وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

كتاب التمارين للصف الأول الثانوي

فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً

د. أمة الآله علي حمد الحوري
د. عوض حسين البكري
د. محمد رشاد الكوري
د. محمد حسن عبده المسوري
د. عبدالله سالم بن شحنة
د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري
د. علي شاهر القرشي
أ. مريم عبدالجبار سلمان
أ. سالمين محمد باسلوم (منسقاً)
د. محمد علي مرشد
أ. يحيى بكار مصفر
أ. عبدالباري طه حيدر
أ. نصر محمد بدر
أ. جميلة إبراهيم الرازحي
أ. عادل علي مقبل البنا
أ. عبد الرحمن عبد الله عثمان
أ. يحيى محمد الكنز

الإخراج الفني

الصف الطباعي والتصميم عبد الرحمن حسين المهرس

تدقيق التصميم : حامد عبدالعالم الشيباني

١٤٣٥هـ/ ٢٠١٤م

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

د. عبدالله عبده الحامدي.	أ/ علي حسين الحيمي.
د/ صالح ناصر الصوفي.	د/ أحمد علي المعمري.
أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.	أ.د/ صالح عوض عرم.
أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.	د/ إبراهيم محمد الحوثي.
د/ عبدالله علي أبو حورية.	د/ شكيب محمد باجرش.
د/ عبدالله لملس.	أ.د/ داوود عبدالملك الحدابي.
أ/ منصور علي مقبل.	أ/ محمد هادي طواف.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.	أ.د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
أ.د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.	أ/ محمد عبدالله زبارة.
أ.د/ محمد حاتم المخلافي.	أ/ عبدالله علي إسماعيل.

د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

قررت اللجنة العليا للمناهج طباعة هذا الكتاب .

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم

في إطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية.

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات.

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها: الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبمايتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي.

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها.

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدروسة لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية.

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول

وزير التربية والتعليم

رئيس اللجنة العليا للمناهج

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين محمد بن عبدالله الصادق الأمين وبعد،

فإننا نضع هذا الكتاب وهو «كتاب التمارين» بين أيدي أبناءنا الطلبة في الصف الأول الثانوي آملين أن يجدوا فيه الفائدة المرجوة.

إن هذا الكتاب وما يحتويه من تمارين على وحدات الكتاب المدرسي بجزئيه الأول والثاني يحتوي بعض التمارين المشابهة لما ورد في كتاب الطالب والبعض الآخر إثرائي، حيث أن بعض التمارين المتضمنة فيه متعددة الأفكار والمستويات، وتختلف بعض الشيء عما هو في كتاب الطالب.

وعليه فإن كتاب التمارين يحتوي على تمارين ومسائل وتطبيقات إضافية كما في كتاب الطالب.

ولهذا يرى فريق التأليف أن يُكلِّف المدرس طلبته بحل تمارين ومسائل الوحدات المقابلة لوحدات الكتاب المدرسي وخاصة عند الانتهاء من تدريس الوحدة وتحضيراً لاختبار الوحدة والاختبارات الشهرية.

ولهذا فإننا ننظر بشوق بالغ أن يوافينا كافة المدرسين والموجهين والمعنيين بالأمر بملاحظاتهم حول فكرة هذا الكتاب (كتاب التمارين) للاستفادة منها.

وفقنا الله جميعاً فهو ولي التوفيق والهادي إلى سواء السبيل..

المؤلفون

المحتويات

الموضـــوع الصفحة

- الوحـــدة الأولى : المنطق الرياضي ٦
- الوحـدة الثـانيـة : التطبيقات ٩
- الوحـدة الثـالثـة : القوى والجذور ١٣
- الوحـدة الرابعـة : الحدوديات ٢٠
- الوحـدة الخـامسـة : البنى الجبرية ٢٣
- الوحـدة السـادسـة : المعادلات والمتراجحات ٢٧
- الوحـدة السـابعـة : حساب المثلثات ٣٢
- الوحـدة الثـامنة : الهندسة الاحداثية والتحويلات ٣٦
- الوحـدة التـاسـعـة : المتجهات ٤٢
- الوحـدة العـاشـرة : الإحصاء ٤٦

تمارين عامة ومسائل

١) أي من العبارات الآتية صائبة وأي منها خاطئة مع تصويب الخطأ أينما وجد .

أ) لأي قضيتين ا، ب يكون ~ (ا ∧ ب) ≡ ~ ا ∨ ~ ب.

ب) نفي القضية « بعض الطلاب غائبون » هو القضية « كل الطلاب غائبون » .

جـ) إذا كانت ا قضية صائبة وَ ب قضية خاطئة فإن القضية (ا ← ب) خاطئة .

د) لأي قضيتين ا ، ب يكون : ا ↔ ب ≡ (ا ← ب) ∧ (ب ← ا) .

هـ) لأي قضيتين م ، ن : (م ≡ ن) ⟸ (م ← ن) .

٢) القضيتان التاليتان صائبتان :

الأولى : س = ٢ جذر للمعادلة (س−٢) (س−٣)= ٠

الثانية : س = ٣ جذر للمعادلة (س−٢) (س−٣)= ٠

بيّن أيّ القضايا التالية صائبة وأيها خاطئة :

أ) جذرا المعادلة (س − ٢) (س − ٣) = ٠ هما ٢ وَ ٣

ب) أحد جذري المعادلة (س−٢) (س−٣)= ٠ هو ٢ أو ٣

جـ) أحد جذري المعادلة (س−٢) (س−٣)= ٠ هو ١ أو ٣

د) جذرا المعادلة (س − ٢) (س − ٣) = ٠ هما −١ وَ ٤

هـ) أحد جذري المعادلة (س−٢) (س−٣)= ٠ هو −١ أو ٤

٣) هل القضيتان ا ← ب ، ب ← ا متكافئتان؟ علل إجابتك .

٤) أعط مثالاً توضح فيه أن صواب الاقتضاء ا ⟸ ب لا يؤدي بالضرورة إلى صواب الاقتضاء ب ⟸ ا

٥) لأي ثلاث قضايا ا، ب ،جـ بين أن كلاً من القضايا التالية صائبة منطقياً :

أ) (ا ∧ ب) ← ب ب) (ا ∧ ب) ← ب

جـ) [(ا ← ب) ∧ (ب ← ا)] ← (ا ← جـ)

٦ لأيّ قضيتين ا ، ب أثبت أن :

ا ↔ ب ≡ (~ ا ∨ ب) ∧ (~ ب ∨ ا) ≡ (ب ↔ ا)

٧ لتكن س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } عيّن قيم صواب كلٍ من القضايا الآتية :

أ) ∀ س ∈ س : س + ٣ > ٦

ب) ∃ س ∈ س : س + ٣ > ٦

جـ) ∀ س ∈ س : س^{٢} − ١٠ ≥ ٨

د) ∃ س ∈ س : ٢س^{٢} + س = ١٥

٨ اكتب نفي كلٍ من القضايا الواردة في التمرين (٧)، وبيّن قيمة صوابها .

اختبار الوحدة

السؤال الأول

في كل من الأسئلة الفرعية التالية، حوِّط الرقم الذي يرمز للإجابة الصحيحة .
(بعض الأسئلة لها أكثر من إجابة صحيحة) :

١ أي من القضايا التالية هي نفي للقضية « كل الناس أغنياء » :

أ) بعض الناس أغنياء .
ب) بعض الناس فقراء .
جـ) بعض الناس ليسو أغنياء .
د) لا أحد غني .

٢ في أي من الحالات الآتية تكون القضية (ا ∧ ~ ب) صائبة :

أ) ا صائبة وَ ب خاطئة .
ب) كلٌ من ا ، ب صائبة .
جـ) ا صائبة وَ (~ ب) صائبة .
د) كلٌ من ا ، ب خاطئة .

٣ في أي من الحالات الآتية تكون القضية (~ ا ← ب) خاطئة :

أ) كلٌ من ا ، ب خاطئة .
ب) ا صائبة وَ ب خاطئة .
جـ) ا خاطئة وَ ب صائبة .
د) كلٌ من ا ، ب صائبة .

٤ أي من القضايا التالية تكافئ منطقياً القضية (ا ∨ ~ ب)

أ) ~ ا ∨ ب .
ب) ب ← ا .
جـ) ~ ا ∧ ب .
د) ~ (ا ∧ ب) .

٥) إذا كانت س = {٢، ٣، ٥ ، ٧} فأي من القضايا التالية هي قضية صائبة :

أ) ∀ س ∈ س : س عدد فردي

ب) ∀ س ∈ س : س عدد أولي

جـ) ∃ س ∈ س : س عدد زوجي

د) ∃ س ∈ س : س ليس أولياً

السؤال الثاني اكمل القضايا الآتية بحيث تصبح القضايا (١-٣) صائبة والقضايا (٤-٦) خاطئة :

١) العدد ١٢ عدد زوجي ويقبل القسمة على ...

٢) العدد – ٥ عدد طبيعي أو عدد ...

٣) ٥ < ٧ ← القمر يدور حول ...

٤) تدور الأرض حول ... أو حول ...

٥) ١٥ = ٥ × ٣ وَ ١٥ = ... + ...

٦) ... ∈ ص : س + ٢ = ٢ + س = ٠ (استخدم أحد الرمزين (∀ أو ∃)

السؤال الثالث اكمل الجدول التالي، ثم استخدمه في الإجابة عن الأسئلة التالية له :

أ	ب	~أ	~ب	أ ∨ ب	أ ∨ ~ب	~(أ ∨ ~ب)	~أ ∧ ب	أ ← (أ ∨ ب)
ص	خ	خ	خ					
ص	ص	خ	ص					
خ	خ	ص	خ					
خ	ص	ص	ص					

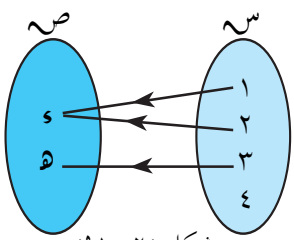
١) استنتج من الجدول قضية مركبة صائبة منطقياً .

٢) بيّن أن : ~أ ∧ ب ≡ ~(أ ∨ ~ب)

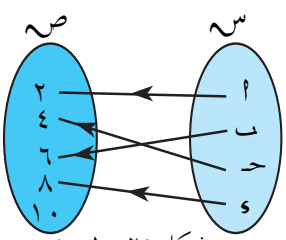
٣) هل القضية أ ∨ ~ب صائبة منطقياً ؟

تمارين عامة ومسائل

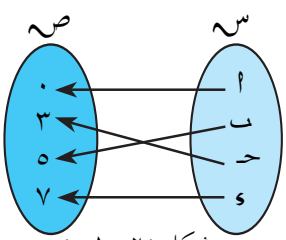
١ أيّ المخططات السهمية الآتية تمثّل تطبيقاً وبيّن نوعه :



شكل (٢– ١أ)

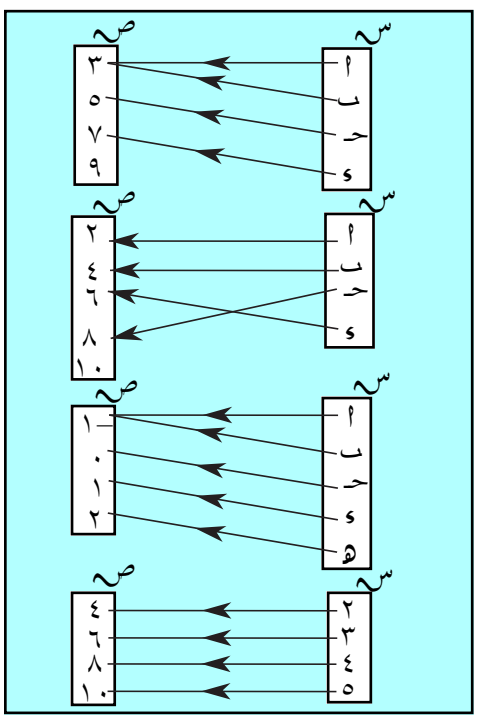


شكل (٢– ١ب)



شكل (٢– ١جـ)

٢ صل كل تطبيق من العمود (أ) بنوعه من العمود (ب) فيما يأتي :

العمود (أ)	العمود (ب)
	متباين وليس غامر
	غامر وليس متباين
	تقابل
	ليس متباين وليس غامر

٣ الجدول التالي يمثّل التطبيق ت : س ← ص حيث س = {٣، ٥، ٧، ٩، ١١} ،
ص = {٦، ٨، ١٠، ١٢، ١٤}

س	٣	٥	٧	٩	١١
ت(س)	٦	٨	١٠	١٢	١٤

أ) أكمل : ت (٣) = ٣ + ...
ت (٥) = ٥ + ...
ت (٧) = ٧ + ...

ب) أوجد قاعدة هذا التطبيق. جـ) بيّن نوعه.

د) أوجد ت$^{-1}$(٨) ، ت$^{-1}$(١٢) ، ت$^{-1}$(١٤).

هـ) هل معكوس التطبيق ت تطبيق؟ أوجد قاعدته إن وجد.

٤ ليكن التطبيق ت : س ← ص معرفاً بالقاعدة ت (س) = س + ٧ ، حيث :
س = {٣، ٥، ٧} ، ص = {١٠، ١٢، ١٤، ١٥}.

أ) عبّر عن التطبيق كأزواج مرتبة.

ب) أوجد مدى هذا التطبيق.

جـ) هل هذا التطبيق تقابل؟

د) أوجد ت$^{-1}$(١٥) ، ت$^{-1}$(١٢).

هـ) هل معكوس التطبيق ت تطبيق؟

٥ ليكن التطبيقان ت ، هـ معرفين كالآتي :
ت : ط ← ط ، ت(س) = س + ٢ ،
هـ : ط ← ط ، هـ(س) = ٢س ،

أ) ما نوع كل منهما؟

ب) أوجد قاعدة ت$^{-1}$ ، هـ$^{-1}$.

جـ) أوجد (ت ○ هـ) (س) ، (هـ ○ ت) (س) ، (ت$^{-1}$ ○ هـ$^{-1}$) (س) ،
(هـ$^{-1}$ ○ ت$^{-1}$) (س).

٦ إذا كانت ل = {أ ، ب ، جـ} ، م = {١، ٣، ٥ } كوّن في كلِ مرة تطبيقاً مجاله ل ومجاله المقابل م ، بحيث تكون :

أ) ثابتاً ، ب) متبايناً، جـ) غامراً ، د) تقابلاً ، هـ) غير متباين، و) غير غامر.

٧ ليكن التطبيق ت : س ← ص معرّفاً بالقاعدة ت (س) = س + ٢ ، حيث
س = {س : س ∈ ط ، ٥ ≤ س ≤ ٩}، ص = {ص : ص ∈ ط ، ٧ ≤ ص ≤ ١١}
اثبت أن : ت$^{-١}$ تطبيق وأوجد قاعدته .

٨ إذا كان التطبيق ت$_١$: ح ← ح معرفاً بالقاعدة ت$_١$ (س) = س^٢ + ١ والتطبيق
ت$_٢$: ح ← ح معرفاً بالقاعدة ت$_٢$ (س) = س + ٢ .
أ) أوجد قاعدة (ت$_١$ ○ ت$_٢$) (س) ، (ت$_٢$ ○ ت$_١$) (س) وقارن بينهما .
ب) أوجد (ت$_١^{-١}$ ○ ت$_٢^{-١}$) (س) ، (ت$_٢^{-١}$ ○ ت$_١^{-١}$) (س) .
جـ) أوجد (ت$_١$ ○ ت$_٢$) (٣) ، (ت$_١^{-١}$ ○ ت$_٢^{-١}$) (٥) .

٩ ما نوع التطبيق هـ : ط ← ط المعرف بالقاعدة هـ (س) = ٧ .

١٠ ما نوع التطبيق ت : س ← ص المعرف بالقاعدة ت (س) = س٢ .

١١ ليكن التطبيق ت : ط ← ط معرفاً بالقاعدة ت (س) = س ،
أثبت أن التطبيق ت تقابل .

١٢ إذا كان التطبيق ت : س ← ح [حيث س مجموعة الأعداد الزوجية] معرفاً
بالقاعدة ت (س) = س^٢
أ) أوجد ت (٢) ، ت (١٨) ، ت (١١٢) .
ب) أوجد ت$^{-١}$ (٢٥) ، ت$^{-١}$ (٣٤) .
جـ) هل ت$^{-١}$ تطبيق؟ أوجد قاعدته إن وجد .

١٣ ليكن التطبيق ت : ح ← ح معرفاً بالقاعدة ت (س) = ٣ س
أ) بيّن نوع هذا التطبيق .
ب) أوجد التطبيق العكسي له .

١٤ هل من الممكن أن يكون التطبيق الثابت غامراً .

١٥ ليكن التطبيق ت : ح ← ح معرفاً بالقاعدة ت (س) = ٣ س – ٣
أثبت أن ت تقابل وأوجد قاعدة التطبيق العكسي .

١٦ ليكن هـ : ح ← ح معرفاً بالقاعدة هـ (س) = ٣ س + ٥
أثبت أن التطبيق هـ تقابل ثم أوجد قاعدة التطبيق العكسي .

١ بيّن نوع التطبيق ت : ح ← ح والمعّرف بالقاعدة ت (س) = ٢س + ٥ .

٢ ليكن التطبيق هـ: صـ ← صـ معرفاً بالقاعدة هـ (س) = ٤ س + ٣ ،

أ) أوجد هـ$^{-١}$ (٥) ، هـ$^{-١}$ (– ٣) ، هـ$^{-١}$ (– ص) .

ب) هل معكوس التطبيق هـ تطبيق؟ أوجد قاعدته إن وجد .

٣ إذا كان التطبيق وـ: ح ← ح والمعرف بالقاعدة وـ (س) = س +١ والتطبيق ت : ح ← ح والمعرّف بالقاعدة ت (س) = ٣س + ٤ .

أ) اثبت أن (وـ ○ ت) (س) = (ت ○ وـ) (س)

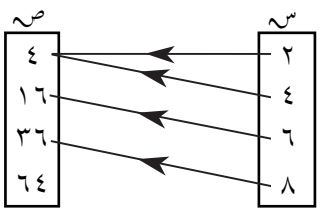
ب) أوجد (ت ○ وـ) (٣)

٤ ليكن ت : سـ ← صـ تطبيقاً موضحاً بالمخطط السهمي شكل (٢–٢)

أ) أوجد ت$^{-١}$(٤) ، ت$^{-١}$ (٦٤) .

ب) اكتب التطبيق ت كأزواج مرتبة .

جـ) هل معكوس التطبيق ت تطبيقٌ؟ لماذا؟



شكل (٢–٢)

تمارين عامة ومسائل

٣ : ١ القوى

١ بسِّط ما يأتي : علماً بأن المتغيرات أعداد حقيقية لا تساوي الصفر

أ) $(٢ أ^{٢} ب)(٢ أ ب^{٢})$

ب) $(س ص^{٣} ع)^{٢} (أ س ص)^{٣}$

جـ) $(٢ ب^{٥})^{٢} - (٣ ب^{٢})^{٣} ب^{٢}$

د) $(٣ س^{-٤})(٢ س^{-٥})$

هـ) $(-٥ س^{٣})(-٦ س^{٥})$

و) $(٤ أ^{٢} ب^{٣})(٢ أ^{٣} ب)$

ز) $\frac{-٣ س^{٤} ص^{-٢}}{٩ س^{-٨} ص^{٦}}$

ح) $\frac{-٢ س (س + ١)^{د}}{(س + ١)^{٢ د}}$

ط) $\frac{(أ^{٢})^{٤}}{(أ^{٤})^{٢}}$

ي) $\frac{٣}{(٢ س + ١)^{٠}}$

ك) $(٢ س^{٣} ص^{-٤})^{٢} (س^{-٢} ص)^{٣}$

ل) $\frac{٢ - ٣ أ^{٠} ب^{-٣} جـ^{٢}}{٤^{-١} أ^{-٣} ب^{-٢} جـ^{-٥}}$

٢ ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة باعتبار المتغيرات أعداداً حقيقية لا تساوي صفراً

أ) $\left(\frac{س^{-٣}}{س^{-٤}}\right)^{-١}$

ب) $\left(\frac{٣ س^{٢} ص^{٣}}{٢}\right)^{د}$

جـ) $(٢ س + ١)^{٣} (٢ س + ١)^{٢}$

د) $٢^{٠} + ٣^{-١}$

هـ) $\left(\frac{١}{٢} س^{٣} ص^{-٤}\right)^{-٣}$

و) $\frac{٣ أ^{٥} ب^{-٢}}{٩ أ^{-٤} ب^{٢}}$

ز) $(٣ أ^{-٢} ب^{-٣})^{-٢}$

ح) $\left(\frac{٢ أ^{٢} ب^{-٤}}{أ^{-٣} ب^{-٣}}\right)^{د}$

ط) $\frac{(أ + ب)^{-١}}{(أ + ب)^{-٢}}$

ي) $\frac{أ^{-١} + ب^{-١}}{أ^{-١} - ب^{-١}}$

ك) $[(س + ص)^{-٢}]^{٢}$

ل) $(٢ أ^{٢} - ١)^{٠}$

٢ : ٣ الجذور والأسس النسبية

١ اختصر ما يأتي : بفرض أن كل المتغيرات $\in$ ح + ولا تساوي صفراً .

أ) $٢^{\frac{١}{٢}} \cdot ٢^{\frac{١}{٢}}$ ب) $ب^{\frac{٣}{٤}} \cdot ب^{\frac{٢}{٣}}$ حـ) $(أ^{\frac{٢}{٣}})^{\frac{٤}{٥}}$

د) $(أ^{\frac{٣}{٤}})^{٤}$ هـ) $(١٦ ص^{٤})^{\frac{٣}{٤}}$ و) $(ص^{-\frac{٢}{٣}})^{٣}$

ز) $(١٦ أ^{١٠} ب^{٢})^{\frac{٣}{٤}}$ ح) $(ب^{-\frac{٢}{٣}})^{-\frac{١}{٣}}$ ط) $\frac{أ^{\frac{١}{٣}}}{أ^{\frac{٥}{٦}}}$

٢ بسِّط ما يأتي : بفرض أن المتغيرات $\in$ ح + والمقام لا يساوي صفراً .

أ) $\frac{س ص^{\frac{٣}{٤}}}{س^{\frac{١}{٢}} س^{\frac{١}{٤}}}$ ب) $\frac{س^{-\frac{١}{٢}} س}{س^{\frac{١}{٣}}}$ حـ) $\frac{حـ^{\frac{٢}{٣}} حـ^{\frac{٣}{٤}}}{حـ^{-\frac{١}{٣}}}$

د) $\frac{س^{-\frac{١}{٢}} ص^{\frac{٥}{٤}}}{س^{-\frac{٢}{٣}} ص^{\frac{٣}{٤}}}$ هـ) $(أ^{\frac{١}{٢}} ب^{-٢})^{-٢}$ و) $(\frac{س^{\frac{١}{٣}} ص^{\frac{٢}{٣}}}{ع^{\frac{٥}{٦}}})^{١٢}$

ح) $(-١٢٥)^{-\frac{٢}{٣}}$ ز) $\frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{س^{\frac{٢}{٣}}}$

٣ : ٣ تبسيط الجذور

١ بسِّط ما يأتي : (جميع المتغيرات $\in$ ح+) .

أ) $\sqrt[٣]{٩ أ^{٢} ب}$ $\sqrt[٣]{٩ أ ب}$ ب) $\sqrt[٩]{س^{٣} ص^{٦}}$ حـ) $\sqrt[٣]{٣٢}$

د) $\sqrt[٦]{٢٧}$ هـ) $\sqrt{٢٠}$ و) $\sqrt[٣]{٢٤}$

ز) $\sqrt[٤]{٥ أ}$ ح) $\sqrt{٢٥ س^{٣} ص^{٩}}$ ط) $\sqrt[٣]{٥٤}$

ي) $\sqrt{٥٠ أ^{٦} ب حـ^{٩}}$ ك) $\sqrt[٣]{٢٧ أ^{٣} ب^{٢} حـ^{١٢}}$ ل) $\sqrt{\frac{١}{٥}}$

٢ ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة (جميع المتغيرات ∋ ح+ والمقام لا يساوي صفراً) :

أ) $\frac{\text{س}}{\sqrt[٤]{\text{س}}}$ ب) $\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}}$ جـ) $\sqrt[٥]{\frac{٣٢}{٨١}}$

د) $\sqrt[٣]{\frac{٢٧}{٤}}$ هـ) $\sqrt[٣]{\frac{\text{س ص}}{\text{س ص}^{٢}}}$ و) $\sqrt[٣]{\frac{\text{ب}^{٢}\text{جـ}}{\text{ب}^{٤}\text{جـ}^{٣}}}$

ز) $\sqrt{\frac{٢\text{ص}}{\text{س}}} \times \sqrt{\frac{\text{س}^{٢}}{٨}}$ ح) $\sqrt[٣]{\frac{١٦}{\text{ب}^{٤}}} \times \sqrt[٣]{\frac{\text{أ}^{٧}}{٢}}$ ط) $\frac{\sqrt{٨}}{\sqrt[٣]{٤}}$

٣ : ٤ جمع وطرح الجذور

١ ضع كلاً ما يأتي في أبسط صورة : (المتغيرات ∋ ح+ والمقام لا يساوي صفراً) .

أ) $\sqrt{٤} - \sqrt{٣} + \sqrt[٣]{٣} + \sqrt[٣]{٧}$ ب) $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٠}$

جـ) $\sqrt{٩} + \sqrt[١٨]{\text{أ}^{١٨}}$ د) $\text{س}^{٢}\sqrt{٥\text{ س ص}} - \text{س}\sqrt{٢\text{ س}^{٣}\text{ص}}$

هـ) $\frac{٥}{\sqrt{٦}} - \frac{١}{\sqrt{٣}}$ و) $\frac{٢}{\sqrt[ب]{\text{أ}^{ب}}} - \frac{١}{\sqrt{\text{أ}}}$

ز) $\sqrt[٣]{٨١} - \sqrt[٣]{٢٤}$ ح) $\sqrt[٣]{٨١} + ٢\sqrt[٣]{٧٥٠}$

ط) $\sqrt[٤]{٢٥٦\text{ ب}^{٣}} - \sqrt[٤]{٨١\text{ ب}^{٣}}$ ي) $\sqrt{١٦} + \sqrt[٤]{٨١}$

٢ بسِّط ما يأتي : (كل المتغيرات ∋ ح+ والمقام لا يساوي صفراً) .

أ) $\frac{٢}{\sqrt{٢}} + \frac{٣}{\sqrt[ب]{\text{أ}^{ب}}}$ ب) $\frac{٥}{\sqrt{١٩}} - \frac{٢}{\sqrt{٢}}$

جـ) $\frac{٢}{\sqrt{١٨\text{س}^{٢}}} - \frac{٤}{\sqrt{٥٠\text{س}^{٢}}}$ د) $\frac{٥}{\sqrt{\text{س ص}}} - \frac{٤}{\sqrt{\text{س}}}$

٣ : ٥ ضرب وقسمة الجذور

١ أوجد ناتج ما يأتي : (علماً بأن المتغيرات ∋ ح + والمقام لا يساوي صفراً)

أ) $\sqrt{٢}\left(\sqrt{٦} - \sqrt{١٠}\right)$ ب) $٢\sqrt{٢}\left(\sqrt{\text{أ}^{ب}} + ٢\sqrt{٢}\right)$

جـ) $\left(-٥\sqrt{٥}\right)^{٢}$ د) $\left(\sqrt{١٠} - \sqrt{٧}\right)\left(\sqrt{١٠} + \sqrt{٧}\right)$

هـ) $(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{ب})(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\sqrt{ب})$ و) $(\sqrt{3}\sqrt{س}+ص)^2$

ز) $\frac{1}{\sqrt{6}+2}$ ح) $\frac{15}{\sqrt{6}+4}$

ي) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ ك) $\frac{2ب^2}{\sqrt{2}ب-\sqrt{2}}$

٣ : ٦ حل المعادلات الأسية والجذرية

١ حل المعادلات الآتية :

أ) $2^{4س}-12\times2^{2س}+32=0$ ب) $3^{5س}-243=0$

حـ) $(5س)^{س+3}=1$ د) $5^{2س}-6\times5^{س}+25=0$

هـ) $7^{2س}-8\times7^{س}+7=0$ و) $(36)^{س-1}-7\times(6)^{س-1}+6=0$

ز) $2^{س^2-2س+1}=3^{س^2-2س+1}$

٢ أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :

أ) $(س-3)^{\frac{1}{3}}=5$ ب) $ص=\sqrt{ص+20}$

حـ) $\sqrt{3س+5}+1=3س$ د) $\sqrt{ص+2}+1=\sqrt{ص+6}$

هـ) $\sqrt{5س}+2س=\sqrt{20س}+5$ و) $\sqrt{2س}-\sqrt{4-3س+4}=5$

ز) $\sqrt{5س-1}-\sqrt{س+2}=1$ ح) $س+\sqrt{س+5}=7$

ط) $7^{س^3-1}=5^{س^3-1}$ ي) $7^{س}(س^2-1)=5^{س}(س^2-1)$

٣ حل ما يأتي :

أ) $(س+1)^{\frac{1}{3}}=2$ ب) $\sqrt[3]{(س+2)}-3=1$

حـ) $\sqrt[4]{س+2}=3$

تمارين متنوعة

١ اكتب ما يلي في أبسط صورة:

أ) $(١,٠٤)^{٩} \times (١,٠٤)^{-٥}$

ب) $\frac{(١,٠٥)^{١٠}}{(١,٠٥)^{١٤}}$

حـ) $\frac{(-٢)^{٤} - (-٥)^{٣}(-٣)^{٢}}{(-٦)^{٢}(-١٥)^{٣}}$

د) $\frac{٤٢ \times ٣١٥ \times (-٥٤)}{٣٦ \times ٢٥ \times (-٣)^{٢}}$

هـ) $\sqrt[٦]{\frac{١}{ب^{٢}}}$ ، $ب > ٠$

و) $ب^{\frac{٥}{٣}} \times ب^{-\frac{١}{٣}} \times ب^{\frac{٢}{٣}}$

ز) $\sqrt{١٤٧}$

ح) $\sqrt{٣٨٨٨}$

ط) $\sqrt[٤]{١٦ ب^{٨}}$

ك) $\sqrt[٣]{-٢٧ \times ٦٤}$

ل) $\sqrt{٣} \times \sqrt{١٢} \times \sqrt{٧٢} \times \sqrt{١٠٨}$

٢ احسب ناتج ما يلي:

أ) $\sqrt[٣]{-٠,٠٠٨}$

ب) $\sqrt[٣]{\frac{١}{٧}} \times \sqrt[٣]{\frac{١}{٢٧}}$

حـ) $\frac{\sqrt{٦٠} \times \sqrt{٢٤}}{\sqrt{٤} \times \sqrt{٥}}$

د) $(٨١)^{\frac{١}{٤}}$

هـ) $(٠,٠٠٨)^{-\frac{١}{٣}}$

و) $(-٨)^{\frac{٣}{٥}}$

٣ احسب القيمة العددية لكل من المقادير الآتية:

أ) $س + ٢\sqrt{س ص}$

ب) $(س + ٣)\sqrt{س ص}$

حـ) $(س + ٣)\sqrt{٣س - ص}$

د) $(س + ٣)\sqrt{س + ص}$

أولاً: عندما س = ٥ ، ص = ٤ ثانياً: عندما س = ٤ ، ص = ٥

٤ اختصر ما يلي :

أ) $\sqrt{٨} + \sqrt{١٨} - \sqrt{٥٠}$

ب) $\sqrt[٣]{٨١} + \sqrt[٣]{-٢٤} - ٣\sqrt[٣]{\frac{١}{٩}}$

حـ) $\sqrt[٣]{٤ \times ١٦}$

د) $\frac{\sqrt[٣]{١٢}}{\sqrt{٢}}$

هـ) $\frac{٥}{\sqrt{٢}}$

و) $\frac{٧}{٢ + \sqrt{٥}}$

ز) $\frac{\sqrt{س} - \sqrt{ص}}{\sqrt{س} + \sqrt{ص}}$

ح) $\frac{١ + ٣\sqrt{٢}}{-١ + \sqrt{٢} + \sqrt{٥}}$

٥ رتب الجذور الآتية تنازلياً :

أ) $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt[٣]{٣}$ ، $\sqrt[٤]{٥}$

ب) $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt[٥]{٧}$ ، $\sqrt[١٠]{١٠٠}$

٦ رتب الجذور الآتية تصاعدياً :

أ) $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt[٣]{٩}$ ، $\sqrt[٤]{١٢}$

ب) $\sqrt[٤]{٥}$ ، $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt[٣]{٣}$

٧ حل المعادلات الآتية :

أ) $\sqrt{٢س^{٢} + ٧س} = س + ٢$

ب) $\sqrt{س - ١} = ٢(س - ٤)$

حـ) $\sqrt[٣]{س^{٢} - ٢س} - ٢ = ٠$

د) $\sqrt{٣ + س} - \sqrt{١٠ - س} = ٥$

هـ) $٢٠ د^{٢} \times ٢ د^{-٢} = ١٦$

و) $(٣س)^{س+٤} = ١$

ز) $٢^{٣(س+٢)} = ٢^{س+١}$

٨ اثبت أن :

$$\frac{٥ \times ٣ د^{٢} - ٤ \times ٣ د^{٢-١}}{٢ \times ٣ د^{٢+١} - ٣ د^{٢}} = \frac{١١}{١٥}$$

١ ضع ما يأتي في أبسط صورة: (علماً بأن المتغيرات في المقام ≠ ٠)

أ) $\frac{أ^{٣}\ ب^{-٤}}{(٢أ\ ب^{٢})^{٢} \times أ^{٢}}$

ب) $\frac{٩^{\ س٢} \times ٢٧^{\ س٣ + ١}}{٣^{\ س٥} \times ٣^{\ س١٥ + ١}}$

جـ) $(٢س^{-١}ص^{٢})^{٣}\ (٨^{-١}س^{٢}ص^{-٦})$

٢ بسّط ما يأتي:

أ) $\sqrt[٣]{٨} - \sqrt[٣]{١٦} + \sqrt[٦]{٦٤}$

ب) $\sqrt{١٢٥} + ٢\sqrt{٧٥} - ٣\sqrt{٦٢٥}$

٣ بسّط ما يأتي:

أ) $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})$

ب) $(\sqrt{٧} + \sqrt{٥})^{٢}$

جـ) $\frac{١ + ٢\sqrt{٣}}{\sqrt{٦} + \sqrt{٣}}$

د) $\frac{س + ٢}{٢\sqrt{س} + ٣\sqrt{ص}}$ ، س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، س ، ص ≠ ٠

٤ حل المعادلات الآتية:

أ) $٨^{\ س + ١} = ٣٢$

ب) $٥ = \frac{١}{٢}(٣س + ٢)$

جـ) $٢^{\ س^{٢} - ٢س + ١} = ١٥^{\ س^{٢} - ٢س + ١}$

د) $٢^{\ س} \times ٢^{\ -٣س} = (\frac{١}{٢})^{-١٦}$

هـ) $\sqrt[٣]{٢س + ٢} = ٣$

تمارين عامة ومسائل

١ أكتب الحدوديات التي معاملاتها :

أ) $أ_٨ = ٧$ ، $أ_٧ = ١$ ، $أ_٤ = ٣$ ، $أ_٦ = أ_٥ = ٠$ ، $أ_٣ = أ_٢ = ٢$ ، $أ_١ = أ_٠ = ١$

ب) $أ_٣ = ٢$ ، $أ_٤ = ٧$ ، $أ_٢ = أ_٠ = ٠$ ، $أ_١ = ٥$

جـ) $أ_٠ = ١$ ، $أ_١ = أ_٢ = ٤$

٢ حدد الدرجة لكل حدودية مما يأتي وبين المعامل الرئيس والحد المطلق لكل حدودية :

أ) $س^٣ + ٢س - ٣$ ب) $٤س^٢ + ٦س^٣ - ٢س - ٣$

جـ) $س^٣ + س^٢ - ٨س + ٦$

٣ أوجد القيمة العددية لكل حدودية مما يأتي :

أ) $س^٢ + ٣س + ٢$ عندما $س = ١$

ب) $٣س^٣ + س^٢ + ٦س + ٦$ عندما $س = -١$

جـ) $٣س^٤ + ٢س^٣ + ٢س - ٣$ عندما $س = \frac{١}{٢}$

٤ إذا كانت $ح_١$ هي $٥س^٣ - ٧س^٢ + ٤س + ٣$ ، $ح_٢$ هي $٣س^٤ - ٢س^٣ + س^٢ - ٧$

أوجد :

أ) $ح_١ + ح_٢$ ب) $ح_١ + ح_٢$ جـ) $ح_١ + ح_٢$

د) $ح_٢^٢$ هـ) $٢ ح_١ + \frac{١}{٣} ح_٢$

٥ إذا كانت حـ٢ عاملاً من عوامل حـ١ في كل مما يأتي فأوجد العامل الآخر:

أ) حـ١ هي س٢ – ٤ ، حـ٢ هي س – ٢

ب) حـ١ هي – ٤س٥ – ٢٠س٣ + ١٠ ، حـ٢ هي س٢ + ٢

جـ) حـ١ هي س٣ – ٦س٢ – ١٣س + ٤٢ ، حـ٢ هي س٢ – ٧

د) حـ١ هي س٣ – ٢س٢ – ١٣س – ١٠ ، حـ٢ هي (س – ٥)

هـ) حـ١ هي س٣ – ٢س٢ – ٥س + ٦ ، حـ٢ هي (س + ٢)

٦ أوجد في كل مما يأتي خارج وباقي قسمة حـ١ على حـ٢ :

أ) حـ١ هي س٤ – ٢س٣ + ٢ ، حـ٢ هي ٣س – ٦

ب) حـ١ هي ٢س٣ + س٢ – ٤ ، حـ٢ هي ٢س + ٣

جـ) حـ١ هي (٢س٣ – ٣س٢ + س – ٢) ، حـ٢ هي (٣ س٢ – ٢)

د) حـ١ هي ٦س٥ – ١٩س٤ + ٢١ س٣ – ١٤س٢ + ٥س – ١ ،
حـ٢ هي (٣س٢ – ٢س + ١)

٧ أوجد قيمة كل من أ، ب التي تجعل حـ١ تقبل القسمة على حـ٢ في كل مما يأتي :

أ) حـ١ هي ٢س٣ + س٢ – ٢ ب س + أ ، حـ٢ هي س٢ – ١

ب) حـ١ هي س٤ + أ س + ب ، حـ٢ هي س٢ – ٢س

٨ حدد فيما إذا كان أ صفراً من أصفار الحدودية المعطاة في كل مما يأتي :

أ) ٢س٦ – ٤س٥ + ٢س – ٤ ، أ = ٢

ب) ٣س٧ + ٦س٣ + ٥ ، أ = ١

جـ) س٢ – ٢ ، أ = – $\sqrt{٢}$

٩ أوجد أصفار كل من الحدوديات التالية واكتبها على شكل عوامل:

أ) ٦س٢ – س – ١ ب) س٣ + ٥س٢ – ٥

جـ) س٣ + س٢ – ٨س – ١٢ د) س٣ + ٦س٢ + ١١س + ٦

هـ) س٣ – ٢س٢ – ١٣س – ١٠

اختبار الوحدة

١ أ) اكتب الحدودية التي معاملاتها:

أ٥ = ٣ ، أ٤ = أ٣ = ٠ ، أ٢ = ٧ ، أ١ = –٣ ، أ٠ = ١

ب) إذا كانت حـ١ هي س٣ – ١٣س – ٢س٢ – ١٠ ،

حـ٢ هي س٢ – ٣س – ١٠ فأوجد:

١) ٢حـ١ + حـ٢ ٢) حـ٢ . حـ١ ٣) حـ١ ÷ حـ٢

٢ بيّن فيما إذا كانت حـ١ تقبل القسمة على حـ٢ أم لا في كل مما يأتي:

أ) حـ١ هي ٣س٤ – س٣ ، حـ٢ هي س٢ + ١

ب) حـ١ هي ٣س٣ + ٢س٢ – ٧٣ ، حـ٢ هي ٢س + ٣

٣ أوجد أصفار كل من الحدوديات التالية واكتبها على شكل عوامل:

أ) س٢ + س ب) ٢س٣ + ٥س٢ + ٢س

جـ) س٣ + ٣س٢ – س – ٣

٤ أوجد باقي قسمة حـ١ على حـ٢ باستخدام نظرية الباقي.

أ) حـ١ هي س٤ – ٢س٣ – ١٥س + ٢ ، حـ٢ هي س + ٢

ب) حـ١ هي ٢س٥ – ٣س٤ + ٧س – ١١ ، حـ٢ هي س – ١

تمارين عامة ومسائل

١ بيّن في أي من الجداول التالية يكون (س ، ✻) نظاماً رياضياً :

حيث س = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ }

✻	١	٢	٤	٨
١	١	٢	٤	٨
٢	٢	٤	٨	١
٤	٤	٨	١	٢
٨	٨	١	٢	٤

✻	١	٢	٤	٨
١	١	٢	٤	٨
٢	٢	١	٨	٤
٤	٤	٨	١	٢
٨	٨	٤	٢	١

✻	١	٢	٤	٨
١	١	٢	٤	٨
٢	٢	٤	٨	١
٤	٤	٨	٢	١
٨	٨	١	٢	٤

٢ ادرس خواص كلٍّ من العمليات △ ، ∇ ، ✻ ، ○ المعرّفة بالجداول التالية على المجموعة س = { ١ ، ٢ ، ٣ } :

△	١	٢	٣
١	١	١	١
٢	٢	٢	١
٣	٣	٢	١

∇	١	٢	٣
١	١	٢	٣
٢	٢	٢	٣
٣	٣	٣	٣

✻	١	٢	٣
١	١	٢	٣
٢	٢	١	١
٣	٣	١	١

○	١	٢	٣
١	١	٢	٣
٢	٢	٢	٣
٣	٣	٣	٣

٣ لتكن س = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } ولنعرّف عليها العمليات △ ، ✻ ، ○ بالجداول التالية :

△	١	٣	٥	٧
١	١	٣	٥	٧
٣	٣	٥	٧	١
٥	٥	٧	١	٣
٧	٧	١	٣	٥

✻	١	٣	٥	٧
١	١	٣	٥	٧
٣	٣	٥	٧	١
٥	٥	٧	١	٣
٧	٧	١	٣	٥

○	١	٣	٥	٧
١	١	٣	٥	٧
٣	٣	٥	٧	١
٥	٥	٧	١	٣
٧	٧	١	٣	٥

بيِّن أيّاً من العمليات ثنائية على س ثم أوجد لكل عملية ثنائية ما يأتي :

أ) العنصر المحايد إن وجد . ب) نظير كل عنصر إن أمكن .

٤) لنعرّف العملية * كما يلي : ا * ب = ا^{ب} حيث ا ≠ ٠

أ) هل العملية * ثنائية على ط ؟ ب) هل (ص، *) نظاماً رياضياً؟

٥) أيٍّ من الأزواج التالية يمثل نظاماً رياضياً :

(ط، −) ، (ص، ×) ، (د ، ÷) ، (ح* ، ×) ؛ (ص* ، +)

٦) لنعرّف العملية * على ص بالقاعدة : ا * ب = ا ب + ١ ادرس خواص هذه العملية من حيث كونها (ثنائية – تبديلية – تجميعية – ذات عنصر محايد) .

٧) لتكن ص= { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } بيّن أيّاً من الأنظمة الآتية يمثل زمرة :

(ص٤ ، ⊕)، (ص٤ ، ⊙) ، (ص*٤ ، ⊙)

٨) لنعرّف العملية * على ص بالقاعدة : س *ص = س +٢ص أجب عمّا يلي :

أ) هل العملية * إبدالية؟ ب) هل * تجميعية؟

جـ) هل للعملية * عنصر محايد؟ د) هل يوجد لكل عنصر نظير؟

٩) لتكن العملية * معرفة على س= {١، ٣، ٥، ٧} بالقاعدة : ا * ب = باقي قسمة ا ب على ٨ ، أثبت أن (س ، *) زمرة تبديلية . ثم حل المعادلات التالية :

س * ٣ = ٧ ، ٧ * س = ٥

١٠) لتكن س = {س : س = ٣ن ، ن ∋ ص} ولتكن * هي عملية الجمع العادي هل (س ، *) يمثل زمرة؟

١١) لتكن س= { ٣، ٥، ٧ } ، ٢^{س} مجموعة المجموعات الجزئية لـ س .

أ) هل (٢^{س}، ∪) يمثل زمرة؟ ب) هل (٢^{س}، ∩) يمثل زمرة؟

١٢) إذا كانت ✻ عملية معرفة على صـ بالقاعدة : س ✻ ص = س + ص − ٣

أ) عيّن العنصر المحايد للعملية ✻ ب) أوجد قاعدة نظير العنصر.

١٣) إذا كان النظام (ح / {١} ، ✻) يمثل زمرة حيث ✻ معرفة بالقاعدة :

س ✻ ص = س + ص − س ص فعيّن العنصر المحايد، ثم أوجد قاعدة نظير العنصر.

١٤) لتكن ✻ عملية معرفة على ح بالقاعدة ا ✻ ب = $\frac{ا ب+١}{ا+ب}$ حيث ا + ب ≠ ٠

برهن أنه لا يوجد للعملية ✻ عنصر محايد .

١٥) لتكن سـ = { ز ، ف } حيث ز عدد صحيح زوجي ، ف عدد صحيح فردي

أثبت أن (سـ ، +) يمثل زمرة .

١٦) لتكن سـ = { ٣ ، ٥ }، $٢^{س}$ مجموعة المجموعات الجزئية لـ سـ ولتكن ⊕ عملية معرفة على $٢^{س}$ بالقاعدة : ا ⊕ ب = ا ∪ ب − ا ∩ ب ∀ ا ، ب ∈ $٢^{س}$ ،

برهن أن ($٢^{س}$ ، ⊕) يمثل زمرة إبدالية .

١٧) لتكن سـ = { $ا^{س}$: س ∈ صـ ، ا ≠ ٠ } ، برهن أن (سـ ، ×) زمرة .

١٨) لتكن سـ = { $٢^{ن} \times ٣^{م}$: ن ، م ∈ صـ } ، برهن أن (سـ ، ×) زمرة .

١٩) برهن أنه إذا كان كل عنصر في الزمرة (سـ ، ✻) نظير نفسه فإن هذه الزمرة تبديلية .

٢٠) ليكن لدينا الزمرتان (صـ$_{٢}$ ، ⊕) ، (صـ$^{*}_{٣}$ ، ⊙) ، فبرهن أن صـ$_{٢}$ × صـ$^{*}_{٣}$ يكون زمرة بالنسبة للعملية Δ المعرفة كما يلي :

(ا$_{١}$ ، ب$_{٢}$) Δ (ا$_{٢}$ ، ب$_{٢}$) = (ا$_{١}$ ⊕ ا$_{٢}$ ، ب$_{١}$ ⊙ ب$_{٢}$)

∀ ا$_{١}$ ، ا$_{٢}$ ∈ صـ$_{٢}$ ؛ ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$ ∈ صـ$^{*}_{٣}$

١ لتكن $ص_{ن}$ = { ٠ ، ١ ، ٢ } وعرّفنا عليها العمليتين ⊕، ⊙ كما يلي :

أ ⊕ ب = باقي قسمة أ + ب على ٣

أ ⊙ ب = أ + ب

بيّن أياً من العمليتين ثنائية على $ص_{ن}$.

٢ أ) بيّن أيّاً من الأزواج الآتية يمثل نظاماً رياضياً :

(ص ، ÷) ، (ط ، ×) ، ($ص_{ن}$ ، +) ، (ح ، ×)

ب) برهن أن النظير في الزمرة عنصر وحيد .

٣ في الجدول التالي ادرس الخواص التالية للعملية ✻ على

س = {١، ٢ ، ٣، ٤، } :

الإبدال – العنصر المحايد – النظير.

✻	١	٢	٣	٤
١	٣	١	٢	٢
٢	١	٢	٣	٤
٣	٢	٣	١	١
٤	٣	٤	٢	١

٤ إذا كانت س = { –١، ١ } والنظام (س ، ×) يمثل زمرة :

أ) عيّن العنصر المحايد ، ونظير كل عنصر.

ب) حل المعادلة س × ١ = –١

٥ لنعرّف العملية ✻ على ح بالقاعدة : س ✻ ص = س + ص – $\frac{١}{٣}$

أثبت أن (ح ، ✻) زمرة تبديلية .

تمارين عامة ومسائل

أولاً : المعادلات

١ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية باستخدام القانون العام :

أ) ٥س٢ − ٢س − ١ = ٠ ب) ٢ − ٥س = ٣س٢

جـ) ٦س٢ − ٧س + ٥ = ٠ د) ١٦س٢ − ٤٠س + ٢٥ = ٠

٢ بيّن أن س = ٥ جذر للمعادلة ٣س٢ − ١٩س + ٢٠ = ٠ ثم أوجد الجذر الآخر.

٣ لتكن المعادلة ﻫ س٢ − ٥س + ٢ﻫ − ٦ = ٠

ما قيمة ﻫ إذا كان أحد جذريها يساوي −١ ؟

٤ أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهما للمعادلات الآتية :

أ) ٥ س٢ − ٣ س − ١ = ٠ ب) ٧ س٢ + ٢ س = ٣

جـ) ٥ س٢ − ٧ س = ٠ د) ٩ س٢ − ٤ = ٠

٥ لتكن المعادلة (ﻫ + ٨) س٢ − ﻫ س + ١ = ٠ ، ﻫ ≠ − ٨

أ) أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهما بدلالة ﻫ .

ب) أوجد قيمة ﻫ لكي يكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان.

٦ لتكن المعادلة س٢ + ٥م = ٠

أوجد قيم م التي تجعل للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين.

٧ كوّن المعادلات التي تتصف بالشروط التالية (حيث $س_١ ، س_٢$ جذري المعادلة) :

أ) $س_١ + س_٢ = \frac{٣}{٤}$ ، $س_١ س_٢ = -\frac{٥}{٣}$

ب) $س_١ + س_٢ = -٤$ ، $س_١ س_٢ = \frac{٢}{٣}$

جـ) $س_١ + س_٢ = \frac{١}{٢}$ ، $س_١ س_٢ = -\frac{٣}{٤}$

٨ كوّن المعادلات التي لها الجذران في الحالات الآتية :

أ) $س_١ = ٢$ ، $س_٢ = -\frac{١}{٢}$

ب) $س_١ = -٣ + \sqrt{٢}$ ، $س_٢ = -٣ - \sqrt{٢}$

جـ) $س_١ = ٠$ ، $س_٢ = -٥ \sqrt{٣}$

د) $س_١ = \frac{٧}{٢}$ ، $س_٢ = ٠$

٩ لتكن المعادلة م $س^٢ - ٢$ (م + ٤) $س + م - ١ = ٠$ ، م $\neq ٠$

أ) حل المعادلة في الحالات الآتية : م = ١ ، م = ٢

ب) أوجد مجموع جذري المعادلة وحاصل ضربهما بدلالة م .

جـ) أوجد قيمة م لكي يكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان .

١٠ أوجد جذري المعادلات الآتية :

أ) $٣س^٢ + ٢س - ٥ = ٠$ ب) $٧س^٢ - ٨س + ١ = ٠$

جـ) $٩س^٢ + ١١س + ٢ = ٠$

ثانياً : المتراجحات

١ أوجد مجموعة الحل لكل من المتراجحات التالية :

أ) $٥س - ٣ > ٧$ ب) $\frac{٣س}{٥} - \frac{٢س - ١}{١٥} \leq \frac{٤س}{٣} + ٥$

جـ) $-٩ > ٢ | ٢س - ٣ | - ٣ \geq -٣$ د) $| \frac{٣س}{٢} - ٥ | \leq ١٢$

هـ) $س^٢ - | س | \leq ١٢$

٢ أوجد مجموعة الحل لكل من المتراجحات التالية:

أ) $٥س - ٧ > ٠$ ، $٣س - ٥ < ٠$

ب) $\frac{٣}{٢}س - \frac{١١}{٥} > ٠$ ، $س - \frac{١٣}{٧} < ٠$

جـ) $-٥س + ٧ > ٠$ ، $٢س > \frac{٣ - س}{٢}$

د) $٢س - ص > ٠$ ، $س + ٣ص < ٠$

هـ) $٥س - ص + ٤ > ٠$ ، $س + ٣ص > ٠$

و) $ص \leq ٣س - ٦$ ، $ص \geq ٢س + ٤$

ز) $٢س + ص > ٥$ ، $ص \leq ٠$

٣ أوجد مجموعة حل كلٍّ ممايأتي ومثله بيانياً:

أ) $٣س \geq -٦$ ، $س - ١ < ٠$

ب) $س - ١ > -٢$ ، $س - ١ < ٢$

جـ) $س - ١ \geq ٢$ ، $س - ١ \leq -٢$

د) $|٣ - ٤س| > ٢$

٤ برهن أن: $|س - \frac{ا + ب}{٢}| < \frac{ب - ا}{٢} \iff ا < س < ب$

٥ إذا كانت ف$_١$ =]$-\infty$ ، ٣[، ف$_٢$ = [٢ ، ٥]

، ف$_٣$ =]-٢ ، ∞[ف$_٤$ =]٥ ، ٨[

، ف$_٥$ =]-٣ ، ٣[ف$_٦$ = [٣ ، ٥]

أوجد كلاً مما يأتي:

أ) ف$_١$ ∩ ف$_٢$ ب) ف$_٥$ ∪ ف$_٢$ جـ) ف$_٣$ ∩ ف$_٥$

د) ف$_٣$ ∪ ف$_٥$ هـ) ف$_١$ ∪ ف$_٣$ و) ف$_٤$ ∩ ف$_٦$

ز) ف$_٦$ ∪ ف$_١$ ح) ف$_١$ ∪ ف$_٦$ ط) ف$_٢$ ∩ ف$_٦$

٦ إذا كانت : |أ – ب| ≥ ل ، |ب – حـ| ≥ ك اثبت أن |أ – حـ| ≥ ل + ك

٧ اثبت أن :

أ) |س ٠ ص| = |س| ٠ |ص| ب) $\left|\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right| = \frac{|\text{س}|}{|\text{ص}|}$

٨ ارتفاع مثلث يقل عن قاعدته بمقدار ٨سم. أوجد الارتفاع المناسب للمثلث الذي يجعل مساحته أكبر من ١٠ سم٢.

٩ أوجد مجموعة الحل لكل مما يأتي :

أ) س٢ – ٢س – ٢ ≥ ٠ ب) س٢ + ٢س – ٣ > ٠

حـ) |٢س – ٤| > – ٥ د) |س| > – ٣

هـ) $-٤ < \frac{٥ - ٣\text{س}}{٢} \geq ٥$

١٠ مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣سم، ما طوله الذي يجعل مساحته أصغر من ٢٠سم٢ ؟

١١ أوجد مجموعة حل المتراجحات التالية :

أ) س٣ – س٢ ≤ ٠ ب) |س – ٢| < ٣ |س – ١|

جـ) $\frac{|\text{س}^٢ - \text{س} - ٦|}{|\text{س} - ٣|} \leq ٦$ د) |س – ١| + |س| ≤ ٣٢

هـ) $\frac{١}{\text{س}^٢} \geq \frac{١}{\text{س}^٣}$ و) – |س| ≥ س ≥ |س|

ز) $\frac{١}{\text{س}^٣} \geq \frac{١}{\text{س}^٢}$ ح) |٥س| ≥ ٤

ط) |س| ≤ π ي) $\text{س} + \frac{٤}{\text{س}} < ٤$

ك) س٢ – ٢ س + ١ > ٠ ل) س٢ – ٢ س + ١ ≤ ٠

م) س٢ – ٢ س + ١ > ٠ ن) س٢ – ٢ س + ١ ≥ ٠

اختبار الوحدة

السؤال الأول

١) أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري كل من المعادلتين التاليتين:

أ) $٢س^{٢} - ٣س = ٥$ ب) $٣س^{٢} - ٥س - ٨ = ٠$

٢) أوجد مجموعة الحل لكل من المتراجحات التالية:

أ) $س + ١ > ٣$ ب) $٤ - س \geq ٣س - ١٢$

جـ) $|٢س - ١| \geq ٣$ ء) $س^{٢} - ٥س \leq ٠$

السؤال الثاني

١) كوّن المعادلات في الحالتين التاليتين:

أ) $س_{١} + س_{٢} = ٤$ ، $س_{١} \times س_{٢} = ١٠$

ب) $س_{١} + س_{٢} = -٢$ ، $س_{١} \times س_{٢} = \frac{٣}{٤}$

حيث $س_{١}$ ، $س_{٢}$ هما جذرا المعادلة.

٢) إذا كانت $ف_{١} = [٢ ، ٥[$ ، $ف_{٢} =]-\infty ، ٣]$ أوجد كلاً من:

أ) $ف_{١} \cup ف_{٢}$ ب) $ف_{١} \cap ف_{٢}$

٣) أوجد مجموعة حل المتراجحة: $س٢ - ٣س - ١٠ \leq ٨$

السؤال الثالث

١) لتكن المعادلة: $٣س^{٢} - (ه + ٢) س - (ه - ٤) = ٠$

أ) أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهما بدلالة ه ،

ب) ما قيمة ه التي تجعل أحد جذري المعادلة = ١ .

٢) أوجد مجموعة حل المتراجحة: $|س^{٢} - س - ٣| \geq ٣$

٣) حل جملة المتراجحتين التاليتين:

$٣س - ٢ص \leq ٤$ ، $س - ٤ص - ٣ > ٠$

تمارين عامة ومسائل

١ حوِّل إلى التقدير الدائري :

أ) ٣٦٠° ب) -٧٠° حـ) ٣١٠° د) ٥٢٠°

٢ حوِّل إلى التقدير الستيني :

أ) $\frac{٥\pi}{٣}$ ر ب) ٣π ر حـ) $\frac{\pi}{٩}$ ر د) $-\frac{\pi}{١٨}$ ر

هـ) ٢π ر و) π ر ز) $\frac{\pi}{٢}$ ر ح) ٢ ر

٣ في دائرة طول نصف قطرها يساوي ٢٠سم ، اوجد طول القوس الذي يقابل زاوية مركزية قياسها هـ حيث :

أ) هـ $= ٦٠^\circ$ ب) هـ $= \frac{٣}{٤}\pi$ ر حـ) هـ $= ١٢٠^\circ$ د) هـ $= \frac{٤}{٣}\pi$ ر

٤ أوجد نصف قطر الدائرة التي فيها طول القوس الذي يقابل الزاوية $\frac{\pi}{٤}$ ر يساوي ٢٠سم.

٥ إذا كان ٥ ظاس $= ٤$ أوجد قيمة $\frac{٥\text{جاس} - ٣\text{جتاس}}{٥\text{جاس} + ٢\text{جتاس}}$

٦ إذا كان جاس $= \frac{٣}{٥}$ أوجد قيمة : أ) جتاس ب) ظاس

٧ بدون استخدام جداول المثلثات أوجد قيمة كلٍّ من :

أ) $٤\text{ جتا}^٢ ٤٥^\circ - \text{قا}^٢ ٦٠^\circ + \text{جا}^٢ ٦٠^\circ + \text{جتا}^٢ ٩٠^\circ$

ب) $\frac{\text{جا}^٢ ٦٠^\circ}{\text{جتا}^٢ ٤٥^\circ} - \text{ظتا}^٢ ٣٠^\circ + ٥\text{جتا}^٢ ٩٠^\circ$

٨) إذا كانت جا هـ + جتا هـ = $\sqrt{٢}$ جا (٩٠ − هـ) أوجد ظتا هـ .

٩) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي :

أ) جا^{٢} ٦٧° − ظا^{٢} ٢٣° ب) جا^{٢} ٣٥° − جا^{٢} ٥٥°

حـ) $\frac{\text{جا}^{٢}\ ٢٠° + \text{جتا}^{٢}\ ٧٠°}{\text{جا}^{٢}\ ٥٩° + \text{جا}^{٢}\ ٣١°}$

د) $\left(\frac{\text{جا}\ ٤٧°}{\text{جتا}\ ٤٣°}\right)^{٢} + \left(\frac{\text{جتا}\ ٤٣°}{\text{جا}\ ٤٧°}\right) - ٤\ \text{جتا}^{٢}\ ٤٥°$

١٠) إذا كان هـ قياس زاوية في الوضع القياسي وكان ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في نقطة إحداثيها (س ، $\frac{١}{٢}$) فإن هـ يساوي :

أ) ٣٠° ب) ١٥٠° حـ) ٢١٠° د) ٣٣٠°

١١) إذا كان جا حـ = $\frac{٣}{٥}$ ، ٩٠° < حـ < ١٨٠° أوجد قيمة ٤ ظا حـ + ٥ جتا حـ .

١٢) إذا كان ٥ ظا أ = ١٢ ، ١٨٠° < أ < ٢٧٠° ، ٥ جا ب = ٣ ، ٩٠° < ب < ١٨٠°

فأوجد قيمة : $\frac{\text{جا}(١٨٠° + \text{أ}) + \text{جتا}(٩٠° - \text{ب})}{\text{ظا}(١٨٠° + \text{أ}) + \text{ظا}(١٨٠° - \text{ب})}$.

١٣) زاوية هـ في الوضع القياسي يقطع ضلعها النهائي في دائرة الوحدة في النقطة (−٠٫٦ ، −٠٫٨) أوجد و (∠ هـ) .

١٤) أثبت أن :

أ) (قا هـ − ظا هـ) = $\frac{١ - \text{جا هـ}}{١ + \text{جا هـ}}$

ب) $\frac{٢\ \text{ظتا هـ}}{١ + \text{ظتا}^{٢}\ \text{هـ}}$ = ٢ جا هـ جتا هـ

حـ) $\frac{١}{\text{قتا أ} - ١} + \frac{١}{\text{قتا أ} + ١}$ = ٢ قا أ ظا أ

د) $\frac{\text{ظا س} + \text{ظتا س}}{\text{قا س قتا س}}$ = جا ٩٠°

١٥ برهن أن : أ) جتا^{٤} $\left(\frac{\pi}{٢} - هـ\right)$ – جا^{٤} هـ = صفر

ب) جتا^{٤} $\left(\frac{\pi}{٤} - هـ\right)$ – جا^{٤} $\left(\frac{\pi}{٤} + هـ\right)$ = صفر

١٦ إذا كان ٢ قاهـ = ٣ حيث ٠° < هـ < ٩٠° أوجد قيمة :

جا(π – هـ) ظتا (π – هـ) – جا^{٢} ٦٠° + ظا^{٢} ١٢٠°

١٧ إذا كان قاهـ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٢}$ حيث ٠° < هـ < ٩٠° أوجد قيمة كلٍ من : جتا هـ، جاهـ، ظاهـ

١٨ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل من :

أ) جتا ٩٠° ب) ظا ٣٥َ ٦٠° حـ) جا ٦٥,٧°

١٩ (باستخدام الآلة الحاسبة) أوجد قيمة ص إذا علم أن :

أ) جا ص = ٠,٩٩٢٦ ب) ظا ص = ٢,٠٣٥٣

جـ) جتا ص = ٠,٦٥٦١ د) ظتا ص = ٠,٧٦٤٥

٢٠ ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب . أوجد طول $\overline{ا ب}$ إذا كان :

أ) |ا جـ| = ٧٠سم ، ق (∠ جـ) = ٥٠°

ب) |ا جـ| = ٢٠سم ، ق (∠ا) = ٥٣َ ١٨°

٢١ ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ. أوجد طول $\overline{ا جـ}$ إذا كان :

أ) |ب جـ| = ٤٣,٥سم ، ق (∠ ب) = ٧٠°

ب) |ا ب| = ١١٠,٥سم ، |ب جـ| = ٦٧سم

٢٢ مئذنة ارتفاعها ٤٥م أوجد قياس زاوية ارتفاع أعلى نقطة فيها من نقطة في المستوى الأفقي المار بقاعدتها وتبعد عنها ٣٨م.

٢٣ من نقطة تبعد ١٥٠ متراً عن قاعدة سارية علم وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة السارية ١٠َ ٢٥° فما ارتفاع السارية مقرباً الإجابة لأقرب متر؟

٢٤ من قمّة صخرة ارتفاعها ١٠٠ متر عن سطح البحر وجد أن قياس زاوية انخفاض سفينة ١٤َ ٢٥° أوجد بُعد السفينة عن قاعدة الصخرة.

١ ارسم كلٍّ من الزاويتين الموجهتين الآتيتين في وضعهما القياسي مبيناً الربع الذي تقع فيه، ثم أوجد القياس الأساسي لكل منهما:

أ) -٨٥٠° ب) ٢٢٥٠°

٢ حوّل إلى التقدير الدائري:

أ) ٢٤٠° ب) -٧٥°

٣ حوّل إلى التقدير الستيني:

أ) $-\frac{\pi}{٦}$ ر ب) -٥π ر

٤ في دائرة نصف قطرها ٩سم ، أوجد طول القوس الذي يقابل زاوية مقدارها ١٥٠°.

٥ إذا كانت ظا $\theta = ٢$ ، $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$ أوجد قيمة جتاθ ، جاθ ، قاθ ، ظتاθ

٦ أثبت أن:

٢جتا ٣٠° جا ٦٠° + ظا ٤٥° قتا $٣٠^\circ = \frac{٧}{٢}$

٧ أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

أ) قتا ١٣٥° ب) ظتا ١٥٠°

٨ إذا كان قياس زاوية ميل أشعة الشمس على الأفقي في لحظة ما هو ٥٧° ووضعت عصا طولها ١٥٠سم رأسياً على أرض أفقية. أوجد طول العصا على الأرض في هذه اللحظة.

تمارين عامة ومسائل

١) أوجد إحداثي منتصف القطعة الواصلة بين النقطتين (−٢ ، ٧) ، (٤ ، ٣).

٢) ليكن أ (١ ، −٤) ، ب (٣ ، ١) ، جـ (−٢ ، ٣).

أ) حدد النقاط أ ، ب ، جـ في المستوى الإحداثي.

ب) أثبت أن أ ، ب ، جـ هي رؤوس مثلث قائم الزاوية.

٣) أوجد ميل المستقيم الواصل بين النقطتين (−٢ ، ٣) (١ ، ٤).

٤) النقطة (س ، ٠) تقع على المستقيم الواصل بين النقطتين (٦ ، ٣) وَ (−١٢ ، ٥) أوجد قيمة س .

٥) ليكن أ (٢ ، −٣) ، ب (−١ ، −١) ، جـ (٢ ، ٣ ١/٢) أثبت أن $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{ب جـ}$.

٦) ليكن أ (٥ ، −٤) ، ب (−١ ، ٤) ، جـ (−٥ ، ٨). فأوجد :

أ) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة جـ والعمودي على $\overleftrightarrow{أب}$.

ب) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة ب والموازي للمستقيم س + ص +٢= ٠

٧) ليكن المستقيم ل معادلته ٣س + ٤ص + ١٢ = ٠ فأوجد :

أ) ميل $\overleftrightarrow{ل}$.

ب) الجزء الذي يقطعه $\overleftrightarrow{ل}$ من محوري الاحداثيات.

جـ) ارسم $\overleftrightarrow{ل}$.

٨ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين (١ ، ١) ، (−١ ، −٢) .

٩ ارسم المستقيمات التاليه :

أ) ٣س −٤ص − ١٢ = ٠ ب) ص − ٢ = $\frac{١}{٢}$ (س+٣) .

جـ) ٢س − ٧ص + ١٤ = ٠

(إرشادات : أوجد نقطتي تقاطع كل مستقيم مع محوري الإحداثيات .)

١٠ ليكن أ (−١، ٢) ، ب (٣، ٥) ، جـ (٢،٠) هي رؤوس مثلث . أوجد معادلة :

أ) الضلع أ ب ب) العمودي من أ على $\overline{ب جـ}$

جـ) المتوسط النازل من جـ .

١١ أوجد بعد كل نقطة من النقاط (−٣ ، ٥)، (−٢ ، ٢)، (−١ ، ٢) عن المستقيم ٢س + ص − ٢ = ٠

١٢ أحسب مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط (١ ، ١)، (٣ ، ٤)، (٠، ٢) .

١٣ أحسب مساحة الشكل الرباعي الذي رؤوسه النقاط (−٢ ، ٣)، (١ ، ٤)، (٢ ، ١) ، (−١ ، ٤) .

١٤ ما صورة النقطة (٣ ، ١) بالانعكاس في المستقيم :

أ) ص + س − ١ = ٠ ب) ص = ٢س − ١

جـ) ٢س = ٣ص + ١ د) $\frac{س}{٢}$ + $\frac{ص}{٣}$ = ١

١٥ ما صورة المستقيم ص − س + ١ = ٠ بالانعكاس في المستقيم :

أ) ص = ٢س ب) ص − ٢س = ١

جـ) ٢س = ص د) $\frac{س}{٥}$ + $\frac{ص}{-٢}$ = ١

١٦ أوجد صورة الشكل الرباعي الذي رؤوسه (١ ، ٢) ، (١ ، −١) ، (٤ ، ١) ، (٣ ، ٤) بالانعكاس في المستقيم ٣ص − س + ٢ = ٠

١٧ أوجد صورة النقطة (٥ ، −١) بانسحاب :

أ) (−٣ ، ٢)　　ب) (−٤ ، −٣)

جـ) (٢ ، ١)　　د) (٠ ، ٥)

١٨ أوجد المستقيمات التي صورها بانسحاب (−١ ، −٣) هي :

أ) ٢ص − س − ٢ = ٠　　ب) ص − ٢س = ٤

جـ) ص = س + ١　　د) س = ٢ص − ١

١٩ أوجد الانسحاب إذا علمت أن النقطة (٦ ، ٣) صورتها النقطة (٣ ، ٧)، ثم أوجد إحداثي النقطة هـ التي صورتها (−٥ ، ٦) تحت تأثير هذا الانسحاب .

٢٠ أوجد ميل المستقيم وما يقطعه من محوري الإحداثيات في الحالات التالية :

أ) ص − س + ١ = ٠

ب) موازٍ للمستقيم ٢ص − س = ٢ ويمر بالنقطة (١ ، ٢) .

جـ) يمر بالنقطتين (−١ ، ٣) ، (٢ ، ١) .

د) عمودي على المستقيم ٣ص − س = ٥ ويمر بالنقطة (−١ ، ٣) .

٢١ أوجد معادلة المستقيم في الحالات التالية :

أ) يقطع ٥ وحدات طولية من الاتجاه الموجب لمحور السينات وميله $-\frac{٢}{٣}$

ب) يمر بالنقطة (٠ ، ٢) ويوازي المستقيم ص = ٣س + ٢

جـ) يمر بالنقطة (١ ، ٣) وعمودي على المستقيم ٣ص = س + ٦

د) يمر بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤)

هـ) يقطع ٣ وحدات طولية من الاتجاه الموجب لمحور السينات وَ ٤ وحدات طولية من الاتجاه السالب لمحور الصادات.

و) يقطع ٣ وحدات طولية من الاتجاه السالب لمحور الصادات ويميل بزاوية ٤٥° على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٢٢ أ (٢ ، ١) ، ب (٥ ، ٣) ، جـ (−١ ، ٣) هي رؤوس المثلث أ ب جـ أوجد:

أ) معادلة متوسط المثلث $\overleftrightarrow{أ ء}$. ب) معادلة ارتفاع المثلث $\overleftrightarrow{ب د}$.

جـ) طول ارتفاع المثلث.

٢٣ أوجد المستقيمات المارة بالنقطة (١ ، −٦) وحاصل ضرب ما تقطعه من محوري الإحداثيات يساوي ١.

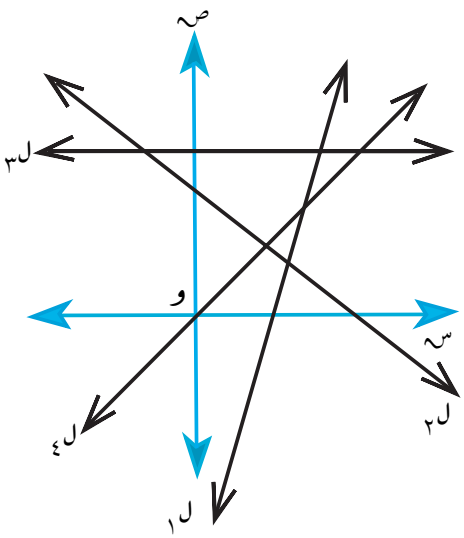
٢٤ اربط المستقيمات ل١، ل٢، ل٣، ل٤، المرسومة بالتقريب بالشكل (٧ − ١) بالمعادلات أ،ب، جـ، د التالية:

أ) ص = ٤ س

ب) ص − ٣س + ٤ = ٠

جـ) ٢س + ٣ص = ٦

د) ص = ٣



شكل (٧ − ١)

٢٥ أوجد صورة النقطة (−١، ٣) بالانعكاس في محور السينات يليه بالانعكاس في المستقيم ص = ٤ .

٢٦ أوجد صورة النقطة (١، ٣) بالانعكاس في المستقيم ص = ٤ يليه بالانعكاس في محور السينات. قارن نتيجتك بنتيجة سؤال (٢٥).

٢٧ أوجد معادلة محور الانعكاس لكل نقطة هـ وصورتها هـَ في الحالات التالية :

أ) هـ (١ ، −١) ، هـَ (١ ، ٩) . ب) هـ (٢ ، ١) ، هـَ (٠ ، ٣) .

جـ) هـ (٠ ، ١) ، هـَ (١ ، ٢) .

٢٨ أوجد صورة النقطة (١ ، ٢) بالانعكاس في :

أ) المستقيم س + ص = ٦ يليه بالانعكاس في المستقيم س = ٤

ب) المستقيم س = ٤ يليه بالانعكاس في المستقيم س + ص = ٦

جـ) هل الانعكاس تبديلي في هذه الحالة ؟

٢٩ لنفرض ن : (س ، ص) ← (س + ٢ ، ص + ٤) ، والنقاط أ (٢ ، ٤) ، ب (س١ ، ص١) ، جـ (س٢ ، ص٢) :

أ) أوجد صورة النقطة أ بالانسحاب ن .

ب) إذا كان ن (ب) = أ أوجد قيمتي س ، ص .

جـ) إذا كان ن٢ (أ) = (ن ○ ن) (أ) = جـ أوجد قيمتي س٢ ، ص٢ .

د) أوجد النقطة ء بحيث أن ن٢ (ء) = أ .

٣٠ إذا كان : ن١ : (٥ ، −١) ← (٢ ، ٣)

ن٢ : (−٢ ، ٥) ← (٤ ، −٥)

أوجد النقطة (٧ ، ٦) بالانسحابات التالية :

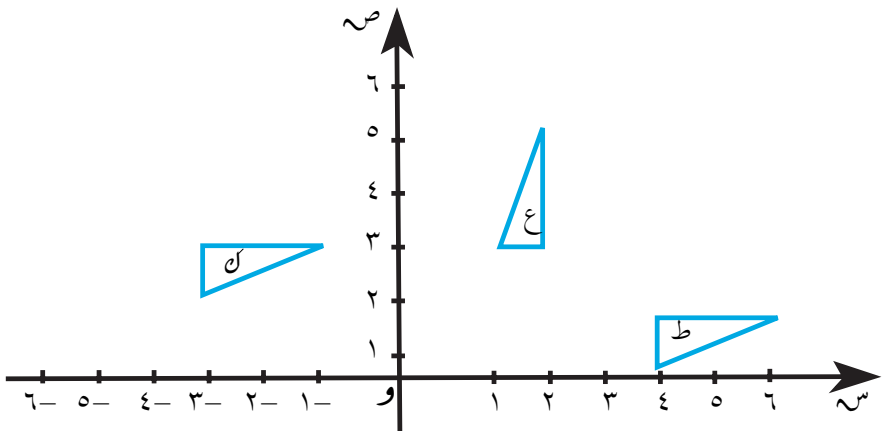
أ) ن١ ب) ن٢ جـ) ن١ ○ ن٢

د) ن٢ ○ ن١ هـ) ن١٢

٣١ الشكل (٧ – ٢) يوضح المثلثات ع ، ط، ك.

أ) أوجد معادلة محور الانعكاس الذي يربط Δ ع بـ Δ ط .

ب) أوجد الانسحاب الذي يربط Δ ك بـ Δ ط .



شكل (٧ – ٢)

اختبار الوحدة

١ ليكن المستقيم ل معادلته س – ٢ص + ٢ = ٠ فأوجد :

أ) ميل $\overleftrightarrow{ل}$

ب) ما يقطعه $\overleftrightarrow{ل}$ من محوري الإحداثيات .

جـ) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (–١ ، –٢) والعمودي على $\overleftrightarrow{ل}$.

د) أوجد طول العمود النازل من النقطة (–٢ ، ٢) على $\overleftrightarrow{ل}$.

٢ أوجد صورة المستقيم س – ٢ص – ١ = ٠

أ) بالانعكاس في المستقيم ص – ٣س = ٠

ب) بالانسحاب (١ ، –٣) .

المتجهات

تمارين عامة ومسائل

١ اكمل ما يلي :

أ) $\overrightarrow{ف_١} \perp \overrightarrow{ف_٢}$ إذا كان $\overrightarrow{ف_١} \cdot \overrightarrow{ف_٢}$ = ...

ب) إذا كان $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{جـ ء} = \overrightarrow{٠}$ فإن..... .

جـ) إذا كان أ (–٥ ، ب) = (١٥ ، ٦) فإن قيمة أ = ...، قيمة ب = ...

د) إذا كانت أ ، ب، جـ ، ء ، هـ خمس نقاط في المستوى فإن :

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{جـ ء} + \overrightarrow{ء هـ} + \overrightarrow{هـ أ}$ = ...

هـ) إذا كان $\overrightarrow{ف_١} = \overrightarrow{سـ} + ٣ \overrightarrow{صـ}$ ، $\overrightarrow{ف_٢} = (–١ ، ٢)$ فإن $٢\overrightarrow{ف_١} + ٣\overrightarrow{ف_٢}$=...

و) إذا كان $\overrightarrow{سـ}$ = (٥ ، ٣)، $\overrightarrow{صـ}$ = (١٥ ، – ٢٥)

فإن المتجهان $\overrightarrow{سـ}$ ، $\overrightarrow{صـ}$ ..... .

ز) إذا كان $\overrightarrow{أب} + ٣\overrightarrow{جـ ء}$ فإن المتجهان $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{جـ ء}$ ..... .

ح) إذا كانت ء منتصف $\overline{م د}$ فإن :

١– $\overrightarrow{ء م} + \overrightarrow{ء د}$ = ... ٢– $\overrightarrow{م د} + \overrightarrow{ء د}$ = ...

ط) إذا كان $\overrightarrow{مـ}$= (٢ ، ٣)، $\overrightarrow{د}$ = (٦ ، ك) وكان $\overrightarrow{مـ} \perp \overrightarrow{د}$ فإن قيمة ك = ...

ي) إذا كان $\overrightarrow{ف}$ = (٥ $\sqrt{٣}$ ، ٥) فإن :

١– $|\overrightarrow{ف}|$ = ...

٢– قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{ف}$ مع المحور سـ الموجب ...

٣– متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\overrightarrow{ف}$ هو $\overrightarrow{ف}^*$ = ...

٢ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٥ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، ٦)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (-١ ، ١)$ ،
$\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{ب} - ٢\overrightarrow{أ} + ٣\overrightarrow{جـ}$ المطلوب :

أ) عبّر عن $\overrightarrow{ف}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين .

ب) إذا كان $\overrightarrow{م} - \overrightarrow{ف} = \overrightarrow{جـ}$ فأوجد $|\overrightarrow{م}|$.

جـ) أوجد بجميع الصور المختلفة معادلة المستقيم أب .

٣ أ ب جـ ء شكل رباعي بحيث $\overrightarrow{ب جـ} = \overrightarrow{أ ء}$ وكانت أ (١ ، ١) ، ب (٢ ، -٢)،
جـ (-٢ ، ٠) المطلوب :

أ) أوجد إحداثي النقطة ء . ب) حدِّد نوع الشكل الرباعي أ ب جـ ء

جـ) أوجد قياس الزوايا الداخلية للشكل الرباعي .

د) أوجد بجميع الصور معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة جـ ويوازي المتجه $\overrightarrow{أب}$

٤ إذا كانت $\overrightarrow{أ} = (-١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، ١)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (٣ ، ٨)$ فأوجد قيمة ك
التي تحقق المعادلة $٣\overrightarrow{أ} + ك\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{جـ}$ ثم أوجد $|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}|$

٥ إذا كان $\overrightarrow{أب} = (١٢ ، ١٥)$ ، $\overrightarrow{ب جـ} = (-٧ ، -٩)$ فأوجد $\overrightarrow{أجـ}$ إذا كان
$\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{ب} = (٣ ، ٥)$ وأثبت أن $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، -١)$ ثم أوجد إحداثي النقاط
أ ، ب ، جـ.

٦ إذا كان $\overrightarrow{ف_١}$ ، $\overrightarrow{ف_٢}$ متجهين وكان $|\overrightarrow{ف_١}| = ٢$ ، $|\overrightarrow{ف_٢}| = ٣$ وقياس الزاوية
بينهما ٦٠° فأوجد :

أ) $\overrightarrow{ف_١} \cdot \overrightarrow{ف_٢}$ ب) $(\overrightarrow{ف_١} + \overrightarrow{ف_٢})^٢$

جـ) إذا كان $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ف_١} + \overrightarrow{ف_٢}$ فأوجد $|\overrightarrow{أ}|$.

٧ إذا كانت (س ، ص) = ل (٣ ، -٢) + (٥ ، ٤) فاثبت أن : ٢س + ٣ص = ٢٢

٨ إذا كان $\overrightarrow{ف} = (س ، ص)$ فاثبت أن :
$(\overrightarrow{ف} \cdot \overrightarrow{سـ}) \overrightarrow{سـ} + (\overrightarrow{ف} \cdot \overrightarrow{صـ}) \overrightarrow{صـ} = \overrightarrow{ف}$

٩) أثبت أنه إذا كان $(\overrightarrow{ف_١} + \overrightarrow{ف_٢})^٢ = |\overrightarrow{ف_١}|^٢ + |\overrightarrow{ف_٢}|^٢$ فإن $\overrightarrow{ف_١}$، $\overrightarrow{ف_٢}$ متعامدان .

١٠) ا ب جـ ء شكل رباعي بحيث $\overrightarrow{ا ء} = \frac{٢}{٣} \overrightarrow{ب جـ}$ أثبت أن :

أ) الشكل ا ب جـ ء شبه منحرف .

ب) $\overrightarrow{ا جـ} + \overrightarrow{ب ء} = \frac{٥}{٣} \overrightarrow{ب جـ}$

١١) ا ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ل أثبت أن : $\overrightarrow{ا ب} \cdot \overrightarrow{ا جـ} = \frac{١}{٢} ل^٢$

١٢) ا ب جـ مثلث، ء $\in \overline{ب جـ}$ ، $\overrightarrow{ب ء} = \frac{٣}{٢} \overrightarrow{ء جـ}$ اثبت أن ٢ $\overrightarrow{ا ب}$ + ٣ $\overrightarrow{ا جـ}$ = ٥ $\overrightarrow{ا ء}$

١٣) إذا كان $\overrightarrow{ا ب}$ + ٣ $\overrightarrow{جـ ب}$ = ٢ $\overrightarrow{ا جـ}$ اثبت أن :

ا ، ب ، جـ على إستقامة واحدة .

١٤) إذا كانت $\overrightarrow{د} = ن \overrightarrow{ا}$ هي المعادلة المتجهة للمستقيم ل، ا (٣، ٥) . المطلوب :

أ) ارسم المستقيم ل .

ب) أوجد المعادلتين الوسيطتين للمستقيم ل .

جـ) أوجد المعادلة الجبرية (الديكارتيه) للمستقيم ل .

١ اختر الإجابة الصحيحة :

أ) إذا كان $\overrightarrow{ف_١} = (٣\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص})$، $\overrightarrow{ف_٢} = (١٥ ، -٩)$ فإن المتجهين :

١) متطابقان . ٢) متوازيان . ٣) متعامدان .

ب) إذا كان $\overrightarrow{أ ب} = (٢ ، -١)$ ، $\overrightarrow{ب جـ} = (٣ ، ٥)$ فإن $\overrightarrow{أ جـ}$ يساوي :

١) $(٥ ، ٤)$. ٢) $(١ ، ٦)$. ٣) $(-١ ، -٦)$.

جـ) إذا كان $\overrightarrow{ف_١} = ٤\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$، $\overrightarrow{ف_٢} = (٢ ، ١)$ فإن $\overrightarrow{ف_١} \cdot \overrightarrow{ف_٢}$ يساوي :

١) ١١ ٢) ٥ ٣) -٥

٢ **أ)** إذا كان أ $(٢ ، ١)$ ، ب $(٦ ، ٣)$ ، جـ $(٣ ، -٣)$ ، ء $(٢ ، -٢)$ المطلوب إثبات أن :

١) $\overrightarrow{أ ب} = ٣\overrightarrow{جـ ء}$ ٢) $\overrightarrow{ب ء} + ٤\overrightarrow{جـ ء} = \overrightarrow{أ ء}$

ب) إذا كان $\overrightarrow{ف_١} = (٣ ، ٨)$، $\overrightarrow{ف_٢} = (٥ ، -٤)$، $\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{ف_١} - ٣\overrightarrow{ف_٢}$ المطلوب :

١) عبِّر عن $\overrightarrow{ف}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسية .

٢) أوجد المعادلة المتجهه للمستقيم ل الذي يمر بمبدأ تقاطع الإحداثيات ويوازي المتجه $\overrightarrow{ف_٢}$.

٣ أ ب جـ مثلث، ء $\in \overline{ب جـ}$ بحيث يكون $\overrightarrow{ء جـ} = ٣\overrightarrow{ب ء}$

أثبت أن : $\overrightarrow{أ جـ} + ٣\overrightarrow{أ ب} = ٤\overrightarrow{أ ء}$

تمارين عامة ومسائل

١ اكتب المقادير التالية باستخدام مجـ :

أ) ٠ + ١ + ٢ + ... + (ن – ١)

ب) ٨+٩+١٠+ ... + ٢٥

جـ) ١ × ن + ٣ × ٥ + ٥ × ٥ + ... + (٢ن – ١) (٢ن + ١)

د) (–٥) + (–٤) + (–٣) + ... + (٨)

٢ أوجد ناتج ما يلي :

أ) $\overset{٨}{\underset{ر=٥}{مجـ}}$ ر ب) $\overset{٣}{\underset{ر=١}{مجـ}}$ س$_ر$ ص$_ر$ جـ) $\overset{٩}{\underset{ر=١}{مجـ}}$ ١٢

د) $\overset{٣}{\underset{ر=١}{مجـ}}$ (س$_ر$ + ١٥) هـ) $\overset{٨}{\underset{ر=١}{مجـ}}$ $\frac{١}{٢}$ و) $\overset{٣}{\underset{ر=١}{مجـ}}$ س$_ر^٢$ ع$_ر^٢$

٣ إذا كانت $\overset{٦}{\underset{ر=١}{مجـ}}$ س$_ر$ = –٤ ، $\overset{٦}{\underset{ر=١}{مجـ}}$ س$_ر^٢$ = ١٠ أوجد قيمة :

أ) $\overset{٦}{\underset{ر=١}{مجـ}}$ (٢س$_ر$ + ٣) ب) $\overset{٦}{\underset{ر=١}{مجـ}}$ س$_ر$ (س$_ر$ – ١) جـ) $\overset{٦}{\underset{ر=١}{مجـ}}$ (س$_ر$ – ٥)^٢

٤ جدول التوزيع التكراري التالي يمثل درجات ١٨ طالباً في امتحان مادة الرياضيات (الدرجة العظمى ٦٠°)

الفئة	١٥ – ٢٥	٢٦ – ٣٦	٣٧ – ٤٧	٤٨ – ٥٨
التكرار	٣	٥	٨	٢

أوجد – المتوسط الحسابي – الوسيط – المنوال .

٥ فيما يلي درجات ٢٥ طالباً في اختبار (الدرجة العظمى ٢٠°):

١٥، ١٧، ٢٠، ١٢، ٩، ١٠، ١٤، ١٣، ١٢، ١١، ٨، ١٣، ١٤، ١٩، ٧،
١٥، ١٤، ٣، ١٤، ١، ١٩، ٦، ٦، ١٥، ١٢

كوِّن جدولاً بحيث يكون طول الفئة يساوي ٣، ثم أوجد المتوسط الحسابي والمنوال والوسيط لهذه الدرجات.

٦ أوجد الانحراف المتوسط والمدى والتباين للقيم التالية:

أ) ١٢، ١٥، ١٢، ١٤، ١٦ ب) ٣٦، ٣٢، ٣٥، ٢٣

جـ) ٨، ١٠، ١٣، ١٥، ١٢ د) ٣، ٤، ٤، ٤، ٥، ٦، ٦

٧ فيما يلي جدول التوزيع التكراري لعمال أحد المصانع موزعين في فئات حسب ساعات العمل الأسبوعية التي اشتغلوها في أسبوع معين.

فئات ساعات العمل	٣١–٣٩	٤٠–٤٨	٤٩–٥٧	٥٨–٦٦	٦٧–٧٥	٧٦–٧٤
عدد العمال	١٨	٦٧	٤٤	٣٣	٨	٥

أوجد – المتوسط الحسابي والانحراف المتوسط والتباين لعدد ساعات العمل الأسبوعية لهؤلاء العمال.

٨ ٢٥، ١٠، ١٤، ٢٠، ١٢، ١٥، ١٥، ١٨، ٢١، ٢٥، ٣٢، ٣٠، ٣١، ٢٦،
٥٢، ٥٠، ٤٥، ٣٦، ٣٥، ٤٨، ٥٣، ٢٨، ٢٥، ٢٩، ٢٩، ٣٤، ٣٣، ٢٤،
٢٠، ٢٧، ٥٤، ٤٠، ٢٢، ٢٢، ٣٢، ٤٣، ٣٤، ٤٠، ٥٣، ٣٧، ٣٦، ٣٠،
٣٨، ٣٩، ٣٢، ٣٨، ٣٥، ٣١، ٢٨، ٣١،

البيانات السابقة درجات خمسين طالباً في اختبار مادة اللغة العربية (الدرجة العظمى ٦٠ درجة) والمطلوب:

أ) كوِّن جدولاً تكرارياً بحيث يكون طول الفئة يساوي ٨ .

ب) أوجد الانحراف المتوسط لدرجات هؤلاء الطلبة.

جـ) أوجد التباين والانحراف المعياري.

١ اكتب المقادير التالية باستخدام الرمز مجـ:

أ) ٠+١+٢+....+١٢ ب) ٦+٨+١٠+...+ن٢

جـ) (−١٣)+(−١٢)+(−١١)+...+(−٦)

د) $ا س_{١} + ا س_{٢} + ا س_{٣} + ... + ا س_{ن}$

٢ ليكن لدينا البيانات الإحصائية التالية:

$س_{١} = ١٥$ ، $س_{٢} = ٢٠$ ، $س_{٣} = ٢٢$ ، $س_{٤} = ١٨$

$ع_{١} = ٣$ ، $ع_{٢} = ٤$ ، $ع_{٣} = ٥$ ، $ع_{٤} = ٨$

استخدم البيانات السابقة في إيجاد قيمة ما يلي:

أ) $\overset{٤}{\underset{ر=١}{مجـ}}$ $س_ر$ ب) $\overset{٢}{\underset{ر=١}{مجـ}}$ $س_ر ع_ر$ جـ) $\overset{٤}{\underset{ر=٣}{مجـ}}$ $س_ر ع_ر^{٢}$

٣ أوجد المنوال والمتوسط الحسابي والانحراف المتوسط للبيانات التالية:

الفئات	التكرار $ك_ر$	مركز الفئة $س_ر$	$ك_ر \times س_ر$
٤٠ – ٤٤	٢	٤٢	٨٤
٤٥ – ٤٩	٣	٤٧	١٤١
٥٠ – ٥٤	٩	٥٢	٤٦٨
٥٥ – ٥٩	٥	٥٧	٢٨٥
٦٠ – ٦٤	٣	٦٢	١٨٦

٤ أوجد الانحراف المتوسط والتباين لبيانات الجدول التالي:

الفئة	١٥ – ٢٥	٢٦ – ٣٦	٣٧ – ٤٧	٤٨ – ٥٨
التكرار	٣	٥	٨	٢

تم بحمد الله