والكيميائية والبيولوجية وغيرها من المواضيع العلمية .

٢ ▪ **تجارب عشوائية** : وهـي التجارب التي يمكن معرفة كافة نتائجها مسبقاً ، ولكن لايمكن تحديد ما هو الناتج الذي سيتحقق فعلاً قبل اجراء التجربة .

أولاً : فضاء العينة والحوادث :

أ – فضاء العينة :

تعريف (١٠ – ١)

فضـــاء العينـــة لتجربـــة عشوائية : هـــو مجموعة كافة النتائج الممكنة أو المتوقعة لهذه التجربة ، ويرمز له بالرمز « ع »

قد يكون فضاء العينة منتهياً وقد يكون غير منتهٍ ، وسندرس في هذا البند فقط التجارب العشوائية ذات الفضاءات المنتهية .

مثال (١٠–٩)

اكتب فضاء العينة لكلٍ من التجارب العشوائية التالية :

١ ▪ إلقاء قطعة نقود متجانسه مرة واحدة ، وملاحظة الوجه الظاهر عليها عند استقرارها على الأرض .

٢ ▪ إلقاء حجر نرد متجانس مرة واحدة ،وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي له عند استقراره على الأرض.

٣ ■ سحب ورقة واحدة عشوائياً من مجموعة أوراق اللَّعب ، وملاحظة العدد ، أو الصورة عليها .

٤ ■ إلقاء حجري نرد مرة واحدة ، وملاحظة مجموع العددين الظاهرين على وجهيهما العلوي ، واذكر عدد نواتج هذه التجربة .

الحــــل :

١ ■ إنَّ النتائج الممكنة لهذه التجربة معروفة مسبقاً،وهي امَّا أن تظهر الصورة ،أو تظهر الكتابة ، ولكن لايمكن تحديد ما هو الناتج الذي سيتحقق فعلاً هل الصورة ؟ أم الكتابة ؟ واذا رمزنا لظهور الصورة بالرمز (ص) ولظهورالكتابة بالرمز (ك) فإنه يمكن كتابة فضاء العينة لهذه التجربة بشكل مجموعة كالتالي :ع = {ص، ك } ، ﻫ(ع) =٢ .

٢ ■ فضاء العينة ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، ﻫ(ع) = ٦ .

٣ ■ فضاء العينة ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ولد ، بنت ، شايب } ، ﻫ(ع) = ١٣ .

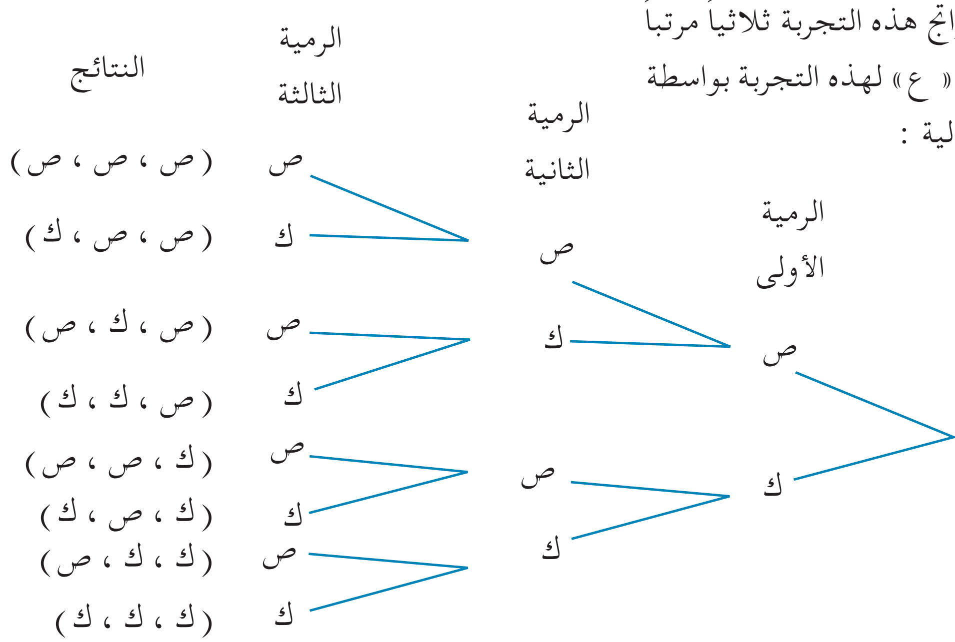
٤ ■ فضاء العينة ع = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ } ، . ﻫ (ع) = ١١ .

مثال (١٠-١٠)

ألقيت قطعة نقود متجانسة بصورة عشوائية ثلاث مرات متتالية ، ولوحظ تتابع الصور والكتابات .
اكتب فضاء العينة لهذه التجربة ، واذكر عدد عناصرها .

الحــــل :

يكون كل ناتج من نواتج هذه التجربة ثلاثياً مرتباً ويمكن الحصول على « ع » لهذه التجربة بواسطة الشجـــــرةالبيانية التالية :



∴ ع = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ص) ،(ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) } ،عدد نواتج التجربة ﻫ (ع) = ٨ .

مجموعة حوادث فضاء العينة :

إذا كانت « ع » هي فضاء العينة لتجربة عشوائية ، فإن مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة « ع » تسمَّـــى

« مجموعة حوادث فضاء العينة » ، ويرمز لها بالرمز ك ؛ وإذا كانت عدد عناصر فضاء العينة ، « ع » = ن ، فإن عدد عناصر المجموعة ك هي : $\boxed{ن (ك) = ٢^{ن}}$

مثال (١٠-١١)

ألقي حجر نرد متجانس مرة واحدة ، ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي له .

أوجد : ن (ك) (عدد الحوادث التي يمكن تعريفها على « ع ») .

الحل :

ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } .

∵ ن (ك) = $٢^{ن}$ ، ن = ٦ عناصر .

∴ ن (ك) = $٢^{٦}$ = ٦٤ حادثه .

مثال (١٠-١٢)

ألقيت قطعة نقود متجانسه مرتين متتاليتين ، ولوحظ الوجه الظاهر عليها عند استقرارها على الأرض

أوجد : ن (ك) .

الحل :

ع = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) } .

∵ ن (ك) = $٢^{ن}$ ، ن = ٤ عناصر .

∴ ن (ك) = $٢^{٤}$ = ١٦ حادثة .

ب - الحوادث :

قد يكون للتجربة العشوائية نفسها نواتج مختلفة باختلاف اهتمام الشخص الذي يقوم بإجراء التجربة . فمثلاً :

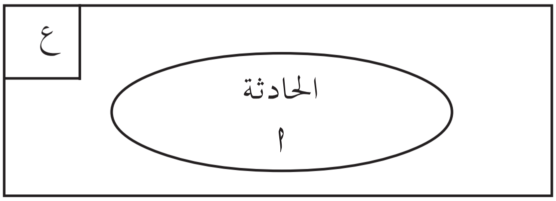
عند رمي حجر النرد مرة واحدة قد يكون اهتمام الشخص تسجيل العدد على الوجه العلوي لحجر النرد بعد استقراره على الأرض فيكون فضاء العينة ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } .

وقد يكون اهتمام شخص أخر تسجيل العدد الفردي الظاهر فيكون فضاء العينة ع = { ١ ، ٣ ، ٥ } .

وقد يقوم ثالث بتسجيل العدد على الوجه العلوي الذي يقبل القسمة على ٣ ، وفي هذه الحالة يكون فضاء العينة ع = { ٣ ، ٦ } .

ونستخلص مما سبق أن الحادثة هي أي مجموعة جزئية من فضاء العينة « ع » القابل للعد ، وتقترن الحادثة على الدوام باحتمال ، وعادة ما يرمز لها بحرف هجائي واحد مثل أ ، ب ، جـ ، .... الخ .

وإذا اعتبرنا فضاء العينة ع لتجربة ما ،هو المجموعة الكلية ، وأي حادثة ا هي مجموعة جزئية من ع فإنه يمكن تمثيل الحادثة ا بيانياً كما في شكل (١٠ – ٨) ؛



شكل(١٠ – ٨)

فمثلاً : في تجربة القاء قطعة نقود مرتين متتاليتين ، وملاحظة الوجه الظاهر عليها نجد أن : ع = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) } . لاحظ أن : المجموعة ا = { (ك ، ك) } هي مجموعة جزئية من ع وتعبِّر عن حادثة ظهور الكتابة مرتين . وكذلك المجموعة ب = { (ص ، ص) ، (ك ، ك) } هي مجموعة جزئية من ع وتعبِّر عن حادثة (ظهور وجهين متشابهين) .. وهكذا .

وعادة ما يقال لأي حادثة مثل الحادثة هـ مثلاً أنها قد وقعت إذا كان الناتج هو : { (ص ، ص) } ، أو {(ص ، ك)} ، أو { (ك ، ص) } مجموعة حوادث فضاء العينة . وهناك العديد من الحوادث أهمها ما يلي :

١ ■ **الحادثة الأولية (البسيطة) :** هي تلك الحادثة التي تتكون من عنصر واحد فقط من فضاء العيِّنة ع ، مثل الحادثة ا = { (ك ، ك) } .

٢ ■ **الحادثة المركَّبة :** هي تلك الحادثة التي تتكون من تركيب حادثتين بسيطتين، أو أكثر من فضاء العيِّنة ع ، مثل الحادثة ب = { (ص ، ص)،(ك ، ك) } أو هـ = { (ص ، ص)، (ص ، ك) ، (ك ، ص) } .

٣ ■ **الحادثة الأكيدة :** هي تلك الحادثة التي تقع دوماً ، أي هي فضاء العينة (ع) في أي تجربة عشوائية بأكملها .

٤ ■ **الحادثة المستحيلة :** هي تلك الحادثة التي لاتقع ولن تقع أبداً ، ويرمز لها بالرمز ($\varnothing$) ، وهي المجموعة الخالية وتقرأ (فاي) .

تدريب (١٠ – ١)

اكتب الحادثة التي تعبر عن ظهور صورة واحدة على الأقل في تجربة القاء قطعة نقود مرتين متتاليتين .

الحوادث المتنافية :

إذا كان لدينا تجربة عشوائية وكان فضاء العينة الذي يتعلق بها « ع » ، وكانت الحوادث محل البحث هي مجموعات جزئية منفصلة (غير متقاطعة) ، قيل أن هذه الحوادث متنافية .

تعريف (١٠ – ٢)

يقال للحادثتين ا ، ب أنهما متنافيتان إذا وفقط إذا كان ا $\cap$ ب = $\varnothing$.

مثال (١٠ – ١٣)

ألقي حجر نرد متجانس مرة واحدة، ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي له عند استقراره على الأرض ، فإذا كانت ا هي حادثة ظهور عدد فردي ، ب هي حادثة ظهور عدد زوجي .

فإن ا ، ب حادثتان متنافيتان لأن : ا = { ١ ، ٣ ، ٥ } ، ب = { ٢ ، ٤ ، ٦ } . أي أن : ا $\cap$ ب = $\varnothing$.

لاحظ أن وقوع الحادثة « ا » تمنع وقوع الحادثة « ب » والعكس صحيح .
ويكتب التقاطع ا ∩ ب أحياناً بالشكل ا ب .

تعريف (١٠ – ٣)

يقال لعدة حوادث انها متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى .

بمعنى أنه إذا كانت ا ، ب ، جـ ، ... حوادث .
وكان ا ∩ ب = ∅ ، ب ∩ جـ = ∅ ، ا ∩ جـ = ∅ ، ... ؛ فإن ا ، ب ، جـ ، ... حوادث متنافية؛ والعكس صحيح .

العمليات على الحوادث :

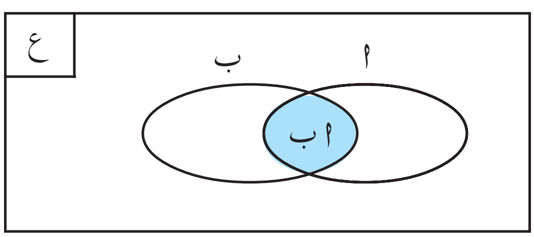
تعلم مما سبق أن الحوادث هي مجموعات جزئية من فضاء العينة « ع » ، لذلك أصبح من الممكن التحدث عن اتحاد حادثين وتقاطعها ،ومتممتها والفرق بينهما ومتممة حادثة ؛ وكل ما يتعلق بالعمليات على المجموعات ؛ أي أصبح بإمكاننا الربط بين الحوادث لكي نكوّن حوادث جديدة باستعمال العمليات المختلفة الخاصة بالمجموعات .

أ – تقاطع الحوادث :

إذا كانت ا ، ب حادثتين في « ع » فإن : ا ∩ ب هي مجموعة العناصر المشتركة بين ا ، ب ؛ وعلى ذلك فإن ا ∩ ب تعني :

وقوع الحادثتين ا ، ب معاً

وتكتب اختصاراً (ا ب) [انظر شكل (١٠ – ٩)] .



شكل (١٠ – ٩)

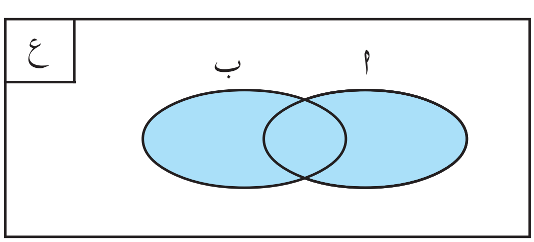
الجزء المظلل يمثل ا ∩ ب

ب – اتحاد الحوادث :

إذا كانت ا ، ب حادثتين في « ع » ، فإن ا ∪ ب هي المجموعة التي عناصرها تتكون من عناصر « ا » ، أو عناصر « ب » ، أو كليهما ، وعلى ذلك فإن : ا ∪ ب تعني :

وقوع أحدى الحادثتين ا ، ب على الأقل

[انظر شكل (١٠ – ١٠)]



شكل (١٠ – ١٠)

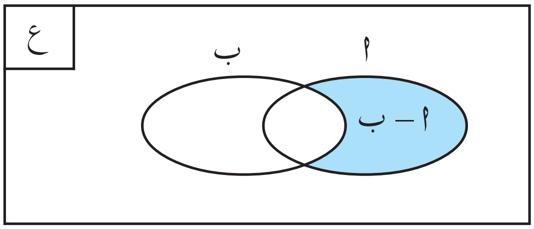
الجزء المظلل يمثل ا ∪ ب

جـ) الفرق بين حادثتين :

إذا كانت أ ، ب حادثتين في «ع» فإن : أ – ب هي المجموعة التي عناصرها تنتمي إلى «أ» ولاتنتمي إلى «ب». وعلى ذلك فإن أ – ب يعني :

وقوع الحادثة «أ» وعدم وقوع «ب»

[انظر شكل (١٠ – ١١)]



شكل (١٠ – ١١)

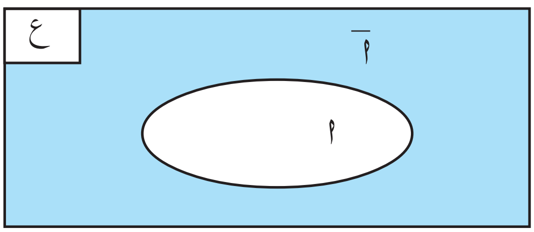
الجزء المظلل يمثل أ – ب

د – الحادثة المتمِّمة :

إذا كانت «أ» حادثة في «ع» أي :

أ ⊂ ع فـإن المتمِّمة للمجموعة «أ» بالنسبة إلى «ع» هي «أ̅» (تقرأ متممة أ)،وهي المجموعة التي عناصرها تنتمي إلى «ع» ولاتنتمي إلى «أ» تسمى بالحادثة المتمِّمة للحادثة «أ» وهي الحادثة التي تقع إذا لم تقع «أ»:

ملاحظة : أ – ب = أ ب̅ [انظر شكل (١٠ – ١٢)]



شكل (١٠ – ١٢)

الجزء المظلل يمثل أ̅

نـتـائـج :

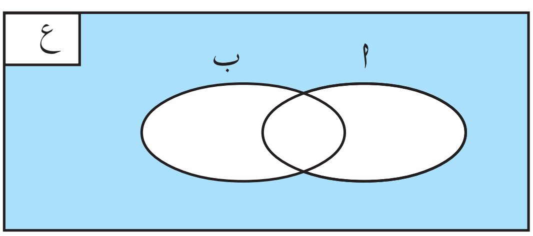
١■ أ ∩ أ̅ = ∅ (الحادثة المستحيلة) .

٢■ إذا كانت أ ، ب حادثتين في (ع) فإن :

أ̅ ∩ ب̅ = (أ ∪ ب)´

وهذا يعني :

عدم وقوع أيّ من الحادثتين [انظر شكل (١٠ – ١٣)]

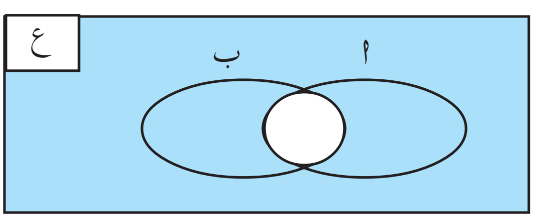


شكل (١٠ – ١٣)

الجزء المظلل يمثل (أ ∪ ب)´

٣■ أ̅ ∪ ب̅ = (أ ∩ ب)´ يعني .

عدم وقوع الحادثتين معا [انظر شكل (١٠–١٤)]



شكل (١٠ – ١٤)

الجزء المظلل يمثل (أ ∩ ب)´

تعرف العلاقتين السابقتين (٢ ، ٣) بقانوني (دي مورجان)

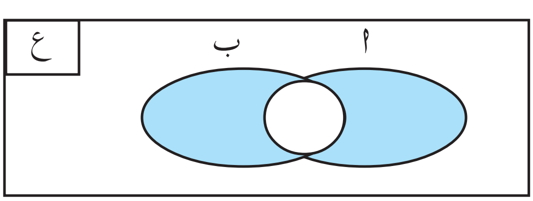
٤■ إذا كانت أ ، ب حادثتين في (ع) فإن :

(أ – ب) ∪ (ب – أ) = (أ ∪ ب) – (أ ∩ ب)

أو أ ب̅ ∪ ب أ̅ = (أ ∪ ب) – أ ب ، وهذا يعني :

وقوع إحدى الحادثتين فقط .

[انظر شكل (١٠ – ١٥)] .



شكل (١٠ – ١٥)

الجزء المظلل يمثل(أ – ب) ∪ (ب – أ)

مثال (١٠-١٤)

ألقي حجر نرد متجانس مرة واحدة ، وتمت ملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي له عند استقراره على الأرض.

أوجد : ١ ■ حادثة الحصول على عدد فردي . ٢ ■ حادثة الحصول على عدد زوجي

٣ ■ حادثة الحصول على عدد أولي .

الحـــل : ∵ ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } .

١ ■ نفرض أن : أ هي حادثة الحصول على عدد فردي ،

∴ أ = { ١ ، ٣ ، ٥ } .

٢ ■ نفرض أن : ب هي حادثة الحصول على عدد زوجي ،

∴ ب = { ٢ ، ٤ ، ٦ } .

٣ ■ نفرض أن : جـ هي حادثة الحصول على عدد أولي .

∴ جـ = { ٢ ، ٣ ، ٥ } .

مثال (١٠-١٥)

ألقيت قطعة نقود ثم حجر نرد بشكل عشوائي ، وتمت ملاحظة الوجه الظاهر لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوي لحجر النرد . فإذا كانت :

أ هي حادثة ظهور الكتابة وعدد زوجي .

ب هي حادثة ظهور عدد أولي .

اكتب كلا من الحوادث التالية :

١ ■ وقوع إحدى الحادثتين على الأقل . ٢ ■ وقوع الحادثتين معا . ٣ ■ وقوع الحادثة (ب) دون (أ) .

الحـــل :

فضاء العينة (ع) = {(ص ، ١) ،(ص ، ٢) ،(ص ، ٣)،(ص ، ٤) ،(ص ، ٥) ،(ص ، ٦) ، (ك ، ١) ، (ك ، ٢) ، (ك ، ٣) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٥) ، (ك ، ٦) } .

وحيث إن : أ هي حادثة ظهور الكتابة مع عدد زوجي .

∴ أ = {(ك ، ٢) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٦) }.

وحيث أن : ب هي حادثة ظهور عدد أولي .

∴ ب = { (ص ، ٢) ، (ص ، ٣) ، (ص ، ٥) ، (ك ، ٢) ، (ك ، ٣) ، (ك ، ٥) } .

١ ■ أ ∪ ب = {(ك ،٢)،(ك ،٤)، (ك ، ٦) ، (ص ، ٢) ، (ص ، ٣)،(ص ،٥)،(ك ،٣)،(ك ،٥) }.

٢ ■ أ ∩ ب = {(ك ، ٢) } .

٣ ■ ب − أ = {(ص، ٢) ، (ص ، ٣) ، (ص ، ٥) ، (ك ، ٣) ، (ك ، ٥) } .

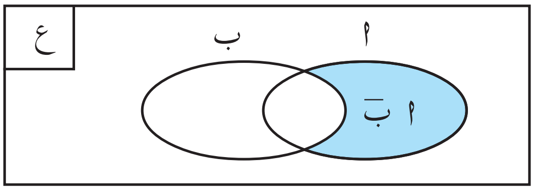
مثال (١٠-١٦)

إذا كانت أ ، ب حادثتين في فضاء عيِّنة لتجربة عشوائية ، فعبِّر عن كلٍ من الحوادث التالية بلغة المجموعات ومثِّلها بأشكال فـن .

١ ■ وقوع الحادثة (أ) فقط .   ٢ ■ وقوع إحدى الحادثتين فقط .   ٣ ■ عدم وقوع أيٍّ من الحادثتين .

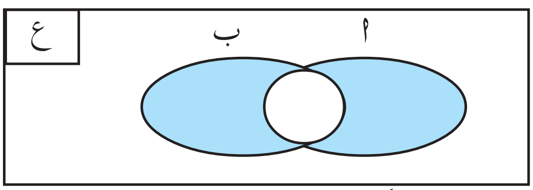
الحـــل :

١ ■ وقوع الحادثة « أ » فقط يعني : وقوع الحادثة (أ) وعدم وقوع (ب) ، أي الحادثة التـي عناصرها تنتمـي إلى أ ولا تنتمي إلى ب ، وهي الحادثة أ − ب .
[انظر شكل (١٠ − ١٦)]



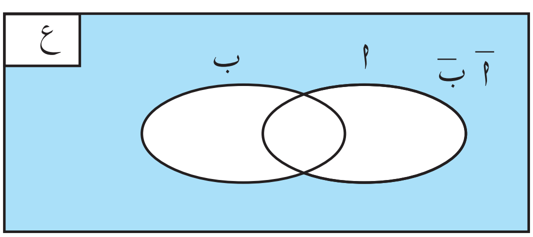
شكل (١٠ − ١٦)
الجزء المظلل يمثل أ − ب

٢ ■ وقوع إحدى الحادثتين فقط . يعني :
وقوع « أ » فقط أو وقوع « ب » فقط
= أ $\overline{ب}$ ∪ ب $\overline{أ}$ = (أ ∪ ب) − أ ب
[انظر شكل (١٠ − ١٧)] .



شكل (١٠ − ١٧)
الجزء المظلل يمثل (أ − ب) ∪ (ب − أ)

٣ ■ عدم وقوع أي من الحادثتين يعني :
عدم وقوع أ وعدم وقوع « ب »
= $\overline{أ}$ ∩ $\overline{ب}$ = (أ ∪ ب)َ
[انظر شكل (١٠ − ١٨)] .



شكل (١٠ − ١٨)
الجزء المظلل يمثل (أ ∪ ب)َ

تمارين ومسائل (١٠-٤ أولاً)

[١] اكتب فضاء العيِّنة لكلٍ من التجارب العشوائية التالية :

١ ■ إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين .

٢ ■ إلقاء قطعتين متمايزتين (مختلفتين في اللَّون أو الشكل أو الحجم) من النقود في آن واحد .

٣ ■ إلقاء قطعتين متماثلتين (من نفس النوع) من النقود في آن واحد .

٤ ■ إلقاء قطعة نقود وحجر نرد مرة واحدة ، واذكر عدد نواتج التجربة .

٥ ■ سحب رقم عشوائي من أرقام العدد ٦١٢٥٧٣ .

٦ ■ تسابق خمسة طلاب أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ في السباحة ، وملاحظة نتيجة الفوز فيها .

٧ ■ اختيار عدد صحيح عشوائي من بين الأعداد الصحيحة الواقعة بين −٧ ، ٣ .

[٢] ألقيت قطعة نقود متجانسة بصورة عشوائية ثلاث مرات متتالية ولوحظ تتابع الصــور والكتابات .

اكتب كلا من الحوادث التالية :

١ ■ ظهور صورة واحدة على الأقل .

٢ ■ ظهور الصورة مرتين فقط .

٣ ■ ظهور الصورة مرتين على الأقل .

٤ ■ ظهور الصورة مرتين على الأكثر .

٥ ■ ظهور الكتابة مرتين متتاليتين .

[٣] سحب رقم عشوائي من أرقام العدد ٦٩٧٥١٢ .

١ ■ اكتب فضاء العينة لهذه التجربة .

٢ ■ عيِّن الحادثتين التاليتين :

أ) الرقم المسحوب رقم فردي ، ب) الرقم المسحوب رقم زوجي .

٣ ■ أي من الحادثتين متمِّمة للأخرى ؟

[٤] اختير ثلاثة أفراد عشوائيا من مجموعة مكوَّنة من أربعة طلاب وثلاث طالبات :

أ) اكتب فضاء العينة المرتبطة بنوع الأفراد المختارين .

ب) عبر عن الحوادث التالية :

١ ■ اختيار طالبتين على الأقل

٢ ■ اختيار طالبتين على الأكثر .

٣ ■ اختيار طالبين على الأقل

٣ ■ اختيار طالبين على الأكثر .

[٥] ألقي حجر نرد مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي له عند استقراره على الأرض .

اكتب كلا من الحوادث التالية وعدد عناصر كل حادثة :

١ ■ الحصول على العدد (٥) مرتين .

٢ ■ الحصول على عددين مجموعهما (٩) .

٣ ■ الحصول على عدد فردي في الرمية الأولى وزوجي في الرمية الثانية .

٤ ■ الحصول على عددين مجموعهما (٨) أو (١٠).

٥ ■ الحصول على عددين مجموعهما (١٣) .

٦ ■ الحصول على عددين مجموعهما يقبل القسمة على (٥) .

[٦] القيت قطعة نقود مرتين متتاليتين ولوحظ ظهور الصورة والكتابة .

اكتب كل من الحوادث التالية :

١ ■ ظهور كتابة على الأقل .

٢ ■ ظهور الكتابة مرتين .

٣ ■ ظهور صورة على الأكثر .

٤ ■ ظهور الشيء نفسه في الرميتين .

٥ ■ ظهور كتابة في الرمية الأولى .

[٧] أ ، ب حادثتين في فضاء عينة لتجربة عشوائية ، عبِّر عن كل من الحوادث التالية بلغة المجموعـات ومثلها بأشكال فن :

١ ■ وقوع الحادثة ﺃ ، وعدم وقوع الحادثة ب . ٢ ■ عدم وقوع الحادثة ﺃ ، أو وقوع الحادثة ب .
٣ ■ عدم وقوع الحادثتين معا . ٤ ■ وقوع الحادثة ب فقط .
٥ ■ وقوع أحدى الحادثتين فقط .

[٨] ألقيت قطعة نقود وحجر نرد معا بصورة عشوائية .
١ ■ اكتب فضاء العينة لهذه التجربة .
٢ ■ عبِّر عن الحودث التالية :
أ) ظهور الصورة مع عدد زوجي ، ب) ظهور الكتابة مع عدد فردي ،
جـ) ظهور عدد أولي .
٣ ■ أيٌّ من الحوادث ﺃ ، ب ، جـ يتنافى مع الأخر ؟

[٩] لتكن ﺃ ، ب حادثتين ، ط هي وقوع الحادثة ﺃ وعدم وقوع الحادثة ب ، هـ هي وقوع ﺃ أو ب وليس كليهما .
عبر عن الحادثتين ط ، هـ بلغة المجموعات ومثِّلهما بشكل فن .

ثانيا : مفاهيم أولية في الاحتمال :

إذا ألقينا حجر نرد متجانسا فمن المؤكد انه سيستقر على الأرض ، وأحد أوجهه إلى أعلى ، ولكن ليس من المؤكد أن يحمل هذا الوجه العدد ٣ ، مثلاً وإذا أردنا التنبؤ بوقوع الحادثة (ظهور العدد ٣) ؛ فإننا نلجأ إلى افتراض أنّ جميع الحوادث البسيطة الممكنة متساوية في احتمال حدوثها بالإضافة إلى كون بقية الحوادث مستبعدة ؛ بمعنى أنه إذا وقعت حادثة فإنه يستبعد وقوع باقي الحوادث وهذا ما يُسمَّى بالانتظام الاحتمالي . وبالاستناد إلى مثل هذه الافتراضات فإننا نستطيع أن نتنبأ باحتمال وقوع حوادث معينة . وإذا افترضنا أن لدينا الحادثة ﺃ وافترضنا أن عدد عناصر هذه الحادثة يساوي (م) وعدد عناصر فضاء العينة يساوي (ﻥ) ؛ فإن احتمال وقوع الحادثة (ﺃ) يعطى بالعلاقة التالية :

$$\text{حا}(\text{ﺃ}) = \frac{\text{م}}{\text{ﻥ}}$$

حيث : حا هي دالة الاحتمال

ومما تجدر الإشارة إليه أن الاحتمال الذي أوجدناه في العلاقة السابقة لم يُبنَ على تجربة بل على توقُّع نظري مبني على افتراضات رياضية ، ولهذا فهو يُسمَّى بالاحتمال النظري . وإذا لم تتوفر الافتراضات التي يستند عليها هذا الاحتمال فإننا لا نستطيع حسابه ؛ ولهذا لا نستطيع حساب الاحتمال إذا كان عدد عناصر فضاء العينة غير منتهٍ (غير محدود) ، أو إذا كانت الحوادث غير متساوية في حدوثها (غير منتظمة الاحتمال) ؛ فمثلا : عند رمي حجر نرد غير متجانس (أي أن بعض الأرقام تظهر أكثر من غيرها) فإنه لا يمكن تطبيق قوانين الاحتمالات الرياضية في استخراج قيم احتمال ظهور أي وجه من أوجه هذا الحجر .

مثال (١٠-١٧)

صندوق يحتوي على ٥ كرات سوداء ، ٤ كرات بيضاء ، سحبت كرة من الصندوق بشكل عشوائي .
ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء ؟

الحــــل : نفرض أن ا هي حادثة سحب كرة سوداء .
وحيث أن الحادثة ا تتحقق إذا ظهرت أي من الكرات الخمس السوداء ، أي أن م = ٥ ، عناصر فضاء العينة د = ٩ عناصر (٩ كرات) .

$$\text{حا (ا)} = \frac{\text{م}}{\text{د}} \qquad \therefore \text{حا (ا)} = \frac{٥}{٩}$$

مثال (١٠-١٨)

ألقي حجر نرد متجانس مرة واحدة ما احتمال الحصول على الرقم ٣ ؟

الحــــل :

نفرض أن : ب هي حادثة الحصول على الرقم ٣ .
∵ فضاء العينة ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، د = ٦ عناصر ،
وحيث إن عدد مرات ظهور الرقم ٣ = ١ (مرة) ⟸ م = ١

$$\text{حا (ب)} = \frac{\text{م}}{\text{د}} \;. \qquad \therefore \text{حا (ب)} = \frac{١}{٦} \;،$$

مثال (١٠-١٩)

ألقيت قطعة نقود مرتين متتاليتين ما احتمال :

١ ■ ظهور صورة واحدة فقط . ٢ ■ ظهور كتابتين معا .

الحــــل :

نرمز لظهور الصورة بالرمز (ص) ولظهور الكتابة بالرمز (ك)
فضاء العينة ع = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)} ؛ ∴ د = ٤

١ ■ نفرض أن : ا هي حادثة ظهور صورة واحدة فقط أي : ا = {(ص ، ك) ، (ك ، ص)} ⟸ م = ٢

$$\text{حا (ا)} = \frac{\text{م}}{\text{د}} \qquad \therefore \text{حا (ا)} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢} \;.$$

٢ ■ نفرض أن : ب هي حادثة ظهور كتابتين معا . أي : ب = {(ك ، ك)} ⟸ م = ١

$$\text{حا (ب)} = \frac{\text{م}}{\text{د}} \;. \qquad \therefore \text{حا (ب)} = \frac{١}{٤}$$

ثالثا : دالة الاحتمال :

تعريف (١٠ – ٤)

دالة الاحتمال

لتكن (ع) فضاء العينة لتجربة عشوائية ، ك مجموعة أحداث هذا الفضاء ، ح مجموعة الأعداد الحقيقية فإن الدالة : حا : ك ← ح

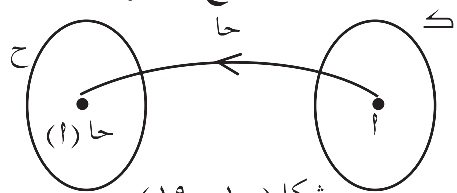
تسمى دالة احتمال إذا توفرت فيها المسلمات التالية :

١ ■ حا (ا) ≥ ٠ ∀ ا ∈ ك

٢ ■ حا (ع) = ١

٣ ■ إذا كان ا ⊂ ع ، ب ⊂ ع وكانت ا ، ب حادثتين متنافيتين فإن :

حا (ا ∪ ب) = حا (ا) + حا (ب)



شكل(١٠ – ١٩)

خواص دالة الاحتمال :

■١ احتمال وقوع الحادثة المستحيلة = صفر ؛ أي : حا (∅) = ٠

■٢ احتمال عدم وقوع حادثة ما = ١ – (احتمال وقوع هذه الحادثة)؛ أي : حا (ا̅) = ١ – حا (ا)

■٣ لتكن ا ، ب حادثتين غير متنافيتين في فضاء العينة (ع) لتجربة عشوائية فإن :

حا (ا ∪ ب) = حا (ا) + حا (ب) – حا (ا ∩ ب) ، حا (ا – ب) = حا (ا) – حا (ا ∩ ب)

■٤ لتكن ا ، ب حادثتين في فضاء العينة (ع) لتجربة عشوائية وكانت ب ⊂ ا ، فإن :

حا (ب) ≤ حا (ا) .

نتائـــج هامـــة :

■١ احتمال أي حادثة = مجموع احتمالات الحوادث الأولية لهذه الحادثة (لأن الحوادث الأولية لأي حادثة هي حوادث متنافية) .

■٢ مجموع احتمالات جميع الحوادث الأولية لفضاء العينة (ع) لتجربة عشوائية = ١

فمثلاً : إذا افترضنا أن ع = { س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ، . . . ، س$_{د}$ } فإن :

حا (ع) = حا (س$_{١}$) + حا (س$_{٢}$) + حا (س$_{٣}$) + . . . + حا (س$_{د}$) = ١

■٣ مدى دالة الاحتمال (حا) هو مجموعة جزئية من الفترة [٠ ، ١] أي :

٠ ≤ حا (ا) ≤ ١ ، ∀ ا ⊂ ع

ملاحظة :

■١ إذا كانت ا ، ب حادثتين متنافيتين ؛ فإن : حا (ا – ب) = حا (ا) ، حا (ب – ا) = حا (ب)

٢ ■ من الخاصية (٤) يمكن إثبات أنه إذا كانت ﺃ ، ب حادثتين في فضاء العينة (ع) لتجربة عشوائية وكانت ب $\subset$ ﺃ فإن : $\boxed{\text{حا (ﺃ – ب) = حا (ﺃ) – حا (ب) .}}$

الفضاء الاحتمالي :

إذا كانت (حا) دالة احتمال معرَّفة على ك (مجموعة حوادث فضاء العينة ع) لتجربة عشوائية ؛ فإن الثلاثية (ع ، ك ، حا) تسمَّى الفضاء الاحتمالي لهذه التجربة .

مثال (١٠-٢٠)

إذا كان فضاء العينة لتجربة عشوائية هو : ع = { س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ ، س$_٤$ } ، بين أيٍّ من الدوال الآتية تعرّف فضاء احتماليا على (ع ، ك ، حا) ؟

أ) حا (س$_١$) = $\frac{١}{٢}$ ، حا (س$_٢$) = $\frac{١}{٤}$ ، حا (س$_٣$) = $\frac{١}{٦}$ ، حا (س$_٤$) = $\frac{١}{٢}$

ب) حا (س$_١$) = $\frac{٢}{٣}$ ، حا (س$_٢$) = $\frac{١}{٣}$ ، حا (س$_٣$) = $-\frac{١}{٣}$ ، حا (س$_٤$) = $\frac{٢}{٣}$

جـ) حا (س$_١$) = $\frac{١}{٢}$ ، حا (س$_٢$) = $\frac{١}{٤}$ ، حا (س$_٣$) = $\frac{١}{٨}$ ، حا (س$_٤$) = $\frac{١}{٨}$

هـ) حا (س$_١$) = $\frac{٣}{٥}$ ، حا (س$_٢$) = $\frac{١}{٥}$ ، حا (س$_٣$) = $\frac{١}{٥}$ ، حا (س$_٤$) = ٠

و) حا (س$_١$) = $\frac{٤}{١٥}$ ، حا (س$_٢$) = $\frac{١}{٥}$ ، حا (س$_٣$) = $\frac{٢}{١٥}$ ، حا (س$_٤$) = $\frac{١}{١٥}$

الحـــل :

أ) حا (ﺃ) = حا (س$_١$) + حا (س$_٢$) + حا (س$_٣$) + حا (س$_٤$) = $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٢} = \frac{١٧}{١٢}$

∵ حا (ﺃ) = $\frac{١٧}{١٢}$ > ١ .

∴ حا (ﺃ) ليست دالة احتمال ، وعليه فإن (حا) لا تعرّف فضاءً احتمالياً على (ع ، ك ، حا)

ب) ∵ حا (س$_٣$) = $-\frac{١}{٣}$ (عددا سالبا)

∴ حا (ب) ليست دالة احتمال وعليه فإن (حا) لا تعرّف فضاءً احتمالياً على(ع ، ك ، حا)

جـ) حا (جـ) = حا (س$_١$) + حا (س$_٢$) + حا (س$_٣$) + حا (س$_٤$) = $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{٨} = ١$

∵ قيم الدالة (حا) موجبة ومجموعها = ١

∴ حا (جـ) تمثل دالة احتمال ،وعليه فإن (حا) تعرّف فضاءً احتمالياً على (ع ، ك ، حا).

هـ) ∵ حا (س$_٤$) = ٠ .

∴ $\text{س}_{٤}$ ليس ناتجا من نواتج التجربة وهذا يناقض الفرض .

∴ حا (هـ) ليست دالة احتمالية وعليه فإن (حا) لا تعرف فضاء احتماليا على (ع ، ك ، حا) .

و ■ $\text{حا}(\text{و}) = \frac{٤}{١٥} + \frac{١}{٥} + \frac{٢}{١٥} + \frac{١}{١٥} = \frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣}$

∵ $٠ < \text{حا}(\text{و}) < ١$

∴ حا (هـ) تمثل دالة احتمال ، وعليه فإن (حا) تعرّف فضاء احتماليا على (ع ، ك ، حا) .

مثال (١٠-٢١)

لتكن أ ، ب حادثتين من ك . حا دالة احتمال معرّفة في الفضاء الاحتمالي (ع ، ك ، حا)، وكان :

$\text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{١}{٤}$ ، $\text{حا}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \frac{٣}{٤}$ ، $\text{حا}(\bar{\text{ب}}) = \frac{١}{٣}$ ،

أوجد : ١■ حا (ب) ، ٢■ حا (أ) ، ٣■ $\text{حا}(\text{أ} \cap \bar{\text{ب}})$

الحــــل :

١■ $\text{حا}(\bar{\text{ب}}) = ١ - \text{حا}(\text{ب})$

∴ $\text{حا}(\text{ب}) = ١ - \text{حا}(\bar{\text{ب}}) = ١ - \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$.

٢■ $\text{حا}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{حا}(\text{أ}) + \text{حا}(\text{ب}) - \text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب})$

∴ $\frac{٣}{٤} = \text{حا}(\text{أ}) + \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٤}$

∴ $\text{حا}(\text{أ}) = \frac{٣}{٤} - \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٤} = \frac{٩ - ٨ + ٣}{١٢} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

٣■ $\text{حا}(\text{أ} \cap \bar{\text{ب}}) = \text{حا}(\text{أ} - \text{ب}) = \text{حا}(\text{أ}) - \text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٢}$

مثال (١٠-٢٢)

لتكن أ ، ب حادثتين من ك ، «حا» دالة احتمال معرّفة في الفضاء الاحتمالي (ع ،ك ،حا) ،

و $\text{حا}(\text{أ}) = \frac{١}{٢}$ ، $\text{حا}(\text{ب}) = \frac{٧}{١٠}$ ، $\text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{٣}{١٠}$. احسب احتمال :

١■ وقوع واحدة على الأقل من الحادثتين أ ، ب . ٢■ عدم وقوع الحادثة أ .

٣■ عدم وقوع الحادثتين أ ، ب معاً . ٤■ وقوع الحادثة أ وعدم وقوع الحادثة ب .

٥■ وقوع الحادثة أ أو الحادثة ب وليس كليهما .

الحـــل :

١ ■ وقوع واحدة على الأقل من الحادثتين ا ، ب يعني الحادثة (ا ∪ ب) .

$$حا (ا ∪ ب) = حا (ا) + حا (ب) – حا (ا ∩ ب) = \frac{١}{٢} + \frac{٧}{١٠} – \frac{٣}{١٠} = \frac{٩}{١٠} .$$

٢ ■ عدم وقوع الحادثة ا يعني وقوع المتمِّمة $\overline{ا}$.

$$∴ حا (\overline{ا}) = ١ – حا (ا) = ١ – \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} .$$

٣ ■ عدم وقوع الحادثتين معاً يعني وقوع الحادثة (ا ∩ ب)´

$$∴ حا (ا ∩ ب)´ = ١ – حا (ا ∩ ب) = ١ – \frac{٣}{١٠} = \frac{٧}{١٠}$$

٤ ■ وقوع الحادثة ا وعدم وقوع الحادثة ب يعني وقوع الحادثة (ا – ب)

$$∴ حا (ا ∩ \overline{ب}) = حا (ا – ب) = حا (ا) – حا (ا ∩ ب) = \frac{١}{٢} – \frac{٣}{١٠} = \frac{١}{٥} .$$

٥ ■ وقوع الحادثة ا أو الحادثة ب وليس كليهما يعني وقوع إحدى الحادثتين فقط أي [وقوع الحادثة (ا ∪ ب) – (ا ∩ ب)] ∴ حا (ا ∪ ب) – حا (ا ∩ ب) (لأن ا ∩ ب ⊂ ا ∪ ب)

$$= \frac{٩}{١٠} – \frac{٣}{١٠} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥} .$$

تمارين ومسائل (١٠–٤ ثانياً وثالثاً)

[١] لتكن فضاء العينة لتجربة عشوائية هو : ع = { $هـ_١$ ، $هـ_٢$ ، $هـ_٣$ ، $هـ_٤$ } بيِّن أيٍّ من الدوال التالية تعرف فضاءً احتمالياً على « ع » :

أ) حا ($هـ_١$) = $\frac{١}{٤}$ ، حا ($هـ_٢$) = $\frac{١}{٢}$ ، حا($هـ_٣$) = $\frac{٣}{٨}$ ، حا ($هـ_٤$) = $\frac{١}{٨}$.

ب) حا ($هـ_١$) = $\frac{٥}{٢٤}$ ، حا ($هـ_٢$) = $\frac{٧}{٢٤}$ ، حا($هـ_٣$) = $\frac{١}{٨}$ ، حا ($هـ_٤$) = $\frac{٣}{٨}$.

جـ) حا ($هـ_١$) = $\frac{١}{٣}$ ، حا ($هـ_٢$) = – $\frac{١}{٦}$ ، حا($هـ_٣$) = $\frac{١}{٦}$ ، حا ($هـ_٤$) = $\frac{٢}{٣}$.

د) حا ($هـ_١$) = $\frac{٢}{٩}$ ، حا ($هـ_٢$) = $\frac{٥}{١٨}$ ، حا($هـ_٣$) = $\frac{١}{٦}$ ، حا ($هـ_٤$) = $\frac{١}{٣}$.

و) حا ($هـ_١$) = $\frac{١}{٢}$ ، حا ($هـ_٢$) = $\frac{١}{٦}$ ، حا($هـ_٣$) = ٠ ، حا ($هـ_٤$) = $\frac{١}{٣}$.

[٢] لتكن (ع ، ك ، حا) فضاءً احتمالياً لتجربة عشوائية ، ا ، ب ⊂ ع ، حا (ا) = ٠,٤ ، حا (ب) = ٠,٣ ، حا (ا ∪ ب) = ٠,٥ . أوجد :

١ ■ حا ($\overline{ا}$)   ٢ ■ حا ($\overline{ب}$)   ٣ ■ حا (ا ∩ ب)   ٤ ■ حا (ا ∩ $\overline{ب}$) .

[٣] إذا كان (ع ، ك ، حا) فضاءً احتمالياً لتجربة عشوائية ، وكان ﺃ ، ب $\subset$ ع ؛ بحيث أن : ﺃ $\cup$ ب = ع ،

حا(ﺃ) = $\frac{٢}{٥}$ ، حا (ب) = $\frac{٧}{١٠}$ ؛ أوجد قيمة ما يلي :

١■ حا (ﺃ $\cap$ ب) . ٢■ حا (ﺃ $\cap$ $\bar{ب}$) .

[٤] لتكن (ع ، ك ، حا) فضاءً احتمالياً لتجربة عشوائية ، ﺃ ، ب حادثتين في « ع » ،

حا (ﺃ) = ٠,٤ ، حا (ب) = ٠,٣ ، حا (ﺃ $\cap$ ب) = ٠,٢ ؛ احسب احتمال :

١■ عدم وقوع الحادثة ﺃ . ٢■ وقوع الحادثة ﺃ فقط . ٣■ عدم وقوع أي من الحادثتين ﺃ ، ب .

[٥] لتكن ﺃ ، ب حادثتين في فضاء العينة لتجربة عشوائية ، « حا » دالة احتمال معرفة على « ع » ،

حا (ﺃ) = $\frac{١}{٤}$ ، حا (ب) = $\frac{١}{٥}$ ، حا (ﺃ $\cup$ ب) = $\frac{١}{٨}$.

هل ﺃ ، ب حادثتان متنافيتان ؟ وضح السبب لإجابتك .

[٦] تقدم ثلاثة طلاب ﺃ ، ب ، جـ لامتحانٍ ما ؛ فإذا كان احتمال نجاح ﺃ ثلاثة أمثال احتمال نجاح ب ، وكان احتمال نجاح جـ نصف احتمال نجاح ﺃ ؛ احسب احتمال نجاح كلٍ من الطلاب الثلاثة .

[٧] ألقى حجر نرد متجانس بصورة عشوائية،ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي له عند استقراره على الأرض ؛ فإذا كانت :

ﺃ هي حادثة ظهور عدد أولي ، ب هي حادثة ظهور عدد أقل من ٣ .

أوجد ١■ جا ﺃ . ٢■ جا ب .

٣■ هل الحادثتان ﺃ ، ب متنافيتان ؟ وضّح السبب .

[٨] فصل دراسي به خمسة طلاب مصريون ، ٤ سوريون ، ٨ عراقيون ، ٣ أردنيون . اختير طالب بطريقة عشوائية لتمثيل الفصل .

ما احتمال أن يكون الطالب المختار : ١■ سورياً ، ٢■ أردنياً ، ٣■ عراقياً أو أردنياً .

[٩] سحبت ورقة بطريقة عشوائية من بين ٥٠ ورقة مرقمة بالأعداد من ١ إلى ٥٠ ما احتمال أن تكون الورقة المسحوبة تقبل القسمة على ٥ .

[١٠] من بين ١٢٠ طالباً يدرس ٦٠ طالباً اللغة الإنجليزية ، ٥٠ طالباً الفرنسية ، ويدرس ٢٠ طالباً الإنجليزية والفرنسية معاً . فإذا اختير طالب بطريقة عشوائية ؛ ما احتمال أن يكون الطالب المختار من دارسي اللغة الإنجليزية أو الفرنسية .

بحمد الله تعالى