الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

(الجزء الثاني)

فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً.

د. أمة الآله علي حمد الحوري.
د. عوض حسين البكري.
د. محمد رشاد الكوري.
د. محمد حسن عبده المسوري.
د. عبدالله سالم بن شحنة.
د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري.
د. علي شاهر القرشي.
أ. مريم عبدالجبار سلمان.
أ. سالمين محمد باسلوم (منسقاً).
د. محمد علي مرشد.
أ. يحيى بكار مصفر.
أ. عبدالباري طه حيدر.
أ. نصر محمد بدر.
أ. جميلة إبراهيم الرازحي.
أ. عادل علي مقبل البنا.
أ. يحيى محمد الكنز.
أ. عبدالرحمن عبدالله عثمان.

فريق المراجعة والتطوير

د. أمة الآله علي حمد الحوري.
أ. شرف عثمان الخامري.
أ. جميلة إبراهيم الرازحي.
أ. حميد محمد الرومي.
أ.د. أحمد عايش عبدالله.
أ. عبدالحكيم حسن السفياني.
أ. يحيى محمد الكنز.
أ. عارف سيف الشرعبي.

الإخراج الفني

صف طباعي وتصميم : جلال سلطان علي.
: عبدالرحمن حسين المهرس.

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني.

النشيد الوطني

رددي أيتها الدنيا نشيدي ... رددیه وأعيدي وأعيدي
واذكري في فرحتي كل شهيدِ ... وامنحيه حُللاً مِنْ ضوءِ عيدي

رددي أيتها الدنيا نشيدي
رددي أيتها الدنيا نشيدي

وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي ... أنت عهدٌ عالقٌ في كل ذِمّة
رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُهُ من كل شمس ... اُخْلُدِي خافِقَةً في كل قِمّة
أمتي .. أمتي .. اِمنحيني البأس يا مصدر بأسي ... واذْخُريني لَكِ يا أكرمَ أمة

عشتُ إيماني وحبِّي أُمميًّا
ومسيري فوق دربي عربيا
وسيبقى نبضُ قلبي يمنيا
لن ترى الدنيا على أرضي وصيا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ . د . عبدالرزاق يحيى الأشول.

د . عبدالله عبده الحامدي.
د/ صالح ناصر الصوفي.
أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.
أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.
د/ عبدالله علي أبو حورية.
د/ عبدالله لملس.
أ/ منصور علي مقبل.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.
أ.د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.
أ.د/ محمد حاتم المخلافي.

أ/ علي حسين الحيمي.
د/ أحمد علي المعمري.
أ.د/ صالح عوض عرم.
د/ إبراهيم محمد الحوثي.
د/ شكيب محمد باجرش.
أ.د/ داوود عبدالملك الحدابي.
أ/ محمد هادي طواف.
أ.د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
أ/ محمد عبدالله زبارة.
أ/ عبدالله علي إسماعيل.

د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

قررت اللجنة العليا للمناهج طباعة هذا الكتاب .

تقديم

في اطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية.

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات.

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها: الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبمايتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي.

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها.

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدروسة لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية.

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول

وزير التربية والتعليم

رئيس اللجنة العليا للمناهج

المقدمـــــة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم المرسلين وآله وصحبه وسلم .

إن إعادة النظر في مناهج الرياضيات وكتبها المدرسية أمر ضروري تحتمه مواكبة التطور العلمي وتحديث تربويات الرياضيات إضافة إلى مسايرة التغيرات الاجتماعية .

واستجابة لذلك يأتي هذا الكتاب « كتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي – الجزء الثاني » كحلقة ضمن سلسلة متكاملة على مرحلتين : الأساسية (١ – ٩) والثانوية من (الأول الثانوي إلى الثالث الثانوي) .

لقد عُرضت مواضيع الكتاب في تماسك وتكامل وفق تسلسل علمي ونفسي تربوي ومراعاة للفروق الفردية تم تقديم المادة الدراسية بأسلوب سلس واضح لاغموض فيه ولاتعقيد ، حيث أوردنا قدراً كافياً من الأمثلة بعد العرض النظري وأتبعنا ذلك بعدد من التمارين والمسائل آملين إتاحة فرص كثيرة للتعامل مع المادة ليكون الطالب محور التعلم معتمداً على النشاط ويكون النشاط بدافع ذاتي محققاً بذلك الأهداف الوجدانية .

ومقارنة بالكتب السابقة فإن هذا الكتاب وما يرافقه من كتاب التمارين ودليل المعلم يهتم اهتماماً كبيراً بالمفاهيم الأساسية إلى جانب تقديمه معارف سليمة ومراعاته انسجام الموضوعات مع عمليات التعلم الطبيعي للطلبة كما تحفز المدرسين على ابتكار أساليب تدريس جديدة بما يضمن لطلبتهم تعلماً فاعلاً .

ومن أهم أهداف وزارة التربية والتعليم أن يظل التطوير في نمو وتطور مستمرين ، بمتابعة كل جديد في تدريس الرياضيات وهذا لايتأتى إلا بالاستفادة من واقع التطبيق في الميدان التدريسي . فإذا راعينا كل المبادئ المذكورة أعلاه بقدر ما وفقنا المولى عز وجل بإعداد هذه المواد التربوية في ضوء استراتيجيات تهدف إلى تقد يم الأجود ، مادة وطريقة . . فإننا ننظر بشوق بالغ أن يوافينا كافة ذوي العلاقة بملاحظاتهم بغية الاستفادة منها .

نسأل المولى العلي القدير أن نكون قد وفقنا في كل ما نصبو إليه فهو ولي التوفيق والهادي إلى سواء السبيل .

المؤلفون

الموضوع		الصفحة

٦ : ١ حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد

تعلم أن الصورة العامة للمعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد (والمعادلة التربيعية) هي :

$أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ ؛ حيث $أ ، ب ، جـ \in ح$ ، $أ \neq ٠$.

ولقد سبق لك حل هذه المعادلة بطرق مختلفة منها التحليل ، إكمال المربع والقانون العام ، مع العلم بأن طريقة القانون العام تعتبر طريقة عامة لحل أي معادلة من الدرجة الثانية ويعطى بالصيغة التالية :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

حيث أ : معامل $س^٢$ ، ب : معامل س ، جـ : الحد المطلق .

ويسمى المقدار « $ب^٢ - ٤ أ جـ$ » مميز معادلة الدرجة الثانية ويرمز له بالرمز « Δ » ويقرأ دلتا .

$\therefore \Delta = ب^٢ - ٤ أ جـ$ وهو الذي يحدد طبيعة جذري المعادلة التربيعية .

ولحل المعادلة التربيعية يمكننا أن نميز الحالات التالية :

١) إذا كان $\Delta > ٠$ ، فإن $\sqrt{\Delta} \in ح$ ويكون للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

هما $\left(\frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢ أ} \right)$.

٢) إذا كان $\Delta = ٠$ ، فإن $\sqrt{\Delta} = ٠ \in ح$ ، ويكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان .

هما $\left(\frac{-ب}{٢ أ} \right)$.

٣) إذا كان $\Delta < ٠$ ، فإن $\sqrt{\Delta} \notin ح$ ، وبالتالي ليس للمعادلة جذور حقيقية .

مثال (٦ - ١) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية باستخدام القانون العام :

١) $٦ س^٢ + ٤ س - ١ = ٠$.

٢) $س (س - ٤) = -٤$.

٣) $٢ س^٢ + ٣ س + ٢ = ٠$.

١) $أ = ٦$ ، $ب = ٤$ ، $جـ = -١$.

$\Delta = ب^{٢} - ٤ أ جـ$

$\Delta = ١٦ - ٤ \times ٦ \times (-١) = ١٦ + ٢٤ = ٤٠$.

$\therefore \Delta > ٠$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

$\because س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢ أ}$.

$\therefore س = \frac{-٤ \pm \sqrt{٤٠}}{٢ \times ٦} = \frac{-٤ \pm ٢\sqrt{٤٠}}{١٢} = \frac{\cancel{٢}(-٢ \pm \sqrt{١٠})}{\cancel{١٢}\ ٦}$.

أي أن $س_{١} = \frac{-٢ + \sqrt{١٠}}{٦}$ ، $س_{٢} = \frac{-٢ - \sqrt{١٠}}{٦}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \left\{ \frac{-٢ + \sqrt{١٠}}{٦} ، \frac{-٢ - \sqrt{١٠}}{٦} \right\}$.

٢) $س (س - ٤) = -٤$

$س^{٢} - ٤ س = -٤ \Leftarrow س^{٢} - ٤ س + ٤ = ٠$.

$أ = ١$ ، $ب = -٤$ ، $جـ = ٤$.

$\Delta = ب^{٢} - ٤ أ جـ$

$\Delta = ١٦ - ٤ \times ١ \times ٤$

$\Delta = ١٦ - ١٦ = ٠$ للمعادلة جذران حقيقيان متساويان(أو نقول بأن للمعادلة جذراً حقيقياً واحداً).

$\because س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢ أ}$ $\therefore س = \frac{-ب}{٢ أ}$.

$\therefore س = \frac{-(-٤)}{٢ \times ١} = \frac{٤}{٢} = ٢$.

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{ ٢ \}$.

٣) $أ = ٢$ ، $ب = ٣$ ، $جـ = ٢$.

$\Delta = ب^{٢} - ٤ أ جـ$

$\Delta = ٩ - ٤ \times ٢ \times ٢$

$\Delta = ٩ - ١٦ = -٧$.

$\therefore \Delta < ٠$ ليس للمعادلة حلاً في ح .

$\therefore$ مجموعة الحل $= \emptyset$

مثال (٦ - ٢) أوجد قيم د التي تجعل جذري المعادلة ٧٥ س^{٢} + ٧ د س + ١٢ = ٠ متساويان .

الحل

أ = ٧٥ ، ب = ٧ د ، جـ = ١٢ .

Δ = ب^{٢} − ٤ أ جـ = (٧ د)^{٢} − ٤ × ٧٥ × ١٢ = ٤٩ د^{٢} − ٣٦٠٠

لكي يكون الجذران متساويان يجب أن يكون Δ = ٠ .

أي أن : ٤٩ د^{٢} − ٣٦٠٠ = ٠ ⇐ ٤٩ د^{٢} = ٣٦٠٠ ،

د^{٢} = $\frac{٣٦٠٠}{٤٩}$ ⇐ د = ± $\sqrt{\frac{٣٦٠٠}{٤٩}}$.

د = ± $\frac{٦٠}{٧}$ = ٨ $\frac{٤}{٧}$.

مثال (٦ - ٣) قطعة أرض مستطيلة الشكل طولها يزيد عن عرضها بمقدار ثلاثة أمتار . فإذا كانت مساحتها تساوي ٤٠ متراً مربعاً ، فأوجد بُعدي قطعة الأرض .

الحل

نفرض أن عرض قطعة الأرض بالأمتار = س .

فيكون طولها = س + ٣

∵ مساحة قطعة الأرض = ٤٠ م^{٢} .

∴ العرض × الطول = ٤٠

[مساحة المستطيل = الطول × العرض]

س (س + ٣) = ٤٠

س^{٢} + ٣ س = ٤٠

س^{٢} + ٣ س − ٤٠ = ٠ .

أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = −٤٠ ، ∵ Δ = ب^{٢} − ٤ أ جـ

∴ Δ = ٩ − ٤ × ١ × (−٤٠) = ١٦٩

∵ Δ > ٠ ⇐ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

∵ س = $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}}$.

س = $\frac{-٣ \pm \sqrt{١٦٩}}{٢}$ = $\frac{-٣ \pm ١٣}{٢}$

∴ س$_{١}$ = $\frac{-١٦}{٢}$ = −٨ (مرفوض لأن الطول يكون موجباً) ، س$_{٢}$ = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥

∴ عرض قطعة الأرض = ٥ م ، طولها = ٨ م .

[١] أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام :

أ) $س^٢ + ٥ س + ٦ = ٠$.　　ب) $٦ س^٢ + ٤ س - ٢ = ٠$.

جـ) $س^٢ + س = -١$.　　ء) $٣ س^٢ + ٣ س + ١ = ٠$.

هـ) $٢ س + \frac{٣}{س} = ٧$.　　و) $ص^٢ + ٦ ص + ٩ = ٠$.

ز) $٩ س^٢ + ١٢ س + ٢ = ٠$.　　ح) $\frac{س^٢}{٣} - \frac{٣}{٤} س + \frac{١}{٢} = ٠$.

ط) $ل^٢ - ٩ = ٠$.　　ي) $س^٢ + ٢ س هـ + هـ^٢ = ٠$.

ل) $ص + ٣ = \frac{١}{٢ ص}$.　　ك) $م^٢ - ٧ م = ٠$.

م) $س^٤ + س^٢ = ٦$.　　ن) $٢ ص^٢ - ٣ ص + ٥ = ٠$.

س) $(س - ٣)^٢ = ٢ س^٢$.　　ع) $٢ س^٢ - ٣ س = ١$.

ف) $س^٢ + ٥ س + ٣ = ٠$.　　ص) $ص^٢ - ٠,٥ ص = ١,٥$.

[٢] بيّن أنّ $س = ٣$ جذر المعادلة $- س^٢ + ٤ س - ٣ = ٠$ ، ثم أوجد الجذر الآخر .

[٣] بيّن أن للمعادلة $٢ س^٢ - س - ٣ = ٠$ جذرين في ح ، وأوجدهما .

[٤] لتكن المعادلة : $ب س^٢ - س + ب - ٣ = ٠$. ما قيمة ب إذا كان أحد جذريها $= -١$.

[٥] أوجد قيمة (قيم) م التي تجعل جذري المعادلة $٣ س^٢ - ٨ س + م = ٠$ متساويان .

[٦] أوجد قيمة (قيم) جـ التي تجعل جذري المعادلة $س^٢ + (جـ - ١) س = ٢ جـ + ١$ متساويان .

[٧] ثلاثة أعداد متتالية مجموع مربعاتها ١٤٩ . أوجد هذه الأعداد .

[٨] عددان فرديان موجبان متتاليان . مربع مجموعهما يزيد على مجموع مربعيهما بمقدار ١٩٨ . فما العددان .

[٩] مجموع عدد ومقلوبه يساوي $\frac{٢٩}{١٠}$ أوجد العدد .

٦ : ٢ مجموع وحاصل ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية

أولاً : مجموع جذري معادلة من الدرجة الثانية :

ليكن $س_١$ ، $س_٢$ جذري المعادلة $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ هل يمكن أن نعرف مجموعهما دون أن نحل المعادلة ؟

نعلم أن $س_١ = \frac{- ب - \sqrt{\Delta}}{٢ أ}$ ، $س_٢ = \frac{- ب + \sqrt{\Delta}}{٢ أ}$.

$\therefore$ مجموع الجذرين $= \text{س}_1 + \text{س}_2 = \left(\frac{\quad}{\text{٢أ}} \right) + \left(\frac{\quad}{\text{٢أ}} \right)$

$$= \frac{-\text{ب} - \cancel{\sqrt{\Delta}} - \text{ب} + \cancel{\sqrt{\Delta}}}{\text{٢أ}} \;.$$

$$\text{س}_1 + \text{س}_2 = \frac{-\cancel{\text{٢}}\text{ب}}{\cancel{\text{٢}}\text{أ}} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$$

$\therefore$ مجموع الجذرين $= \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$.

نستنتج مما سبق المبرهنة التالية :

مبرهنة (٦ : ١)

للمعادلة أس^٢ + ب س + جـ = ٠ جذران مجموعهما يساوي $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$.

مثال (٦ – ٤) أوجد مجموع جذري المعادلة ٢ س^٢ – ٣ س = ٥ .

الحـــل ٢ س^٢ – ٣ س – ٥ = ٠ ، مجموع الجذرين $= \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{٣}{٢}$.

مثال (٦ – ٥) أوجد مجموع جذري المعادلة ٥ س^٢ + ٨ س + ٤ = ٠ .

الحـــل مجموع الجذرين $= \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{-٨}{٥}$.

نلاحـظ فـــي المثال (٢ – ١) أن $\Delta > ٠$. لذا للمعادلة جذران حقيقيان .

بينما في المثال (٢ – ٢) نجد أن $\Delta < ٠$. لذا للمعادلة جذران غير حقيقيين .

مما سبق نؤكد على حساب Δ قبل البدء بالحل ، لأن دراستنا فقط على مجموعة الأعداد الحقيقية (ح).

ثانياً : حاصل ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية :

ليكن س$_1$ ، س$_2$ جذري المعادلة أ س^٢ + ب س + جـ = ٠ ؛ هل يمكن أن نعرف حاصل ضربهما دون أن نحل المعادلة ؟

نعلم أن $\text{س}_1 = \frac{-\text{ب} - \sqrt{\Delta}}{\text{٢أ}}$ ، $\text{س}_2 = \frac{-\text{ب} + \sqrt{\Delta}}{\text{٢أ}}$ ،

$\therefore$ حاصل ضرب الجذرين $= \text{س}_1 \times \text{س}_2 = \left(\frac{-\text{ب} - \sqrt{\Delta}}{\text{٢أ}} \right) \left(\frac{-\text{ب} + \sqrt{\Delta}}{\text{٢أ}} \right)$.

∴ حاصل ضرب الجذرين = $\dfrac{\text{ب}^{٢} - \Delta}{\text{٤أ}^{٢}}$

$$= \dfrac{\text{ب}^{٢} - (\text{ب}^{٢} - \text{٤أجـ})}{\text{٤أ}^{٢}} = \dfrac{\cancel{\text{ب}^{٢}} - \cancel{\text{ب}^{٢}} + \text{٤أجـ}}{\text{٤أ}^{٢}} = \dfrac{\cancel{\text{٤أ}}\,\text{جـ}}{\cancel{\text{٤}}\,\text{أ}^{\cancel{٢}}} = \dfrac{\text{جـ}}{\text{أ}}$$

∴ حاصل ضرب الجذرين = $\dfrac{\text{جـ}}{\text{أ}}$.

نستنتج مما سبق المبرهنة التالية :

مبرهنة (٦ : ٢)

للمعادلة أس٢ + ب س + جـ = ٠ جذران حاصل ضربهما يساوي $\dfrac{\text{جـ}}{\text{أ}}$.

مثال (٦ – ٦) أوجد حاصل ضرب جذري المعادلة ٥ س٢ + ٩ س + ٢ = ٠ .

الحـــل حاصل ضرب الجذرين = $\dfrac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \dfrac{٢}{٥}$

مثال (٦ – ٧) أوجد حاصل ضرب جذري المعادلة ٣ س٢ + ٢ س + ٥ = ٠ .

الحـــل حاصل ضرب الجذرين = $\dfrac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \dfrac{٥}{٣}$

نلاحظ في المثال (٢ – ٤) إن حاصل ضرب الجذرين $\dfrac{٥}{٣}$ بالرغم من كون الجذرين غير حقيقيين ، لذا نؤكد مجدداً على حساب Δ قبل البدء في الحل لأن دراستنا على ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) .

مثال (٦ – ٨) بيّن أن س = −٣ جذرُ للمعادلة ٣ س٢ + ٤س – ١٥ = ٠، ثم احسب الجذر الآخر.

الحـــل لكي نبيّن أن س = −٣ جذرُ للمعادلة فإن يجب أن يحققها .

نعوض عن س = −٣ في المعادلة .

الطرف الأيمن = ٣ × ٩ – ١٢ – ١٥ = ٢٧ – ٢٧ = ٠ = الطرف الأيسر .

∴ س = −٣ جذرُ للمعادلة .

لحساب الجذر الآخر نستخدم مبرهنة مجموع الجذرين .

∵ مجموع الجذرين = س١ + س٢ = $\dfrac{-\text{ب}}{\text{أ}}$.

∴ −٣ + س … = $\dfrac{-٤}{\ldots}$

$$س_{٢} = \frac{-٤ + ٩}{٣} = \frac{٥}{٣} \quad .$$

$\therefore$ الجذر الآخر $= \frac{٥}{٣}$.

تمارين ومسائل (٦ : ٢)

[١] أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلات التالية :

أ) $٢ س^{٢} + ٣ س + ١ = ٠$. ب) $-٢ س^{٢} + ٥ س + ٧ = ٠$.

جـ) $س^{٢} - ٣ س = ١$. ء) $س^{٢} + ١ = ٠$.

هـ) $\frac{١}{٢} س^{٢} - ٣ س - ٤ = ٠$. و) $٢٥ س^{٢} - ٦٠ س + ٣٦ = ٠$.

[٢] حدّد نوع جذري كل من المعادلات الآتية :

أ) $س^{٢} - ٣ س + ٤ = ٠$. ب) $٣ س^{٢} - ٥ س = ٢$.

جـ) $١٠ س^{٢} - ١٣ س - ٣ = ٠$. ء) $٢ س^{٢} - ١١ س + ١٥ = ٠$ ،

ثم أوجد مجموعهما وحاصل ضربهما .

[٣] بيّن أن للمعادلة $٢ س^{٢} - ٦ س - ١٥ = ٠$ جذرين حقيقيين مختلفين ، ثم أوجد مجموعهما وحاصل ضربهما .

[٤] بيّن أن $س = \frac{١}{٣}$ جذر للمعادلة $١٥ س^{٢} - ٢ س = ١$ ، ثم أوجد الجذر الآخر .

[٥] ما قيمة هـ في المعادلة : $(هـ + ٣) س^{٢} + ٢ س + ٢ هـ - ٤ = ٠$ إذا كان أحد جذريها ٢ ثم أوجد الجذر الآخر .

[٦] ما قيمة م في المعادلة : $٢ س^{٢} - ٥ (م + ١) س + م - ٣ = ٠$ ، إذا كان أحد جذريها ١ ، ثم أوجد الجذر الآخر .

٦ : ٣ تكوين معادلة من الدرجة الثانية إذا عُلِمَ جذراها

تعرفنا على الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانيــة وهــي : $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ ، $أ \neq ٠$ ؛ ويمكن وضع هذه المعادلة في الصورة الآتية :

$$س^{٢} + \frac{ب}{أ} س + \frac{جـ}{أ} = ٠ \quad \text{(بالقسمة على أ)} \quad .$$

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ ، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$.

∴ **$س^{٢}$ − (مجموع الجذرين) × س + حاصل ضرب الجذرين = ٠ .**

بصورة عامة : إذا علم جذرا المعادلة $س_{١}$ ، $س_{٢}$ فإن المعادلة تكتب بإحدى الصورتين :

١) $س^{٢}$ − ($س_{١}$ + $س_{٢}$) س + $س_{١}$ $س_{٢}$ = ٠ .

٢) (س − $س_{١}$) (س − $س_{٢}$) = ٠

مثال (٦ − ٩) كوّن المعادلة إذا كان : $س_{١}$ + $س_{٢}$ = ٧ ، $س_{١}$ $س_{٢}$ = $\frac{١}{٣}$.

حيث $س_{١}$ ، $س_{٢}$ جذرا المعادلة .

الحل

∵ $س^{٢}$ − ($س_{١}$ + $س_{٢}$) س + $س_{١}$ $س_{٢}$ = ٠

∴ $س^{٢}$ − ٧ س + $\frac{١}{٣}$ = ٠ (بالضرب في ٣) .

∴ ٣ $س^{٢}$ − ٢١ س + ١ = ٠ .

مثال (٦ − ١٠) اكتب المعادلات التي لها جذران في الحالات الآتية :

أ) $س_{١}$ = ٥ ، $س_{٢}$ = −٢ . ب) $س_{١}$ = $\frac{٢}{٣}$ ، $س_{٢}$ = − $\frac{١}{٤}$.

جـ) $س_{١}$ = −٢ + $\sqrt{٥}$ ، $س_{٢}$ = −٢ − $\sqrt{٥}$.

الحل

أ) $س_{١}$ + $س_{٢}$ = ٥ + (−٢) = ٣

$س_{١}$ $س_{٢}$ = ٥ × −٢ = −١٠

∴ $س^{٢}$ − ($س_{١}$ + $س_{٢}$) س + $س_{١}$ $س_{٢}$ = ٠

∴ $س^{٢}$ − ٣ س − ١٠ = ٠ .

يمكن كتابة المعادلة بالصورة: $(س - س_١)(س - س_٢) = ٠$

المعادلة هي : $(س - ٥)(س - (-٢)) = ٠$

$(س - ٥)(س + ٢) = ٠$

$س^٢ + ٢س - ٥س - ١٠ = ٠$ بفك الأقواس .

$س^٢ - ٣س - ١٠ = ٠$

ب) $س_١ + س_٢ = \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٤} = \frac{٨ - ٣}{١٢} = \frac{٥}{١٢}$.

$س_١ س_٢ = \frac{\cancel{٢}^{١}}{٣} \times \frac{-١}{\cancel{٤}_{٢}} = \frac{-١}{٦}$.

$\because$ $س^٢ - (س_١ + س_٢)س + س_١ س_٢ = ٠$

$\therefore$ $س^٢ - \frac{٥}{١٢}س - \frac{١}{٦} = ٠$ (بالضرب في ١٢) .

$\therefore$ $١٢س^٢ - ٥س - ٢ = ٠$.

جـ) $س_١ + س_٢ = -٢ + \sqrt{٥} - ٢ - \sqrt{٥} = -٤$.

$س_١ س_٢ = (-٢ + \sqrt{٥})(-٢ - \sqrt{٥}) = (-٢)^٢ - ٢\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥} - (\sqrt{٥})^٢$.

$= ٤ - ٥ = -١$.

$\because$ $س^٢ - (س_١ + س_٢)س + س_١ س_٢ = ٠$

$\therefore$ $س^٢ + ٤س - ١ = ٠$.

تمارين ومسائل (٦ : ٣)

[١] كوّن المعادلات التي تتصف بالشروط التالية :

ا) $س_١ + س_٢ = ٣$ ، $س_١ س_٢ = -٦$.   ب) $س_١ + س_٢ = \frac{١}{٢}$ ، $س_١ س_٢ = \frac{-١}{٤}$.

جـ) $س_١ + س_٢ = -٣$ ، $س_١ س_٢ = ٠$.   ء) $س_١ + س_٢ = ٢$ ، $س_١ س_٢ = \frac{-٢}{٥}$.

هـ) $س_١ + س_٢ = ٠$ ، $س_١ س_٢ = -٣$.   و) $س_١ + س_٢ = -٥$ ، $س_١ س_٢ = \frac{٣}{٥}$.

[٢] كوّن المعادلات التي جذراها كما يأتي :

ا) $س_١ = ٣$ ، $س_٢ = -٤$.   ب) $س_١ = \frac{١}{٢}$ ، $س_٢ = \frac{-٢}{٣}$.

[٣] أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة ٢ س^{٢} – ١١ س – ٥ = ٠ .

[٤] أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة س^{٢} – (هـ + ١) س – هـ^{٢} = ٠ ، بدلالة هـ .

[٥] لدينا المعادلة هـ س^{٢} – ٢ (هـ + ١) س + هـ – ٢ = ٠ ، هـ $\neq$ ٠ :

أ) أوجد مجموع الجذرين ، وحاصل ضربهما بدلالة هـ .

ب) حل المعادلات في الحالات الآتية : هـ = ١ ، هـ = ٢ ، هـ = –١ .

٦ : ٤ اتحاد وتقاطع الفترات

سبق أن درست في الصف التاسع الأساسي الفترات العددية ، وأنواعها وطريقة تمثيلها ، وللتذكير سوف نوردها بإيجاز على النحو التالي :

بفرض أن أ ، ب $\in$ ح ، أ $<$ ب تنقسم الفترات إلى ما يلي :

أولاً : الفترات المحدودة : وهي فترات طرفيها اعداد حقيقية ، ويمكن تصنيفها على النحو التالي :

١ – فترة مغلقة مثل : [أ ، ب] = { س : س $\in$ ح ، أ $\leq$ س $\leq$ ب } .

٢ – فترة مفتوحة مثل :] أ ، ب [= { س : س $\in$ ح ، أ $<$ س $<$ ب } .

٣ – فترات نصف مفتوحة (نصف مغلقة) وهي فترات مفتوحة من طرف ومغلقة من الآخر وتشمل ما يلي :

- فترات مفتوحة من اسفل ومغلقة من أعلى مثل] أ ، ب] = { س : س $\in$ ح ، أ $<$ س $\leq$ ب } .
- فترات مغلقة من اسفل ومفتوحة من أعلى مثل [أ ، ب [= { س : س $\in$ ح ، أ $\leq$ س $<$ ب } .

ثانياً : الفترات غير المحدودة : وهي فترات أحد طرفيها أو كليهما = $\pm\infty$ ويمكن تصنيفها على النحو التالي :

١ – فترة غير محدودة من طرفيها :] –∞ ، ∞ [= { س : س $\in$ ح } .

٢ – فترات غير محدودة من أعلى : وهي فترات لها حد سفلى فقط وتنقسم إلى القسمين التاليين :

- فترات محدودة ومغلقة من اسفل مثل [أ ، ∞ [= { س : س $\in$ ح ، س $\geq$ أ } .
- فترات محدودة من اسفل ولكن مفتوحة مثل] أ ، ∞ [= { س : س $\in$ ح ، س $>$ أ } .

٣ – فترات غير محدودة من اسفل : وهي فترات لها حد علوى فقط وتنقسم إلى القسمين التاليين :

- فترات محدودة ومغلقة من أعلى مثل] –∞ ، أ] = { س : س $\in$ ح ، س $\leq$ أ } .
- فترات محدودة من اعلى ولكن مفتوحة مثل] –∞ ، أ [= { س : س $\in$ ح ، س $<$ أ } .

تذكــر أن :

- **عند كتابة الفترات نبدأ بالطرف السفلي دائماً .**
- **نمثل الطرف المفتوح في مجموعة الحل بدائرة مفرغة لتدل على عدم انتمائه إلى مجموعة الحل كما نمثل الطرف المغلق فيها بدائرة مصمتة لتدل على انتمائه إلى مجموعة الحل .**

لتكن ف$_{١}$ ، ف$_{٢}$ ، فترتين عدديتين ؛ فإنه يكون :

١) س ∈ (ف$_{١}$ ∩ ف$_{٢}$) ⟺ (س ∈ ف$_{١}$) ∧ (س ∈ ف$_{٢}$) .

٢) س ∈ (ف$_{١}$ ∪ ف$_{٢}$) ⟺ (س ∈ ف$_{١}$) ∨ (س ∈ ف$_{٢}$) .

ويمكن تعميم ذلك لأكثر من فترتين .

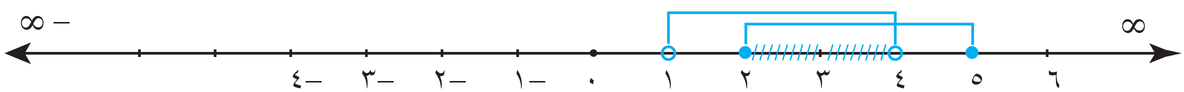
مثال (٦ – ١١) لتكن : ف$_{١}$ = [٢ ، ٥] ، ف$_{٢}$ =]١ ، ٤[، ف$_{٣}$ = [٤ ، ٥[، ف$_{٤}$ =]-٢ ، ١] ، ف$_{٥}$ =]-٣ ، ∞[، ف$_{٦}$ =]-∞ ، -٣[. أوجد كلاً من :

١) ف$_{١}$ ∩ ف$_{٤}$ ، ٢) ف$_{١}$ ∩ ف$_{٢}$ ، ٣) ف$_{٢}$ ∪ ف$_{٣}$ ،
٤) ف$_{١}$ ∩ ف$_{٣}$ ، ٥) ف$_{١}$ ∪ ف$_{٣}$ ، ٦) ف$_{٥}$ ∪ ف$_{٦}$ ،
٧) ف$_{٤}$ ∩ ف$_{٦}$ ، ٨) ف$_{٣}$ ∪ ف$_{٥}$ ، ٩) ف$_{٣}$ ∩ ف$_{٥}$.

الحـــل

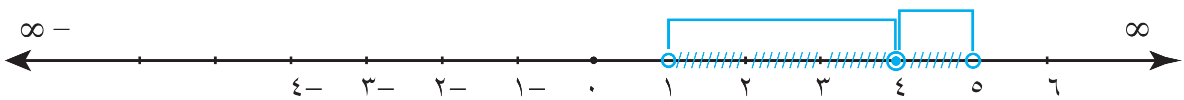
١ – ف$_{١}$ ∩ ف$_{٤}$ = [٢ ، ٥] ∩]-٢ ، ١] = ∅ .

٢ – ف$_{١}$ ∩ ف$_{٢}$ = [٢ ، ٥] ∩]١ ، ٤[= [٢ ، ٤[[شكل (٦–١)] .



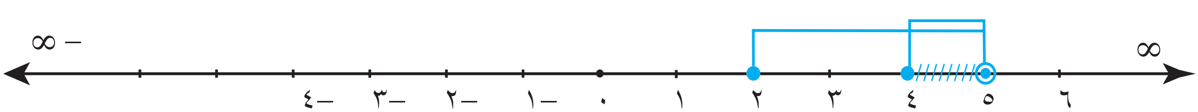
شكل (٦ – ١)

٣ – ف$_{٢}$ ∪ ف$_{٣}$ =]١ ، ٤[∪ [٤ ، ٥[=]١ ، ٥[.



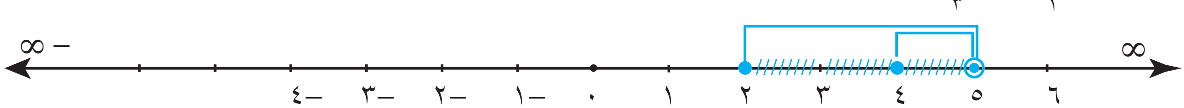
شكل (٦ – ٢)

٤ – ف$_{١}$ ∩ ف$_{٣}$ = [٢ ، ٥] ∩ [٤ ، ٥[= [٤ ، ٥[.

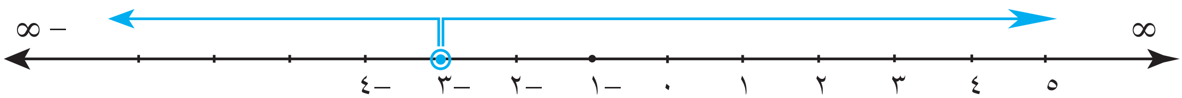


شكل (٦ – ٣)

٥ – ف$_{١}$ ∪ ف$_{٣}$ = [٢ ، ٥] ∪ [٤ ، ٥[= [٢ ، ٥] .



شكل (٦ – ٤)



شكل (٦ – ٥)

٧ – ف$_{٤}$ ∩ ف$_{٦}$ = [–٢ ، ١ [∩ [–∞ ، –٣] = ∅ .

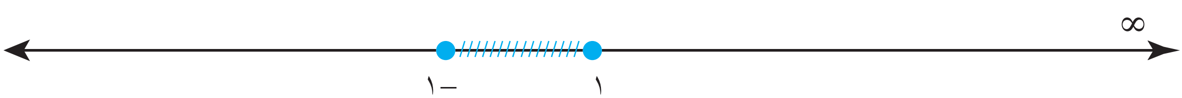
٨ – ف$_{٣}$ ∪ ف$_{٥}$ = [٤ ، ٥] ∪] –٣ ، ∞] =] –٣ ، ∞] .

٩ – ف$_{٣}$ ∩ ف$_{٥}$ = [٤ ، ٥] ∩] –٣ ، ∞] =] ٤ ، ٥] .

تمارين ومسائل (٦ : ٤)

[١] عبر عن كلٍّ من الأشكال التالية باستخدام الفترات :

أ)

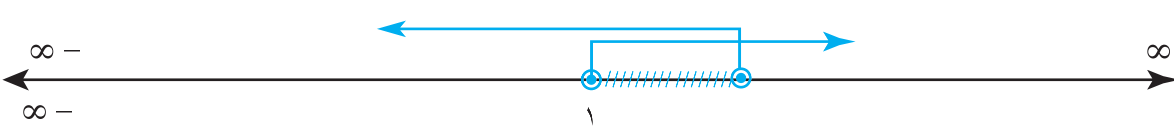


شكل (٦ – ٦)

ب)

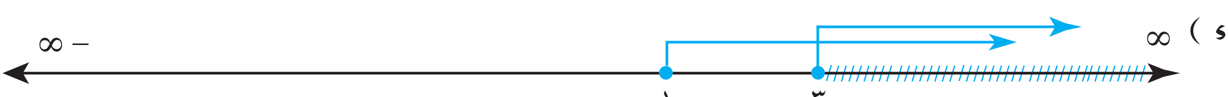
شكل (٦ – ٧)

جـ)



شكل (٨ – ٦)

ء)



شكل (٦ – ٩)

[٢] أيٌّ العبارات التالية صحيحة وايها خاطئة :

أ) [–٥ ، ∞] ∪ [–∞ ، –٨] = ح / [–٨ ، –٥] .

ب) [–٢ ، ٣ [∩ [٣ ، ∞] = ∅ .

[٣] إذا كانت : ف$_١$ =] ٥ ، ∞ [، ف$_٢$ = [٤ ، ∞ [، ف$_٣$ = [–∞ ، ٣] ،
ف$_٤$ = [–٥ ، ٧] ، ف$_٥$ = [٣ ، ٦] ، ف$_٦$ = [–٣ ، ٢] . فأجب عمّا يأتي :

أ) مثل الفترات السابقة بيانياً .

ب) أوجد كلاً من : ١) (ف$_١$ ∪ ف$_٢$) . ٢) (ف$_٥$ ∩ ف$_٤$) . ٣) (ف$_٦$ ∩ ف$_٣$) .

٤) ف$_١$ ∪ ف$_٥$. ٥) ف$_٣$ ∩ ف$_٤$. ٦) ف$_٢$ ∪ ف$_٣$.

٧) ف$_٦$ ∩ ف$_١$. ٨) ف$_٤$ ∩ ف$_٢$. ٩) ف$_١$ ∪ ف$_٦$.

٦ : ٥ متراجحات الدرجة الأولى في متغير واحد

تعريف (٦ : ٢)

لتكن حـ$_١$ (س) ، حـ$_٢$ (س) حدوديتين من الدرجة الأولى في متغير واحد فإن الصيغ الجبرية التالية :

حـ$_١$ (س) ≥ حـ$_٢$ (س) ، حـ$_١$ (س) ≤ حـ$_٢$ (س) ،

حـ$_٢$ (س) < حـ$_١$ (س) ، حـ$_٢$ (س) > حـ$_١$ (س) ،

تسمى متراجحات من الدرجة الأولى في متغير واحد .

تدريب (٦–١) بيّن أياً من المتراجحات التالية من الدرجة الأولى في متغير واحد ؟

١) ٣ س – ١ < ٤ س + ٢ . ٢) ٣ س – ص < ٤ س + ١ .

٣) $\frac{\text{٤ س – ٣}}{\text{٥}}$ ≤ ٦ . ٤) ٤ س^٢ – ٣ س ≥ ٢ .

حل متراجحات الدرجة الأولى في متغير واحد :

حل المتراجحة يعني إيجاد مجموعة جزئية من ح بحيث لو عوّضنا بأي عنصر منها عن متغير المتراجحة نحصل على قضية صائبة .

يقوم حل المتراجحة على الانتقال من المتراجحة المفروضة إلى متراجحات مكافئة على التعاقب باستخدام التحويلات المكافئة إلى أن نصل إلى متراجحة واضحة الحل مثل : س ≥ أ حيث أ ∈ ح .

فتكون مجموعة الحل = { س : س ∈ ح ، س ≥ أ } .

ويمكن التعبير عن مجموعة الحل بالصورة : س ∈ [أ ، ∞ [، وقد نكتفي بالقول أن مجموعة حل

يقصد بتمثيل الحل بيانياً تحديد مجموعة الحل على شكل فترة جزئية من خط الأعداد « بتظليلها أو بإعطائها لون مغاير »

تـذكــــر أن :

- إضافة أو طرح أي عدد حقيقي إلى طرفي المتراجحة لايعكس ترتيبها
- قسمة أو ضرب طرفيها بعدد حقيقي موجب لا يغير ترتيبها ايضاً .
- إيجاد مقلوبي طرفيها أو ضربهما في عدد حقيقي سالب يغير ترتيبها .

مثال (٦ – ١٢) حل المتراجحة : ٣ س + ٢ < ٢ س – ٣ جبرياً .

الحــل

٣ س + ٢ < ٢ س – ٣ ⟸ ٣ س – ٢ س + ٢ < ٢ س – ٢ س – ٣ (بطرح ٢س من الطرفين)

⟸ س + ٢ – ٢ < – ٣ – ٢ (بطرح ٢ من الطرفين) .

⟸ س < – ٥

∴ مجموعة الحل =]– ٥ ، ∞ [.

مثال (٦ – ١٣) أوجد مجموعة حل المتراجحة : س + ٤ ≥ ٩ س جبرياً ومثلها بيانياً .

الحــل

س + ٤ ≥ ٩ س (بطرح ٩ س من الطرفين)

⟸ س – ٩ س + ٤ ≥ ٩ س – ٩س (بطرح ٤ من الطرفين)

⟸ – ٨ س + ٤ – ٤ ≥ – ٤

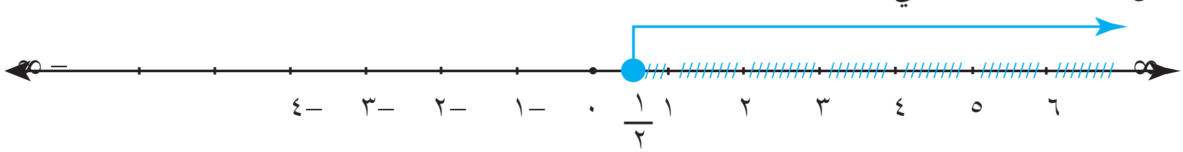
⟸ – ٨ س ≥ –٤ (بضرب الطرفين في – $\frac{١}{٨}$)

⟸ – $\frac{١}{٨}$ × – ٨ س ≤ – $\frac{١}{٨}$ × – ٤

⟸ س ≤ $\frac{١}{٢}$

∴ مجموعة الحل = [$\frac{١}{٢}$ ، ∞ [.

ويمكن تمثيلها بيانياً كالتالي :



شكل (٦ – ١

مثال (٦ – ١٤) حل المتراجحة : $\frac{٣}{٥} - \frac{٢س - ١}{١٥} > \frac{٤س}{٣} + ٢$.

الحــل

$$\frac{٣}{٥} - \frac{٢س - ١}{١٥} > \frac{٤س}{٣} + ٢ \ .$$

$$\Rightarrow ١٥ \times \frac{٣}{٥} - ١٥\left(\frac{٢س - ١}{١٥}\right) > ١٥ \times \frac{٤س}{٣} + ١٥ \times ٢$$

$$\Rightarrow ٩ - (٢س - ١) > ٢٠س + ٣٠$$

$$\Rightarrow ٩ - ٢س + ١ > ٢٠س + ٣٠$$

$$\Rightarrow -٢س + ١٠ > ٢٠س + ٣٠$$

$$\Rightarrow -٢٢س + ١٠ - ١٠ > ٣٠ - ١٠$$

$$\Rightarrow -٢٢س > ٢٠$$

$$\Rightarrow -\frac{١}{٢٢} \times -٢٢س < -\frac{١}{٢٢} \times ٢٠$$

$$\Rightarrow س < -\frac{٢٠}{٢٢} \ .$$

$$\Rightarrow س < -\frac{١٠}{١١} \ .$$

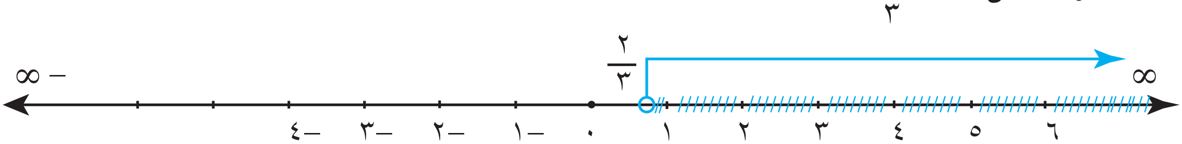
∴ مجموعة الحل = $]-\infty \ ، -\frac{١٠}{١١}[$.

مثال (٦ – ١٥) أوجد مجموعة الحل للمراجحة : $٣س - ٢ > ٠$ ومثلها بيانياً .

الحــل

$$٣س - ٢ > ٠ \Rightarrow ٣س > ٢ \Rightarrow س > \frac{٢}{٣}$$

∴ مجموعة الحل = $]\frac{٢}{٣} \ ، \infty[$.



شكل (٦ – ١١)

ملاحظة : لقد مثلنا العدد $\frac{٢}{٣}$ بدائرة مفرغة لأنه لا ينتمي إلى مجموعة حل المتراجحة

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الخيارات المرفقة لكل سؤال مما يأتي : حيث س ∈ ح .

١ – إذا كانت : ٢ س – ٣ > ١ فإن :

أ) س ≥ ٢ . ب) س ∈ [٢ ، ∞[. جـ) س ∈]٢ ، ∞[.

٢ – إذا كانت : ٣ + ٢ س ≥ – س فإن :

أ) س ∈ [–١ ، ∞[. ب) س > ١ . جـ) س < –١ .

٣ – إذا كانت : س – ٣ > ٤ س + ١ فإن :

أ) س ∉]$-\frac{٤}{٣}$ ، ∞[. ب) س < $-\frac{٣}{٤}$. جـ) س < $-\frac{٤}{٣}$.

[٢] حدد بإشارة (√) متراجحة الدرجة الأولى في متغير واحد مما يأتي وما عداها بإشارة (✗) :

أ) ١ – ٢ س > ٠ (   ) ب) $\frac{٢ س – ١}{س} > \frac{س + ٢}{٣}$ (   )

جـ) ٢ س + $\frac{٣}{س}$ > ٢ (   ) ء) ٤ س – ٢ ≤ س (س + ١) (   )

[٣] أوجد مجموعة حل كل من المتراجحات التالية ومثلها بيانياً :

أ) س + ٣ ≥ ٠ . ب) ٢ س – ١ > ٥ س + ٢

جـ) ٩ س – ٣ ≤ ٢ س + ٤ . ء) ٥ س < ٦ س – ٣ .

هـ) – س + ٢ ≤ ٢ س – ١ . و) $\frac{٦ س + ١}{٣} > \frac{٥ س}{٣}$.

٦ : ٦ متراجحة الدرجة الثانية في متغير واحد

سبق أن درست في الصف التاسع الأساسي كيف توجد مجموعة حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد، إمَّا بالتحليل ، أو باستخدام القانون العام ، بعد أن تضعها في صورتها العامة :

أ $س^٢$ + ب س + جـ = ٠ ، أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠ .

فإذا استبدلنا إشارة التساوي في المعادلة السابقة بإحدى إشارات التراجح : > ، ≥ ، ≤ ، <

نحصل على متراجحة من الدرجة الثانية في متغير واحد في صورتها العامة :

أ $س^٢$ + ب س + جـ ≥ ٠

حل متراجحة الدرجة الثانية في متغير واحد :

لإيجاد مجموعة حل متراجحة الدرجة الثانية في متغير واحد نتبع ما يأتي :

١ – نجعلها بصورة متراجحة صفرية .

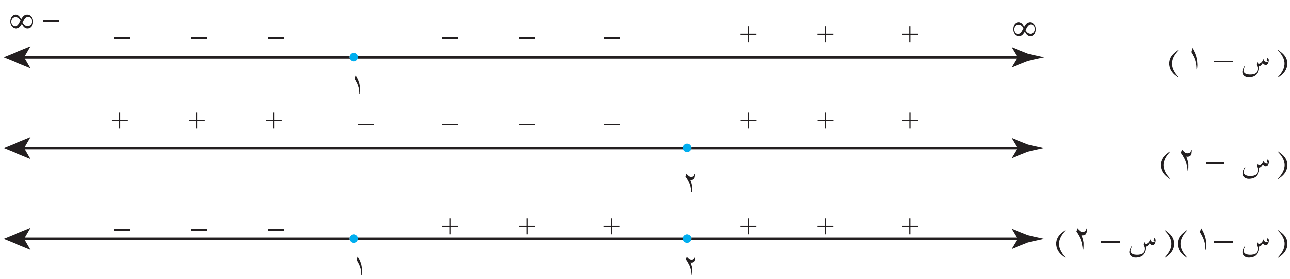
٢ – نحدد إشارة المقدار الثلاثي : أ $س^٢$ + ب س + جـ

- نرسم خطوط الأعداد (أسفل بعض) يزيد عددها عن عدد عوامل المقدار : ا س^{٢} + ب س + جـ بواحد .
- نختار لكل عامل من العوامل خطاً مستقيماً نحدد عليه صفر هـذا العامل وإشاراته قبل وبعـد صفره (جذره) .
- نحدد إشارات حاصل ضرب العاملين على خط الأعداد الاخير قبل وبعد أصفار المقدار (جذوره) فتكون هي إشارات المقدار : ا س^{٢} + ب س + جـ .
- مجموعة حل المتراجحة هي الفترات التي إشارات المقدار فيها تحقق المتراجحة المعطاة .

مثال (٦ – ١٦) أوجد مجموعة حل المتراجحة : (س – ١) (س –٢) ≤ ٠

الحل

للمقدار جذران هما س$_{١}$ = ١ أو س$_{٢}$ = ٢ .



شكل (٦ – ١٢)

من الشكل نلاحظ على خط إشارات حاصل الضرب أن : (س – ١) (س – ٢) ≤ ٠ تتحقق في الفترة [١ ، ٢] ∴ مجموعة حل المتراجحة = [١ ، ٢] .

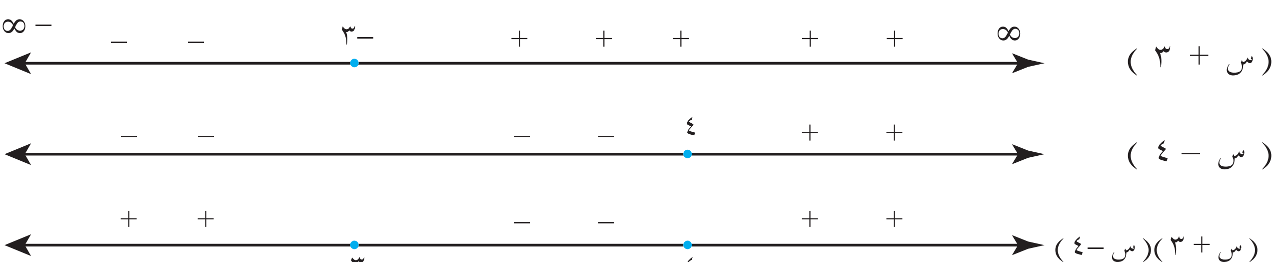
مثال (٦ – ١٧) أوجد مجموعة حل المتراجحة : س + ١٢ ≥ س^{٢} .

الحل

س + ١٢ ≥ س^{٢} ⟺ – س^{٢} + س + ١٢ ≥ ٠ ⟸ س^{٢} – س – ١٢ ≤ ٠

⟸ (س – ٤) (س + ٣) ≤ ٠ .

للمقدار س^{٢} – س – ١٢ جذران هما س$_{١}$ = –٣ أو س$_{٢}$ = ٤



مجموعة حل المتراجحة =]− ∞ ، −٣] ∪ [٤ ، ∞[.

قاعدة هامة :

يمكننا تحديد إشارة المقدار الثلاثي : أ س^{٢} + ب س + جـ جبرياً ودون اللجوء إلى خطوط الإعداد كما يلي :

- **إذا كان للمقدار جذران حقيقيان مختلفان (أي أن Δ > ٠) فإن إشارته تكون مخالفة لإشارة معامل س^{٢} أي إشارة (أ) في فترة ما بين الجذرين ، وتكون مساوية لها في الفترات الواقعة خارج الجذرين ، ويضاف الجذران في حالة وجود إشارة التساوي مع علامة التراجح .**
- **إذا لم يكن للمقدار جذران حقيقيان (أي أن Δ < ٠) فإن :إشارته تتبع إشارة معامل س^{٢}(أي إشارة أ) $\forall$ س $\in$ ح.**

مثال (٦ − ١٨) أوجد مجموعة حل المتراجحة : −٢ س^{٢} + س − ١ > ٠ .

الحــل

أ = −٢ < ٠ ، ب = ١ ، جـ = −١ ، Δ = ١ −٨ = −٧ < ٠ .

∴ مجموعة حل المتراجحة = $\varnothing$.

(إشارة المتراجحة مخالفة لإشارة أ) .

مثال (٦ − ١٩) أوجد مجموعة حل المتراجحة : ٥ س^{٢} − ٤ س + ١٢ > ٠ .

الحــل

أ = ٥ > ٠ ، ب = −٤ ، جـ = ١٢ ، Δ = ١٦ − ٢٤٠ < ٠ .

ليس للمعادلة جذرين

أ > ٠ ، Δ < ٠

∴ مجموعة حل المتراجحة = ح .

مثال (٦ − ٢٠) أوجد مجموعة حل المتراجحة : س^{٢} − ٣ س + ٢ ≤ ٠ .

الحــل

أ = ١ > ٠ ، ب = −٣ ، جـ = ٢ ، Δ = ٩ − ٨ > ٠

⇐ للمقدار جذران حقيقيان

⇐ (س − ١) (س − ٢) ≤ ٠ .

⇐ جذرا المقدار هما س$_{١}$ = ١ ، س$_{٢}$ = ٢

∴ مجموعة حل المتراجحة = [١ ، ٢] .

« إشارة المقدار مخالفة لإشارة أ في فترة ما بين الجذرين . واضفنا الجذرين لأن "=" موجودة مع إشارة التراجح » .

مثال (٦ − ٢١) أوجد مجموعة حل المتراجحة : س^{٢} − س − ٦ > ٠ .

للمقدار $س^٢ - س - ٦$ جذران $\Leftarrow$ $(س - ٣) (س + ٢) > ٠$

جذرا المقدار هما $س_١ = ٣$ أو $س_٢ = -٢$ ، $\Delta > ٠$ ، $أ > ٠$

$\Leftarrow$ مجموعة الحل $=] -\infty ، -٢ [\cup] ٣ ، \infty [$ (خارج الجذرين) .

المتراجحات الكسرية :

هي المتراجحات التي تحوي كسر في أحد طرفيها أو في كليهما ، بحيث يكون المقام حدودية .

مثال (٦ - ٢٢) حل المتراجحة : $\frac{س^٢ - ١}{٢ س + ٣} \leq ٢ (س + ١)$.

الحل

$$\frac{س^٢ - ١}{٢ س + ٣} \leq ٢ (س + ١) \Leftrightarrow \frac{س^٢ - ١}{٢ س + ٣} - ٢ (س + ١) \leq ٠$$

$$\Leftarrow \frac{س^٢ - ١ - ٢ (س + ١) (٢ س + ٣)}{٢ س + ٣} \leq ٠$$

$$\Leftarrow \frac{س^٢ - ١ - ٤ س^٢ - ٦ س - ٤ س - ٦}{٢ س + ٣} \leq ٠$$

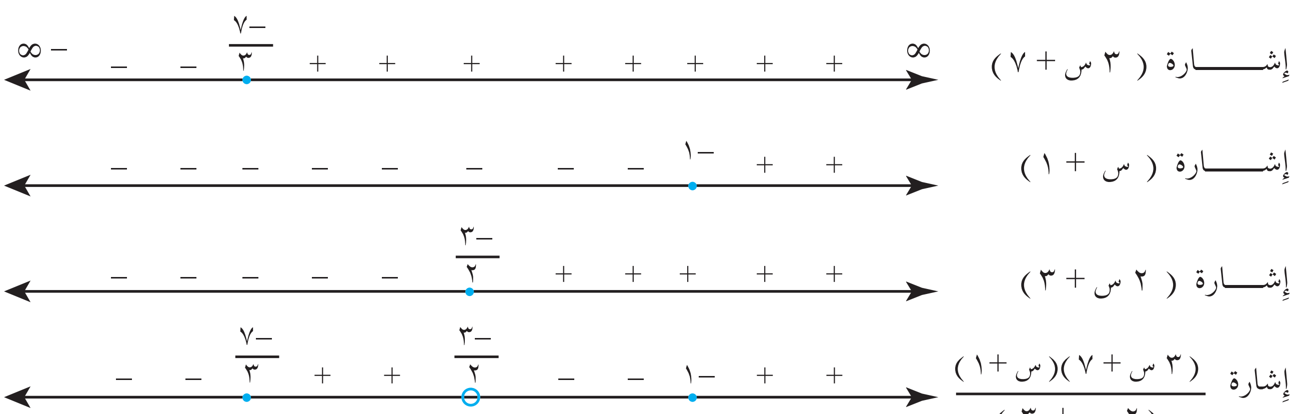
$$\Leftarrow \frac{- ٣ س^٢ - ١٠ س - ٧}{٢ س + ٣} \leq ٠$$

$$\Leftarrow \frac{- (٣ س^٢ + ١٠ س + ٧)}{٢ س + ٣} \leq ٠$$

$$\Leftarrow \frac{٣ س^٢ + ١٠ س + ٧}{٢ س + ٣} \geq ٠$$

$$\Leftarrow \frac{(٣ س + ٧) (س + ١)}{٢ س + ٣} \geq ٠$$

اصفار المقدار : $س_١ = -\frac{٣}{٢}$ أو $س_٢ = -\frac{٧}{٣}$ أو $س_٣ = -١$.



شكل (٦ - ١٤)

من الشكل نجد أن : $\frac{[illegible]}{٢ س + ٣} \le ٠$ يتحقق في الفترتين] − ∞ ، [illegible] ٣ [

أو] $- \frac{٣}{٢}$ ، − ١ [.

∴ مجموعة الحل للمتراجحة المعطاه =] − ∞ ، $- \frac{٧}{٣}$ [∪] $- \frac{٣}{٢}$ ، − ١ [

لحل المتراجحات الكسرية التي تحوي في كل من بسطها ومقامها حدودية نتبع ما يلي :

١ − نحولها إلى متراجحة صفرية ، ثم نجمع الطرف الأيمن في كسر واحد .

٢ − نوجد أصفار البسط والمقام ونحددها على خط الإعداد .

٣ − نحدد إشارة كل عامل قبل وبعد جذره (صفره) على خط الإعداد .

٤ − نوجد إشارة حاصل ضرب عوامل البسط وإشارة حاصل ضرب عوامل المقام .

٥ − نوجد ناتج قسمة إشارة البسط على إشارة المقام .

٦ − نحدد الفترات التي تكون فيها الإشارة محققة للمتراجحة المعطاة فتكون هي مجموعة الحل للمتراجحة المعطاة .

مثال (٦ − ٢٣) حل المتراجحة : $\frac{٣ س^{٢} - ٣ س}{س + ١} \le ٢ س - ٢$.

الحل

$\frac{٣ س^{٢} - ٣ س}{س + ١} \le ٢ س - ٢$

$\Leftarrow \frac{٣ س^{٢} - ٣ س}{س + ١} - ٢ س + ٢ \le ٠ \Leftarrow \frac{٣ س^{٢} - ٣ س + (س + ١)(-٢ س + ٢)}{س + ١} \le ٠$

$\Leftarrow \frac{٣ س^{٢} - ٣ س - ٢ س^{٢} - ٢ س + ٢ س + ٢}{س + ١} \le ٠ \Leftarrow \frac{س^{٢} - ٣ س + ٢}{س + ١} \le ٠ \Leftarrow \frac{(س - ١)(س - ٢)}{(س + ١)} \le ٠$

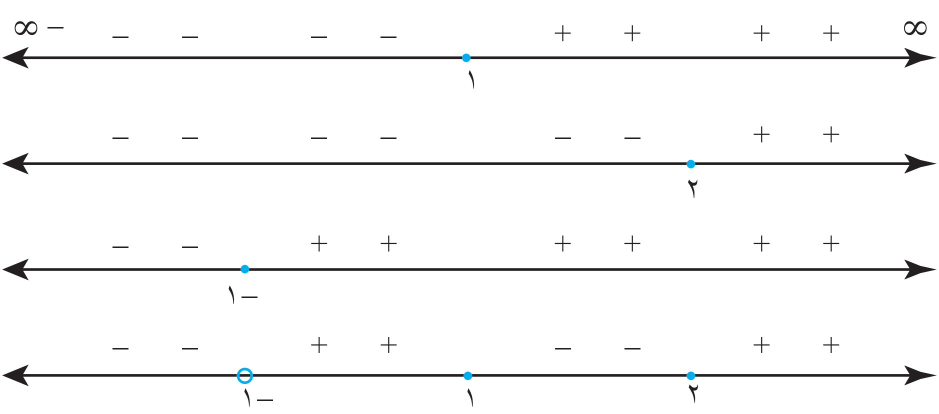
أصفار البسط : س = ١ أو س = ٢ . أصفار المقام : س = − ١ .

إشارة (س − ١)

إشارة (س − ٢)

إشارة (س + ١)

إشارة $\frac{(س - ١)(س - ٢)}{(س + ١)}$



شكل (٦ − ١٥)

من الشكل نجد أن : $\frac{\quad}{(\text{س} + ١)}$ ≥ ٠ يتحقق في]−١ ، ١[أو]٢ ، ∞[.

∴ مجموعة حل المتراجحة المعطاه =]−١ ، ١[∪]٢ ، ∞[.

تمارين ومسائل (٦ : ٦)

* أوجد مجموعة الحل لكل من المتراجحات التالية :

١) (س − ٣)(س + ٥) > ٠ .

٢) ٣ س٢ − ٧ س − ٦ ≤ ٠ .

٣) ٥ س − ٣ > $\frac{\text{−٢ س}}{\text{س − ٢}}$.

٤) $\frac{١}{\text{س − ٢}}$ ≤ $\frac{٣}{\text{٣ − س}}$.

٥) س٢ − س − ٢٠ ≥ ٠ .

٦) $\frac{١}{\text{س}}$ ≥ س + ١ .

٧) ٢ س٢ + ٣ س + ٥ < ٠ .

٨) ٣ س٢ − ٤ س − ٥ ≥ ٠ .

٩) −٤ س٢ + ٤ س + ٣ < ٠ .

١٠) س٢ + س − ٦ ≤ ٠ .

١١ − ٣ س٢ − ٥ س − ٢ > ٠ .

١٢) س٢ + ١ > ٠ .

١٣ − −٣ س٢ + ١٠ س − ٧ ≥ ٠ .

١٤) ٢ س٢ − ٣ س < ٠ .

٦ : ٧ القيمة المطلقة

من الأعداد ما هو سالباً ومنها ما هو موجباً ، ففي الكميات المتجهة مثل القوة والسرعة والأزاحة قد تستعمل الأعداد الموجبة أو الأعداد السالبة ، ولكننا عندما نتعامل مع الكميات غير المتجهة مثل الزمن والمسافة والمساحة والكتلة ، فإننا نستعمل الأعداد الموجبة دائماً ، والقيمة المطلقة تستعمل للدلالة على الكميات غير المتجهة أو لإيجاد موجب الكميات المتجهة .

تعريف (٦ : ٣)

القيمة المطلقة لعدد حقيقي س يرمز لها بالرمز | س | وهي عدد حقيقي يساوى س إذا كانت س غير سالبة ويساوى − س إذا كانت س سالبة .

$$|\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & \text{حيث} \quad \text{س} \geq 0 \\ -\text{س} & \text{حيث} \quad \text{س} < 0 \end{cases}$$

إذا $|\text{س}|$ = بعد س عن الصفر .

١) $|\text{س}| \geq 0$ ، $\forall$ س $\in$ ح

٢) $|\text{س}| = |-\text{س}|$ ، $\forall$ س $\in$ ح

فمثلاً : $\left|3\frac{1}{4}\right| = 3\frac{1}{4}$ ، $\left|-3\frac{1}{4}\right| = 3\frac{1}{4}$ ،

$|-4{,}1| = 4{,}1$ ، $|-4{,}1| = 4{,}1$ ، $|0| = 0$

إعادة تعريف القيمة المطلقة :

نفرض أن لدينا المقدار $|\text{س} - 9|$ ، عندما نريد أن نتعامل مع هذا المقدار يجب أن نعيد تعريفه وفقاً لتعريف القيمة المطلقة ، فالمقدار (س − ٩) أما أن يكون سالباً واما أن يكون موجباً ، واما أن يكون صفراً .

عندما (س − ٩) تكون موجباً يكون $|\text{س} - 9| = \text{س} - 9$ ،

عندما (س − ٩) تكون سالباً يكون $|\text{س} - 9| = -(\text{س} - 9) = 9 - \text{س}$.

وعندما (س − ٩) يكون صفراً يكون $|\text{س} - 9| = 0$

أي أن :

$$|\text{س} - 9| = \begin{cases} \text{س} - 9 & \text{عندما} \quad (\text{س} - 9) > 0 \\ 0 & \text{عندما} \quad (\text{س} - 9) = 0 \\ 9 - \text{س} & \text{عند} \quad (\text{س} - 9) < 0 \end{cases}$$

ويمكن تقديم التعريف بصورة اخرى :

$$|\text{س} - 9| = \begin{cases} \text{س} - 9 & \text{عند} \quad \text{س} > 9 \\ 0 & \text{عند} \quad \text{س} = 9 \\ 9 - \text{س} & \text{عند} \quad \text{س} < 9 \end{cases}$$

واضح اننا أعدنا تعريف $|\text{س} - 9|$ حول النقطة س = ٩ ونسمي س = ٩ صفر المقياس أو جذر المقياس وهو ما يجعل قيمة ما بداخل المقياس = ٠ .

ونلاحظ أيضاً أن :

مثال (٦ − ٢٤) اعد تعريف المقدار : $|\text{س}^2 + 3\text{س} - 10|$.

الحـــل

$|س^{٢} + ٣س - ١٠| = |(س + ٥)(س - ٢)|$. أي أن للقيمة المطلقة صفران « جذران » هما :

$س_{١} = -٥$ أو $س_{٢} = ٢$

نعيد تعريف المقدار حول الجذرين :

$$|(س + ٥)(س - ٢)| = \begin{cases} س^{٢} + ٣س - ١٠ & \text{عند } س > ٢ \\ -س^{٢} - ٣س + ١٠ & \text{عند } -٥ < س < ٢ \\ س^{٢} + ٣س - ١٠ & \text{عند } س < -٥ \end{cases}$$

لإعادة تعريف القيمة المطلقة يجب أولاً أن نحدد اصفار القيمة المطلقة ، ثم نعيد تعريف القيمة المطلقة (فقط) حول أصفارها (جذورها) .

مثال (٦ − ٢٥) أعد تعريف المقدار : $٢س - |س^{٢} - س - ٦|$.

الحـــل

المقدار $= ٢س - |(س - ٣)(س + ٢)|$. للقيمة المطلقة صفران هما : $س_{١} = -٢$ أو $س_{٢} = ٣$.

وعندما نعيد تعريف المقدار فإننا نعيد تعريف القيمة المطلقة (فقط) حول صفريها ضمن هذا المقدار ، فنحصل على :

$$٢س - |(س - ٣)(س + ٢)| = \begin{cases} ٢س - (س^{٢} - س - ٦) & \text{عند } س \geq ٣ \\ ٢س + (س^{٢} - س - ٦) & \text{عند } -٢ < س < ٣ \\ ٢س - (س^{٢} - س - ٦) & \text{عند } س \leq -٢ \end{cases}$$

خواص القيمة المطلقة :

إذا كانت أ $\in$ ح$^{+}$ فإن :

١ − $\sqrt{س^{٢}} = |س|$ ، $\sqrt{(س \pm أ)^{٢}} = |س \pm أ|$ ، $(|س|)^{٢} = س^{٢}$.

٢ − $|س| = أ \Leftrightarrow$ أما $س = أ$ أو $س = -أ$.

٣ − $|س| \leq أ \Leftrightarrow -أ \leq س \leq أ$.

$|س| < أ \Leftrightarrow -أ < س < أ$.

٤ − $|س| \geq أ \Leftrightarrow$ أما $س \geq أ$ أو $س \leq -أ$.

$|س| > أ \Leftrightarrow$ أما $س > أ$ أو $س < -أ$.

٥ − $\left|\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right| = \frac{|\text{ص}|}{|\text{س}|}$ ، $|\text{س} \bullet \text{ص}| = |\text{س}| \bullet |\text{ص}|$.

٦ − $|\text{س} + \text{ص}| \leq |\text{س}| + |\text{ص}|$ ، $|\text{س} - \text{ص}| \geq |\text{س}| - |\text{ص}|$.

ويظهر التباين عندما تكون س وَ ص من إشارتين مختلفتين .

المتراجحات المزدوجة :

نسمي المتراجحات من الشكل أ < س < ب متراجحات مزدوجة ، إذ أنها مكونة من متراجحتين فرديتين، وكما نلاحظ أن المتراجحة أ < س < ب تفرض ترتيباً على المجموعة { أ ، س ، ب } حيث أ ، ب ∈ ح وَ س متغير واقع بين أ ، ب .

حل المتراجحات المزدوجة :

لحل المتراجحات المزدوجة نطبق على المتراجحة المعطاة التحويلات المكافئة بنفس الأسلوب الذي نطبقها به على المتراجحات الفردية ؛ فتكون مجموعة حل المتراجحة المزدوجة مساوية لتقاطع مجموعتي الحل للمتراجحتين الفرديتين المكونة لها .

فمثلاً : $|\text{س} - \text{أ}| < \text{ب}$ ⟺ −ب < س − أ < ب [−ب اصغر من (س − أ) أصغر من ب].

⟸ أ − ب < س < أ + ب

⟸ مجموعة الحل =] أ − ب ، أ + ب [.

آخر خطوات الحل يكون فيها المتغير محصور بين عددين ثابتين .

مثال (٦ − ٢٦) حل المتراجحتان :

أ) $|\text{س}| \leq$ ٥

ب) $|$٢س − ٦$| \leq$ ١ .

الحـــل

أ) $|\text{س}| \leq$ ٥ ⟺ −٥ ≤ س ≤ ٥

∴ مجموعة الحل = [−٥ ، ٥] .

$\Leftarrow \quad ٥ \le ٢\text{س} \le ٧$

$\Leftarrow \quad \frac{٥}{٢} \le \text{س} \le \frac{٧}{٢}$.

$\therefore$ مجموعة الحل $= [\frac{٥}{٢} ، \frac{٧}{٢}]$.

مثال (٦ – ٢٧) حل المتراجحة : $|\text{س} - ٣| > ٤$.

الحل

$|\text{س} - ٣| > ٤ \Leftarrow \text{س} - ٣ > ٤$ أو $\text{س} - ٣ < -٤$

$\Leftarrow \text{س} > ٧$ أو $\text{س} < -١$

$\Leftarrow$ مجموعة الحل $=]-\infty ، -١[\cup]٧ ، \infty[$.

مثال (٦ – ٢٨) حل المتراجحة : $|\text{س}^٢ - \text{س} - ١| \le ١$.

الحل

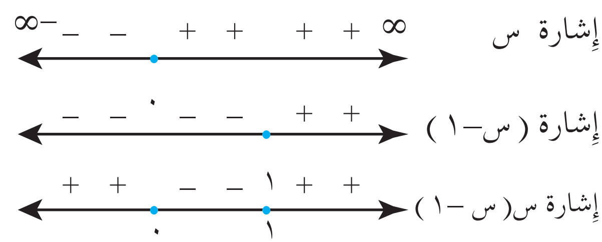
$|\text{س}^٢ - \text{س} - ١| \le ١ \iff -١ \le \text{س}^٢ - \text{س} - ١ \le ١$

$-١ \le \text{س}^٢ - \text{س} - ١ \le ١ \iff ٠ \le \text{س}^٢ - \text{س} \le ٢$

$\Leftarrow ٠ \le \text{س}^٢ - \text{س}$

$\Leftarrow ٠ \le \text{س}(\text{س} - ١)$

جذرا المقدار $\text{س} = ٠$ أو $\text{س} = ١$



$\Leftarrow$ مجموعة الحل $=]-\infty ، ٠] \cup [١ ، \infty[\quad (١)$.

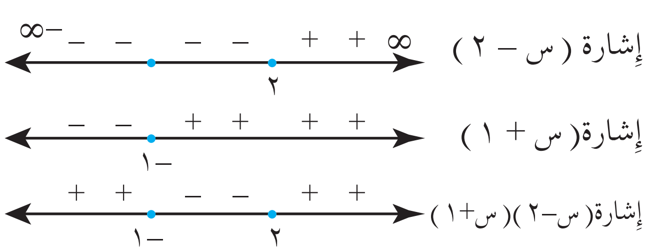
وَ

$\text{س}^٢ - \text{س} \le ٢$

$\Leftarrow \text{س}^٢ - \text{س} - ٢ \le ٠$

$\Leftarrow (\text{س} - ٢)(\text{س} + ١) \le ٠$

أصفار المقدار : $\text{س} = -١$ أو $\text{س} = ٢$



$\Leftarrow$ مجموعة الحل $= [-١ ، ٢] \quad (٢)$

شكل (٦ – ١٦)

من (١) ، (٢) نجد أن :

مجموعة حل المتراجحة : $|\text{س}^٢ - \text{س} - ١| \le ٠ = (\,]-\infty ، ٠] \cup [١ ، \infty[\,) \cap [-١ ، ٢]$.

$= [-١ ، ٠] \cup [١ ، ٢]$

أوجد مجموعة الحل للمتراجحة : ٢ > ٣ س − ٧ > ٨

الحـــل نفصل المتراجحة المزدوجة إِلى متراجحتين غير مزدوجتين

٢ > ٣س − ٧
٩ > ٣س
٣ > س
مجموعة الحل =] ٣ ، ∞ [

أو

٣س − ٧ > ٨
٣س > ١٥
س > ٥
مجموعة الحل =] − ∞ ، ٥ [.

∴ مجموعة حل المتراجحة هي :] − ∞ ، ٥ [∩] ٣ ، ∞ [=] ٣ ، ٥ [.

مثال (٦ − ٣٠) أوجد مجموعة الحل للمتراجحة : ٢ ≥ | ٢ س − ٣ | ≥ ٨ .

الحـــل

٢ ≥ | ٢ س − ٣ | ≥ ٨

إِما ٢ ≥ ٢ س − ٣ ≥ ٨
⇐ ٥ ≥ ٢ س ≥ ١١
⇐ $\frac{٥}{٢}$ ≥ س ≥ $\frac{١١}{٢}$
⇐ مجموعة الحل = [$\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{١١}{٢}$] (١)

أو ٢ ≥ ٣ − ٢ س ≥ ٨
⇐ −١ ≥ −٢ س ≥ ٥
⇐ $\frac{١}{٢}$ ≤ س ≤ $\frac{-٥}{٢}$.
⇐ مجموعة الحل = [$\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$] (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

مجموعة حل المتراجحة هي : [$\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{١١}{٢}$] ∪ [$\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$] .

عند فصل المتراجحة المزدوجة إِلى متراجحتين غير مزدوجتين تكون مجموعة حل المتراجحة المزدوجة هي تقاطع مجموعتي حل المتراجحتين الفرديتين .

ولنأخذ المثال السابق : ٢ ≥ | ٢ س − ٣ | ≥ ٨

⇐ ٢ > | ٢ س − ٣ |

⇐ ٢ ≥ ٢ س − ٣
⇐ ٥ ≥ ٢ س
⇐ $\frac{٥}{٢}$ ≥ س
مجموعة الحل = [$\frac{٥}{٢}$ ، ∞ [(١)

أو

٢ س − ٣ ≥ −٢
⇐ ٢ س ≥ ١
⇐ س ≥ $\frac{١}{٢}$
مجموعة الحل =] − ∞ ، $\frac{١}{٢}$] (٢)

من (١)،(٢) نجد أن مجموعة حل المتراجحة =] − ∞ ، $\frac{١}{٢}$] ∪ [$\frac{٥}{٢}$ ، ∞ [(٣)

وَ | ٢ س − ٣ | ≥ ٨
⇐ −٨ ≥ ٢ س − ٣ ≥ ٨
⇐ −٥ ≥ ٢ س ≥ ١١
⇐ $\frac{-٥}{٢}$ ≥ س ≥ $\frac{١١}{٢}$.
مجموعة الحل للمتراجحة =
[$\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{١١}{٢}$] (٤)

من (٣)،(٤) نجد أن : ٢ ≥ | ٢ س − ٣ | ≥ ٨ = ( ] − ∞ ، $\frac{١}{٢}$] ∪ [$\frac{-٥}{٢}$ ، ∞ [ ) ∩ [− $\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{١١}{٢}$]

[١] أعد تعريف كل من المقادير التالية: ا) $|س - ٢|$. ب) $|س^{٢} - ٣س - ١٠|$.

جـ) $٢س - |س - ٥|$. د) $\left|س - \frac{١}{٢}\right|$. هـ) $|٢س - ٧|$.

[٢] أوجد مجموعة الحل لكل من المتراجحات التالية:

ا) $\left|\frac{٣س}{٢} - ٥\right| \geq ١٢$. ب) $\left|\frac{٣س}{٢} - ٥\right| \leq ١٢$.

جـ) $|س - ٣| \leq ٤$. د) $|س^{٢} - س - ٣| \leq ٣$.

هـ) $س^{٢} - |س| \geq ١٢$. و) $|س - ١| + |س| \geq ٣٢$.

[٣] لتكن $س \in [-١ ، ٢]$ أثبت أن:

ا) $١ \leq ٢س + ٣ \leq ٧$. ب) $\frac{٣}{٤} \leq \frac{٣}{س + ٢} \leq ٣$.

[٤] إذا كانت $ص = \frac{٣}{س + ٢}$ ، $٠ < س < ٤$ ، وكانت $ا < ص < ب$. أوجد قيمة كل من ا ، ب

٦ : ٨ حل نظام متراجحات الدرجة الأولى في متغير واحد

مثال (٦ − ٣١) أوجد مجموعة حل جملة المتراجحتين التاليتين:

$٥س + ٧ \geq ٠$ ، $\frac{٣ - س}{٥} > ٢س$.

الحل

$٥س + ٧ \geq ٠$

$\Leftarrow ٥س \geq -٧$

$\Leftarrow س \geq -\frac{٧}{٥}$

∴ مجموعة الحل $= [-\frac{٧}{٥} ، \infty[$ (١)

$\frac{٣ - س}{٥} > ٢س$.

$\Leftarrow ٣ - س - ١٠س > ٠$.

$\Leftarrow -١١س > -٣$.

$\Leftarrow س < \frac{٣}{١١}$.

∴ مجموعة الحل $=]-\infty ، \frac{٣}{١١}[$ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن مجموعة حل جملة المتراجحتين $= [-\frac{٧}{٥} ، \infty[\cap]-\infty ، \frac{٣}{١١}[$

$= [-\frac{٧}{٥} ، \frac{٣}{١١}[$.

مجموعة حل النظام (جملة المتراجحات) يساوى تقاطع مجموعات حل المتراجحات المكونة للنظام.

مثال (٦ – ٣٢) أوجد مجموعة حل جملة المتراجحتين التاليتين جبريا ، ومثل ذلك بيانيا :

٢ س – ٥ ≥ ٠ ، ٣ س – ١١ < ٠ .

الحـــل

٢ س – ٥ ≥ ٠

⇐ ٢ س ≥ ٥

⇐ س ≥ $\frac{٥}{٢}$

∴ مجموعة الحل = $\left[\frac{٥}{٢} ، \infty\right[$ (١)

٣ س – ١١ < ٠ .

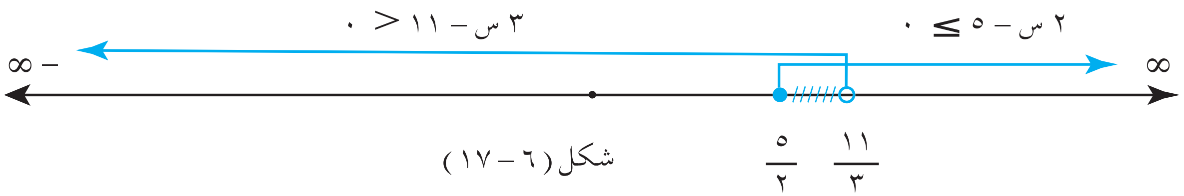
٣ س < ١١ .

س < $\frac{١١}{٣}$.

∴ مجموعة الحل = $\left]-\infty ، \frac{١١}{٣}\right[$ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن مجموعة حل جملة المتراجحتين هي :

$\left[\frac{٥}{٢} ، \infty\right[\cap \left]-\infty ، \frac{١١}{٣}\right[= \left[\frac{٥}{٢} ، \frac{١١}{٣}\right[$.



شكل (٦ – ١٧)

تمارين ومسائل (٦ : ٨)

أوجد مجموعة الحل لكل من جمل المتراجحات التالية :

أ) ٦ س + ١ > ٥ س ، ٩ س – ٣ > ٧ س + ١ .

ب) س + ٣ > ٤ ، س – ٢ ≤ ٢ س + ٢ .

جـ) ٢ س + ٣ < س + ٤ ، س – ١٢ ≤ ٢ س .

ء) $\frac{\text{س} - ٢}{٣}$ + س ≤ ٠ ، س + ٧ > ٠ .

تعرفت في الصف التاسع الأساسي على المعادلة الخطية : ا س + ب ص + جـ = ٠ حيث ا ، ب ، جـ ∈ ح ، ا ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ . وتعلمت كيف تمثل هذه المعادلة بخط مستقيم في مستوى الإحداثيات ، وقد رمز للمستقيم بالرمز ل .

المستقيم ل : ا س + ب ص + جـ = ٠ يقسم المستوى الإحداثي إلى نصفي مستوى مفتوحين يكون على إحدهما ا س + ب ص + جـ > ٠ ، ويكون على الآخر ا س + ب ص + جـ < ٠ .

تعريف (٦ : ٤)

متراجحة الدرجة الأولى في متغيرين يمكن كتابتها بإحدى الصور التالية :

ا س + ب ص + جـ ≥ ٠ أو ا س + ب ص + جـ > ٠

أو ا س + ب ص + جـ ≤ ٠ أو ا س + ب ص + جـ < ٠ .

حيث ا ، ب ، جـ ∈ ح ، ا ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ .

ونسمي هذه الصور بالصور القياسية لمتراجحة الدرجة الأولى في متغيرين « طرفها الأيسر صفراً » .

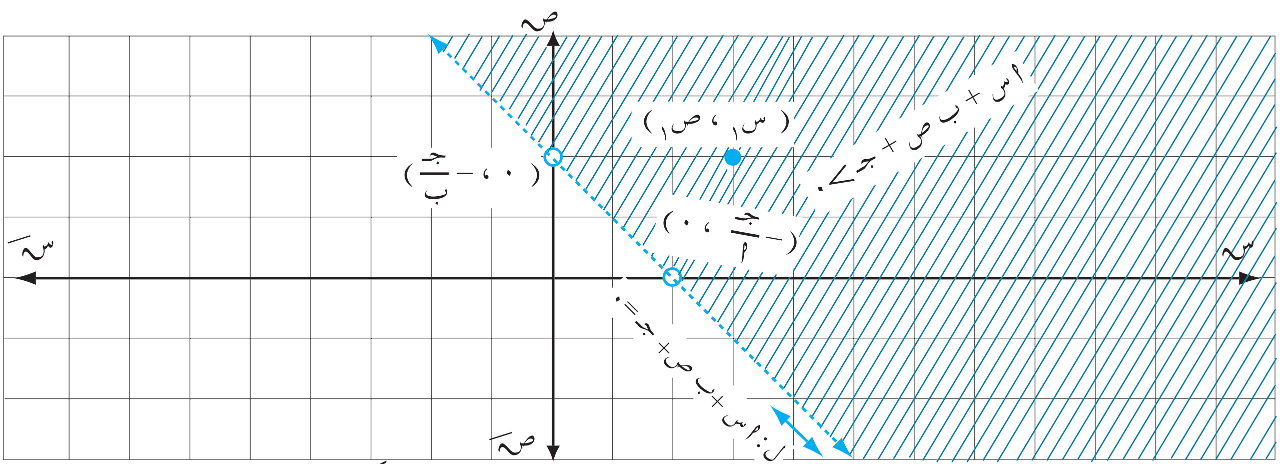
خطوات حل متراجحة الدرجة الأولى في متغيرين :

لحل المتراجحة : ا س + ب ص + جـ > ٠ نتبع الخطوات التالية :

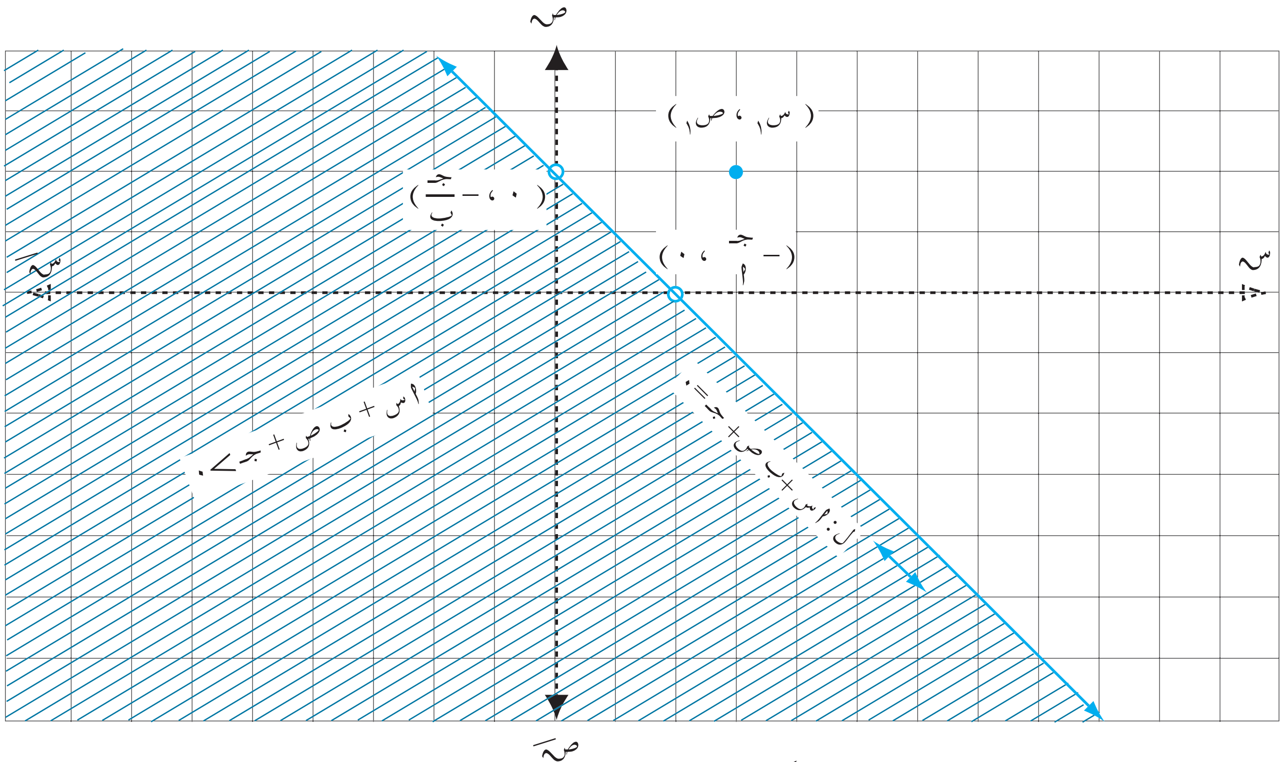
١ – نرسم المستقيم : ا س + ب ص + جـ = ٠ بخط متقطع .

٢ – نختار نقطة (س$_1$ ، ص$_1$) من أحد نصفي المستويين الواقعين على جهتي المستقيم ل ونعوض بها في المتراجحة المعطاة ؛ فإذا كانت ا س$_1$ + ب ص$_1$ + جـ > ٠ تكون النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) واقعة في نصف المستوى الذي يمثل مجموعة حل المتراجحة : ا س + ب ص + جـ > ٠ ، ويسمى نصف مستوى مفتوحاً [لأن نقاط المستقيم ل لاتنتمي إليه] .

٣ – نظلل نصف المستوى المفتوح الذي يمثل مجموعة حل المتراجحة ا س + ب ص + جـ > ٠ .



$ا$ س + ب ص + جـ > ٠ فهذا يعني أن النقطة (س$_١$ ، ص$_١$) واقعة في نصف المستوى الذي لايمثل مجموعة الحل للمتراجحة : $ا$ س + ب ص + جـ < ٠ ، ويكون نصف المستوى الآخر هو الممثل لمجموعة حل المتراجحة : $ا$ س + ب ص + جـ < ٠ فنقوم بتظليله .



شكل (٦ – ١٩)

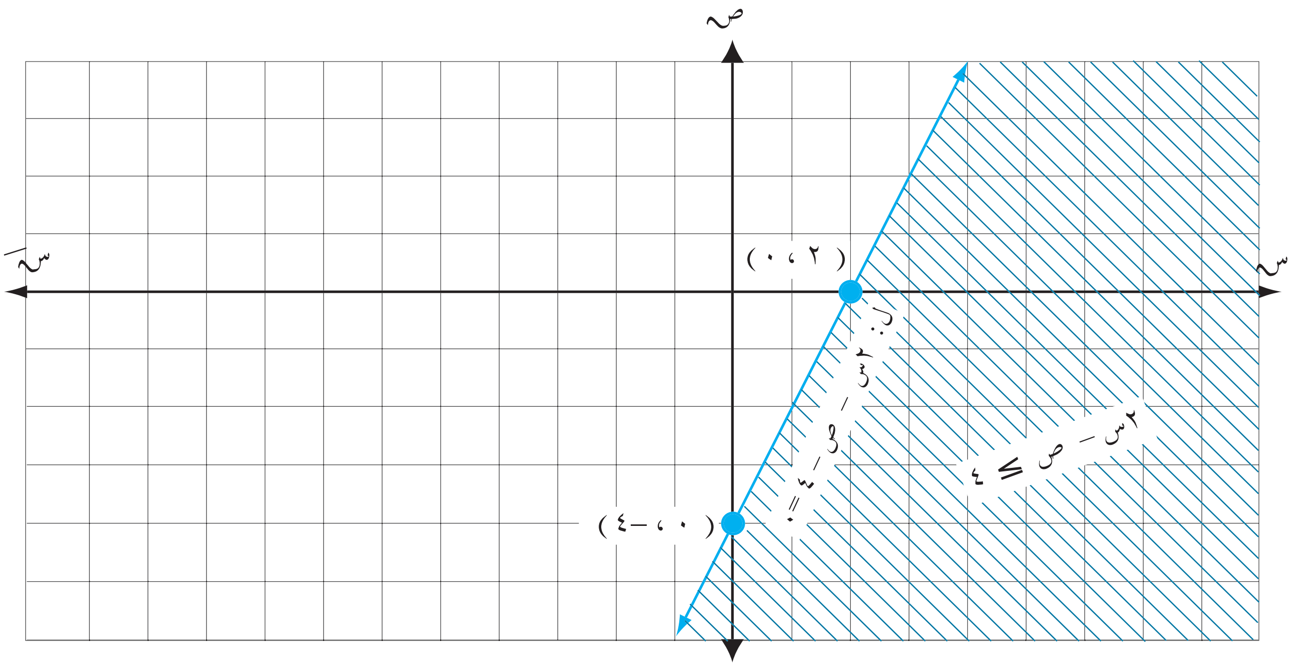
عندما يكون المطلوب إيجاد مجموعة الحل لمتراجحة من الشكل : $ا$ س + ب ص + جـ ≤ ٠ أو $ا$ س + ب ص + جـ ≥ ٠ فاننا نرسم المستقيم : $ا$ س + ب ص + جـ = ٠ بخط متواصل وليس متقطع لأن المستقيم يعتبر جزء من مجموعة الحل ويكون نصف المستوى المغلق هو مجموعة الحل .

مثال (٦ – ٣٣) حل المتراجحة : ٢ س – ص ≤ ٤ .

الحل

٢ س – ص ≤ ٤ ⟺ ٢ س – ص – ٤ ≤ ٠ ، $\overleftrightarrow{ل}$: ٢ س – ص – ٤ = ٠ ولرسم المستقيم نوجد نقطتي تقاطعه مع كل من المحور السيني والمحور الصادي . نضع س = ٠ فنجد أن ص = –٤ ⟸ نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{ل}$ مع المحور الصادات هي (٠ ، –٤) . نضع ص = ٠ فنجد أن س = ٢ ⟸ نقطة تقاطع ل مع محور السينات هي (٢ ، ٠)

المطلوب . $\overleftrightarrow{ل}$: ٢ س – ص – ٤ = ٠ .



شكل (٦ – ٢٠)

نختار النقطة (٠ ، ٠) فنجد أن : ٢ (٠) – (٠) ≥ ٤ ⇐ ٠ ≥ ٤ وهذا غير ممكن

⇐ (٠ ، ٠) لا تحقق المتراجحة : ٢ س – ص ≥ ٤

⇐ (٠ ، ٠) $\not\in$ لمجموعة حل المتراجحة : ٢ س – ص ≥ ٤

نظلل نصف المستوى المغلق الذي لايحتوي على النقطة (٠ ، ٠) .

الذي يمثل مجموعة حل المتراجحة ٢ س – ص ≥ ٤ .

> **يفضل إختيار النقطة (٠ ، ٠) كنقطة اختيار للتحقق من نصف مستوى مجموعة الحل ، بشرط ألاَّ تقع على $\overleftrightarrow{ل}$.**

مثال (٦ – ٣٤) حل المتراجحة : ٢ س + ٥ ص > ٥ .

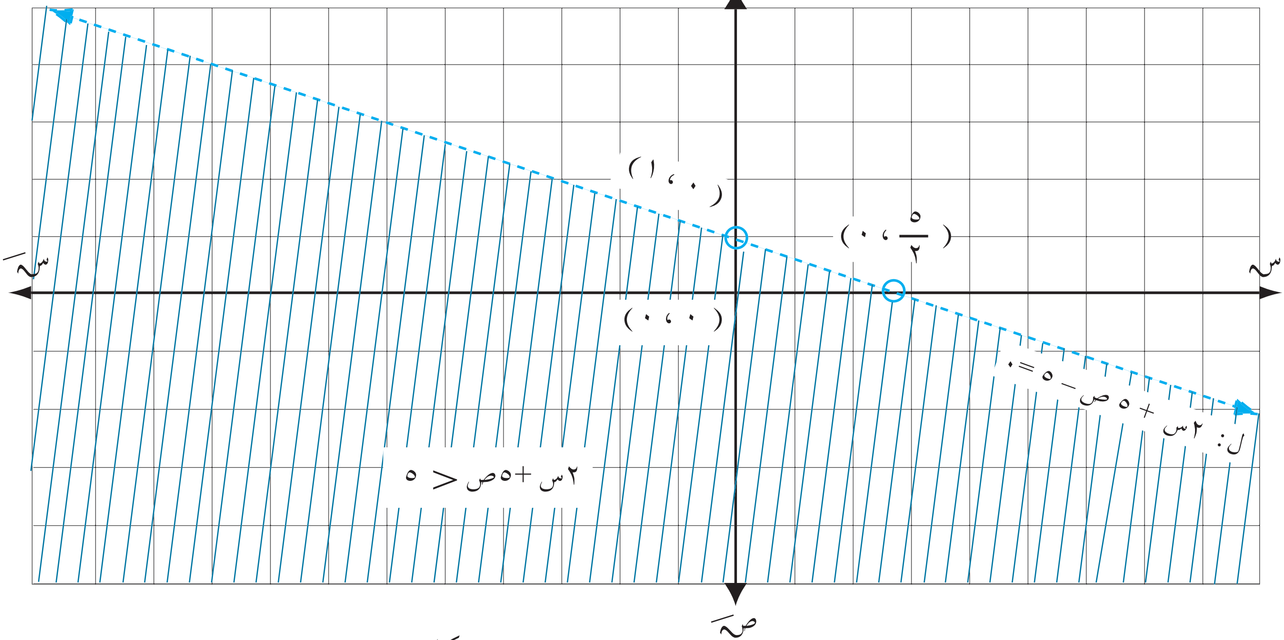
الحــل

٢ س + ٥ ص > ٥ ⇔ ٢ س + ٥ ص – ٥ > ٠

$\overleftrightarrow{ل}$: ٢ س + ٥ ص – ٥ = ٠ .

نرسم المستقيم ل بإيجاد نقاط تقاطعه مع المحورين كما في الجدول :

س	٠	$\frac{٥}{٢}$
ص	١	٠
(س،ص)	(٠ ، ١)	($\frac{٥}{٢}$ ، ٠)



شكل (٦ – ٢١)

نختار النقطة (٠ ، ٠)

فنجد أن ٢ (٠) + ٥ (٠) < ٥ ⇐ (٠ ، ٠) ∋ نصف المستوى المفتوح (المظلل) .

∴ مجموعة الحل هي المنطقة المظللة .

تمارين ومسائل (٦ : ٩)

حل المتراجحات التالية :

١) س – ص > ٠ .

٢) ص > – $\frac{س}{٢}$.

٣) س + ص ≤ ٦ .

٤) ص ≥ ٢ .

٥) س < ١ .

٦) ٢ س + ٥ ص < –٥ .

٧) ص – ٢ س > –٣ .

٨) ص ≤ ٠ .

٩) $\frac{٣}{٢}$ س – $\frac{١١}{٥}$ ص > ١ .

١٠) س ≥ ٠ .

٦ : ١٠ حل نظام متراجحات الدرجة الأولى في متغيرين

قد يكون نظام متراجحات الدرجة الأولى في متغيرين يتكون من أكثر من متراجحتين ، ولكننا سنكتفي بنظام المتراجحتين من الدرجة الأولى في متغيرين فقط .

لحل نظام متراجحتين من الدرجة الأولى في متغيرين نقوم بحل كل متراجحة على حده في نظام إحداثي واحد، وتكون منطقة تقاطع مجموعتي حل المتراجحتين هي مجموعة حل نظام المتراجحتين المعطاة.

مثال (٦ -٣٥) حل نظام المتراجحتين: ٢ س - ٢ ص + ٤ > ٠ ، ٢ ص + س - ٤ ≤ ٠ .

الحل

أولاً : نحل المتراجحة ٢ س - ٢ ص + ٤ > ٠

⇐ $ل_١$: ٢ س - ٢ ص + ٤ = ٠

⇐ س - ص + ٢ = ٠

نضع س = ٠ ⇐ ص = ٢ ،

نضع ص = ٠ ⇐ س = -٢ .

نحدد النقطتين (٠ ، ٢)، (-٢ ، ٠) ونصل بينهما بخط متقطع يمثل $\overleftrightarrow{ل_١}$: فنختار النقطة (٠ ، ٠) فنجد انها تحقق المتراجحة ، وتقع على نصف المستوى المفتوح (مجموعة حل المتراجحة) فنظلله ،

ثانياً : نحل المتراجحة ٢ ص + س - ٤ ≤ ٠ .

⇐ $\overleftrightarrow{ل_٢}$: ٢ ص + س - ٤ = ٠

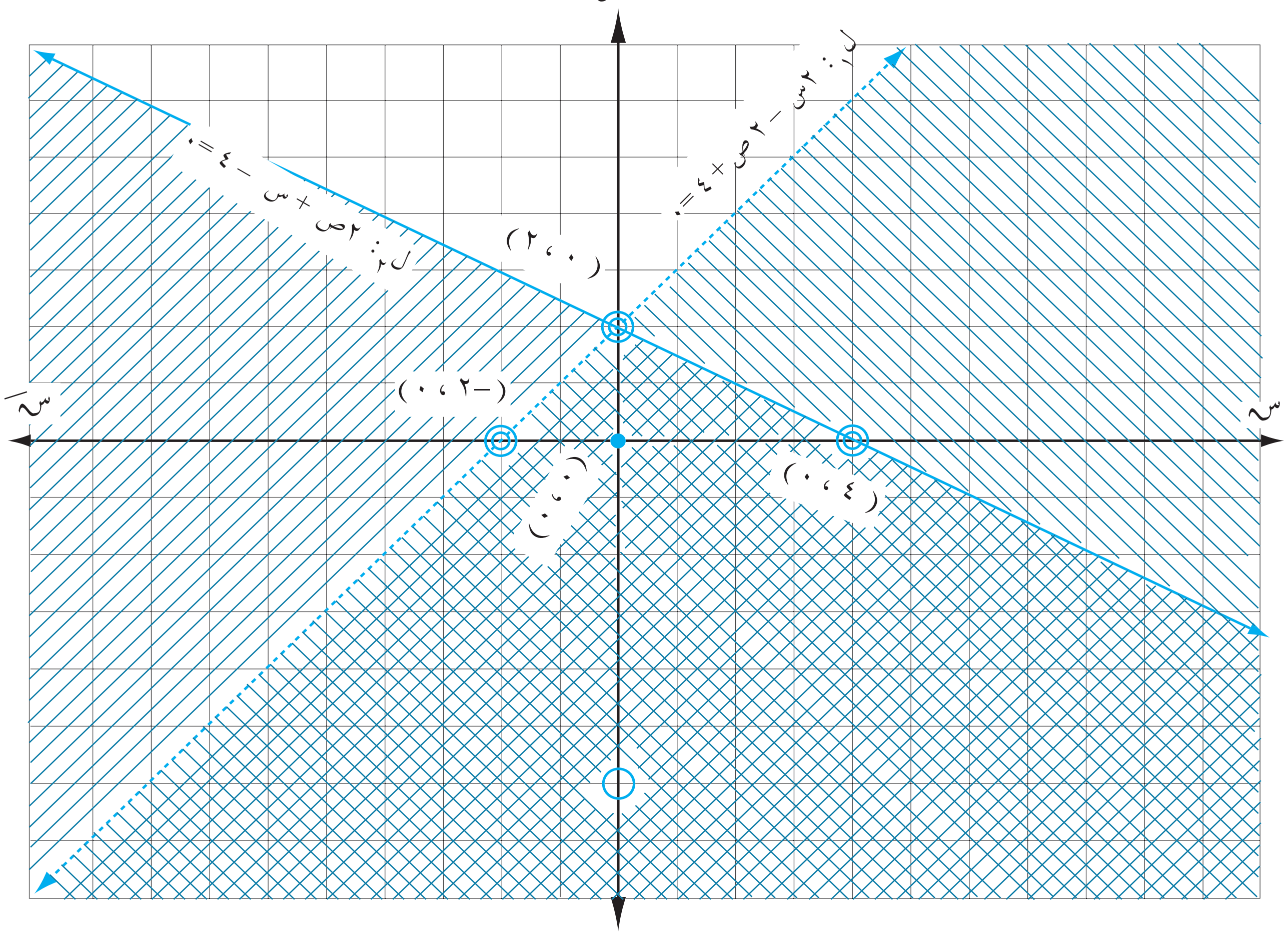
عندما س = ٠ ⇐ ص = ٢

⇐ النقطة الأولى = (٠ ، ٢) ،

عندما ص = ٠ ⇐ س = ٤

⇐ النقطة الثانية = (٤ ، ٠) .

بعد رسم $\overleftrightarrow{ل_٢}$ نختار النقطة (٠ ، ٠) فنجد انها تحقق المتراجحة وتقع على نصف المستوى المغلق الذي يمثل مجموعة حل المتراجحة ٢ ص + س - ٤ ≤ ٠ ، فنظلله .



شكل (٦ – ٢٣)

فتكون المنطقة المشتركة في التظليل هي مجموعة حل جملة المتراجحتين .

نلاحظ أن الأجزاء المحيطة بمنطقة الحل من كل من $\overleftrightarrow{ل_1}$ ، $\overleftrightarrow{ل_2}$ فنجد أن :

$\overleftrightarrow{ل_1}$ $\not\subset$ لمجموعة حل جملة المتراجحتين .

$\overleftrightarrow{ل_2}$ $\subset$ لمجموعة حل جملة المتراجحتين .

تمارين ومسائل (٦ : ١٠)

حل جمل المتراجحات التالية :

١) س + ٣ > ص ، ٢ س – ص < ٥ .

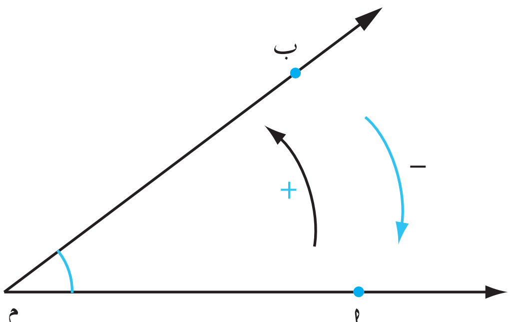
٢) ٥ س – ص + ٣ ≤ ٠ ، س + ٣ ص > ١ .

٣) س – ص > –٢ ، س ≥ ٠ .

الوحدة السابعة

حساب المثلثات

٧ : ١ الزاوية الموجَّهة



شكل (٧ – ١)

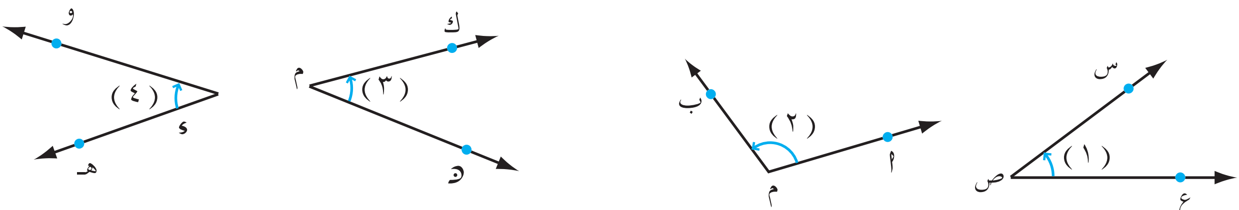
تذكر أن الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نقطة بدء مشتركة تسمى رأس الزاوية .

لاحظ الشكل (٧ – ١) تجد الشعاعين م أ ، م ب متقاطعين في مبدئهما المشترك (م) . والزاوية أ م ب المحددة بضلعها الابتدائي م أ وضلعها النهائي م ب ورأسها نقطة م . تسمى مثل هذه الزاوية زاوية موجَّهة ، ونكتب الزاوية الموجّهة بإحدى الطريقتين : (م أ ، م ب) أو ∢ أ م ب .

والسهم في [الشكل (٧ – ١)] يشير إلى اتجاه الدوران سواء أكان مع حركة عقارب الساعة أم عكسها .

يكون قياس الزاوية الموجّهة موجباً إذا كان اتجاه الدوران للضلع النهائي عكس حركة عقارب الساعة ، ويكون قياس الزاوية الموجّهة سالباً إذا كان اتجاه الدوران للضلع النهائي باتجاه حركة عقارب الساعة .

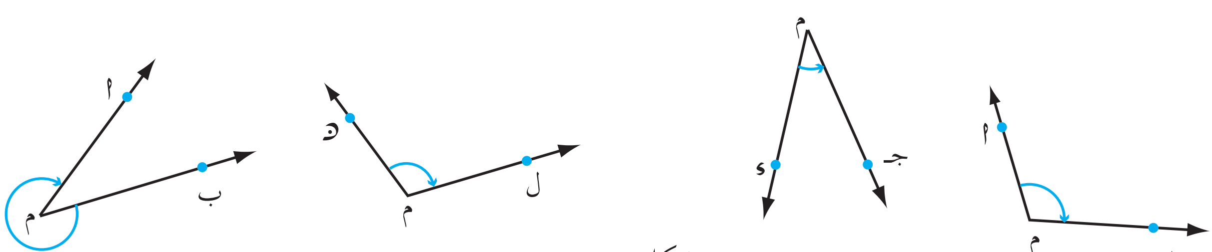
تلاحظ في [الشكل (٧ – ٢)] أن قياس كل من الزاويتين الموجّهتين (١) ، (٢) موجباً بينما يكون قياس كل من الزاويتين الموجّهتين (٣) ، (٤) سالباً .



شكل (٧ – ٢)

تدريب (٧–١)

تأمل [الشكل (٧–٣)] تلاحظ أربع زوايا موجهة ، سمّ الضلع الابتدائي والضلع النهائي لكل منها ، وعين نوع إشارة قياس كل زاوية .

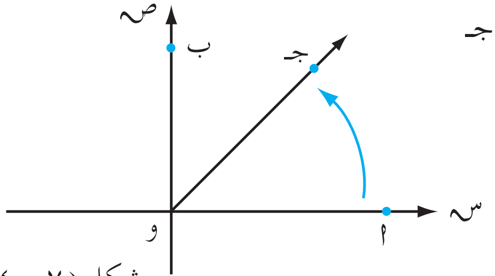


شكل (٧ – ٣)

تعريف (٧ : ١)

يقال أن زاوية موجّهة في الوضع القياسي إذا كان رأسها نقطة الأصل ، وضلعها الابتدائي منطبقاً على محور السينات الموجب .

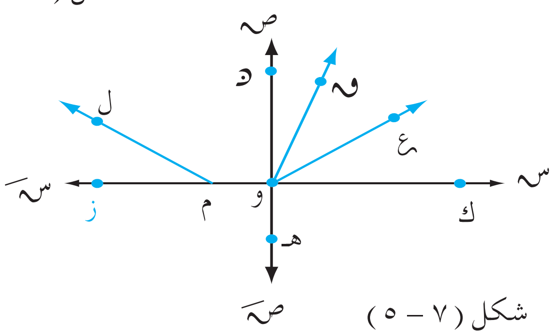
تأمل [الشكل (٧–٤)] تلاحظ أن : الزاوية الموجّهة ∡ أ و جـ في وضع قياسي بينما الزاوية الموجّهة ∡ ب و جـ ليست في وضع قياسي . لماذا ؟



شكل (٧ – ٤)

تدريب (٧–٢)

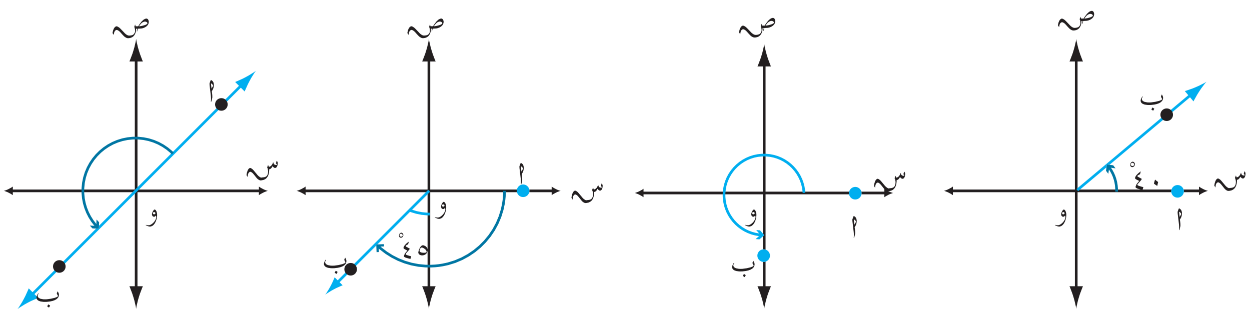
في الشكل (٧ – ٥) : سمِّ ثلاث زوايا في وضع قياسي ، وثلاث زوايا في وضع غير قياسي .



شكل (٧ – ٥)

مثال (٧ – ١)

في [الشكل(٧–٦)] : سمِّ كل زاوية وضلعها الابتدائي ، وضلعها النهائي ، وحدد قياسها ، ثم حدد ايّا من الزوايا الأربع في وضع قياسي .



(٤) (٣) شكل (٧ – ٦) (٢) (١)

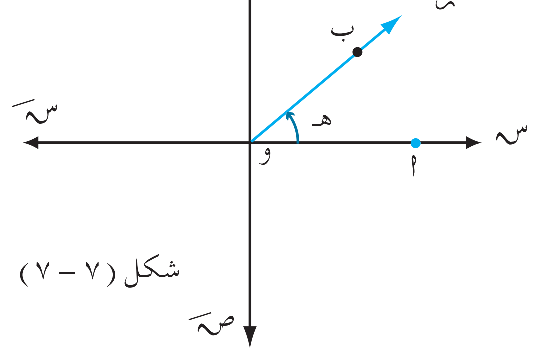
الحـــل

١) ∡ أ و ب زاوية موجهة، ضلعها الابتدائي و أ ، ضلعها النهائي و ب ، قياسها ٤٠° ، وهي في وضع قياسي .

٢) ∡ أ و ب زاوية موجّهة ،ضلعها الابتدائي و أ ،ضلعها النهائي و ب ، قياسها ٢٧٠° ، وهي في وضع قياسي .

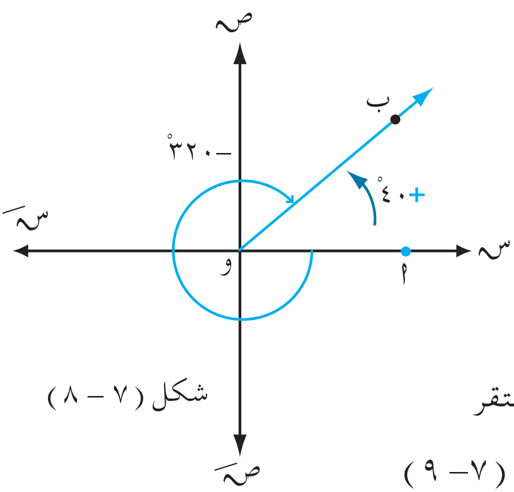
٣) ∡ أ و ب زاوية موجّهة ،ضلعها الابتدائي و أ ،ضلعها النهائي و ب ، قياسها –١٣٥° ، وهي في وضع قياسي .

٤) ∡ أ و ب زاوية موجّهة ، ضلعها الابتدائي و أ ، ضلعها النهائي و ب قياسها ١٨٠° ، وهي في وضع



شكل (٧ – ٧)

تصور شعاعا نقطة بدايته (و) ، وينطبق على محور السينات و ا وهو (الضلع الابتدائي) بدأ يدور باتجاه معاكس لحركة عقارب الساعة حتى ينطبق على ضلعها الآخر و ب (الضلع النهائي) ، وقد قطع هـ من الدرجات ، عندئذ نقول أن : ق (∡ ا و ب) = هـْ .

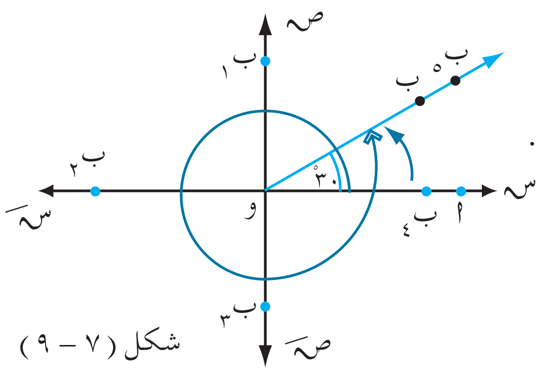


شكل (٧ – ٨)

في [الشكل (٧–٨)]: تلاحظ أن :

ق (∡ ا و ب) = ٤٠ْ (موجباً) بينما ق (∡ ا و ب) المنعكسة = – ٣٢٠ْ وهذا القياس (سالباً)، وهناك قياسات أخرى للزاوية ا و ب إذ نتصور أن الشعاع بدأ دورته بعكس حركة عقارب الساعة من الوضع و ا واتخذ الوضع و ب ، ثم استمر في الدوران ماراً بالمواضع و $ب_١$ ، و $ب_٢$ ، و $ب_٣$ ، و $ب_٤$ حتى استقر في الوضع و $ب_٥$ وهو نفسه الوضع و ب . لاحظ الشكل (٧– ٩)

فيكون بذلك قد حدد القياسات للزاوية ٣٠ْ ، ومارًا بالقياسات ٩٠ْ ، ١٨٠ْ ، ٢٧٠ْ ، ٣٦٠ْ ، وفي حالة الوضع و $ب_٤$ نرى أن ق (∡ ا و $ب_٤$) = ٣٦٠ْ ، ونقول أن الشعاع قد دار دورة كاملة في حين لو استمر الشعاع بالدوران واتخذ الوضع و $ب_٥$ منطبقاً على الوضع و ب يكون بذلك قد حدد قياساً آخر للزاوية ا و ب بدلاً عن ٣٠ْ .



شكل (٧ – ٩)

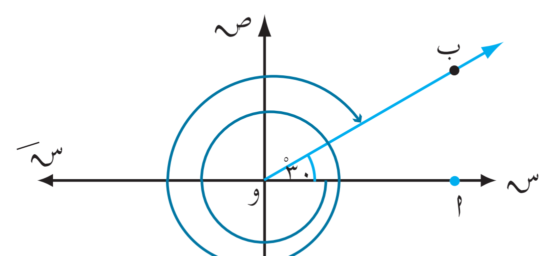
أي أن : ق (∡ ا و ب) = ٣٦٠ْ + ٣٠ْ = ٣٩٠ْ .

وإذا دار الشعاع دورتين كاملتين ثم اتخذ الوضع و ب مرة ثالثة فإن :

ق (∡ ا و ب) = ٣٠ْ + ٢ × ٣٦٠ْ = ٧٥٠ْ .. وهكذا

إذا تصورنا أن الشعاع قد بدأ الدوران من الوضع و ا مع حركة دوران عقارب الساعة واتخذ و ب لاحظ الشكل (٧– ١٠) فيكون

ق (∡ ا و ب) المنعكسة = –٣٣٠ْ .



شكل (٧ – ١٠)

وأما إذا دار دورة كاملة مع حركة عقارب الساعة ، ثم

ق (∠ أ و ب) المنعكسة = [illegible] ... وهكذا .

مما سبق نستنتج أن : لكل زاوية موجّهة في الوضع القياسي عدداً غير منتهٍ من القياسات .

وعلى العموم فإن :

ق (∠ أ و ب) = (هـْ + ن × ٣٦٠ْ) حيث ن ∈ ص .

وإذا كانت ن موجبة كان الدوران عكس دوران عقارب الساعة ، وإذا كانت ن سالبة كان الدوران مع دوران عقارب الساعة ، ويسمى القياس هـْ القياس الأساسي للزاوية سواء كان موجباً أو سالباً .

مثال (٧ – ٢) أوجد القياس الأساسي للزاوية ٨٤٠ْ ؟

الحل

عدد الدورات الكاملة = $\frac{٨٤٠}{٣٦٠}$ = ٢ (دورتين باتجاه عكس عقارب الساعة) ، والباقي = ١٢٠ْ وهو القياس الأساسي للزاوية

أي أن هـ = ١٢٠ْ

ويمكن حسابها حسب القانون بعد معرفة عدد الدورات كمايلي :

٨٤٠ْ = هـ + ن × ٣٦٠ْ

٨٤٠ْ = هـ + ٢ × ٣٦٠ْ

٨٤٠ْ = هـ + ٧٢٠ْ

∴ هـ = ٨٤٠ْ – ٧٢٠ْ = ١٢٠ْ .

مثال (٧ – ٣) أوجد القياس الأساسي للزاوية (– ١٤٧٠ْ) ؟

الحل

عدد الدورات الكاملة = $\frac{-١٤٧٠}{٣٦٠}$ = – ٤ (٤ دورات باتجاه حركة عقارب الساعة) ، والباقي = – ٣٠ْ وهو القياس الأساسي للزاوية

أي أن هـ = – ٣٠ْ

(تحقق من الحل باستخدام القانون) .

أوضاع الزوايا القياسية في النظام الأحداثي :

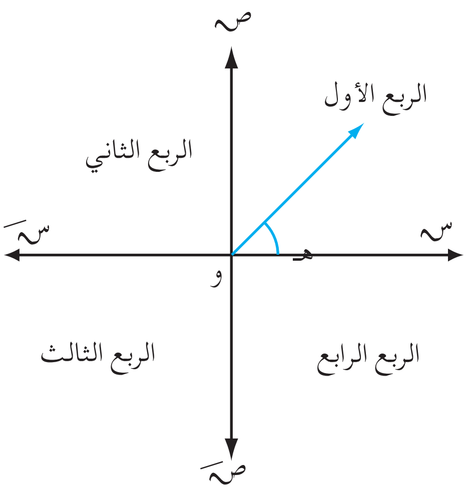
يوضح [الشكل (٧–١١)] الأرباع الأربعة لنظام إحداثي متعامد، لتكن لدينا زاوية في وضع قياسي قياسها هـ .

١ – إذا كانت الزاوية ٠° < هـ < ٩٠° فإنها تكون «زاوية حادة» وتقع في الربع الأول .

٢ – إذا كانت الزاوية ٩٠° < هـ < ١٨٠ فإنها تكون «زاوية منفرجة» وتقع في الربع الثاني .

٣ – إذا كانت الزاوية ١٨٠° < هـ < ٢٧٠° فإنها تكون «زاوية منعكسة» وتقع في الربع الثالث .

٤ – إذا كانت الزاوية ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠ فإنها تكون «زاوية منعكسة» وتقع في الربع الرابع .



شكل (٧ – ١١)

أما إذا وقع الضلع النهائي للزاوية الموجّهة في وضع قياسي على أحد محوري الاحداثيات تسمى بالزاوية المحورية.

مثلاً هـ = ٠° فانها محورية منطبقة على محور السينات الموجب، هـ = ٩٠° فانها محورية منطبقة على محور الصادات الموجب .

، هـ = ١٨٠° فانها محورية منطبقة على محور السينات السالب، هـ = ٢٧٠° فانها محورية منطبقة على محور الصادات السالب .

هـ = ٣٦٠° فانها محورية منطبقة على محور السينات الموجب .

مثال (٧ – ٤)

حدد في أي ربع أو على أي محور يقع الضلع النهائي لكل من الزوايا الموجّهة في الوضع القياسي ، ثم ارسم كل منها .

أ) ١٨٠° .   ب) ٧٥° .   جـ) ٢٥٠° .   ء) ١٣٥° .

الحـــل

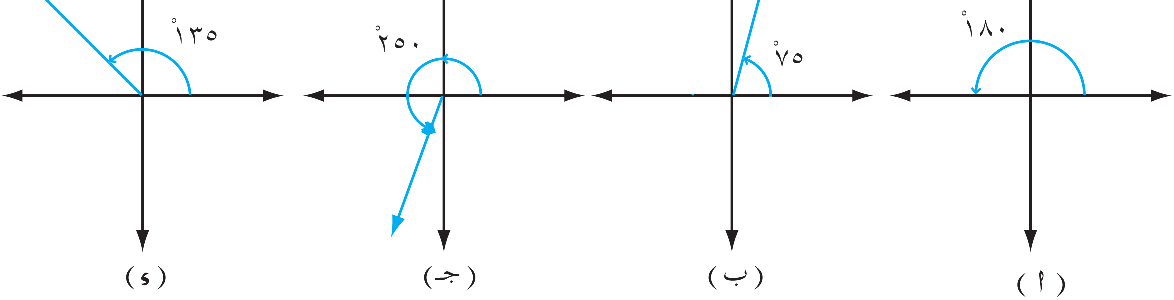
أ) ∵ الزاوية = ١٨٠° فإن الضلع النهائي للزاوية يقع على محور السينات السالب زاوية محورية .

ب) ∵ الزاوية = ٧٥° ، ٠° < ٧٥° < ٩٠° ، فإن الزاوية تقع في الربع الأول .

جـ) ∵ الزاوية = ٢٥٠° ، ١٨٠° < ٢٥٠° < ٢٧٠° ، فإن الزاوية تقع في الربع الثالث .

ء) ∵ الزاوية = ١٣٥° ، ٩٠° < ١٣٥° < ١٨٠° فإن الزاوية تقع في الربع الثاني .

وبذلك يوضح الشكل (٧ – ١٢) بالترتيب الوضع القياسي للزوايا الموجهة ١٨٠° ، ٧٥° ، ٢٥٠° ، ١٣٥° .



شكل (٧ – ١٢)

مثال (٧ – ٥)

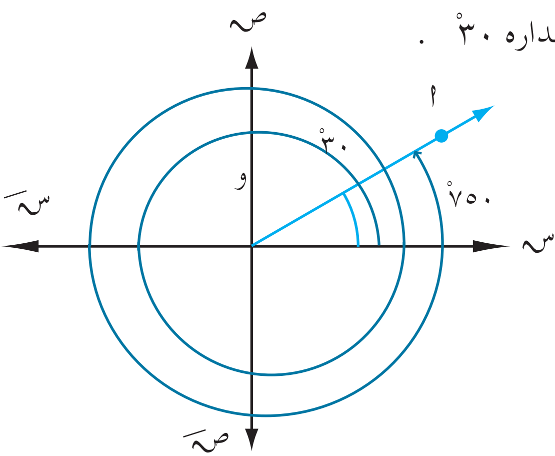
ارسم الزاويتين الموجهتين أ) ٧٥٠° . ب) –٤٩٥° . في الوضع القياسي مبينا، الربع الذي يقع فيه الضلع النهائي للزاويتين ، ثم أوجد القياس الأساسي لكل منها .

الحــل

أ) عدد الدورات الكاملة = $\frac{٧٥٠°}{٣٦٠°}$ = ٢ (دورتين باتجاه عكس حركة عقارب الساعة) ، والباقي = ٣٠° .

∴ $\overleftarrow{\text{و أ}}$ دار دورتين حتى استقر على قياس أساسي مقداره ٣٠° .

∴ الزاوية ٧٥٠° موجبه ، وتقع في الربع الأول .



شكل (٧ – ١٣)

ب) عدد الدورات الكاملة = $\frac{-٤٩٥°}{٣٦٠°}$ = –١

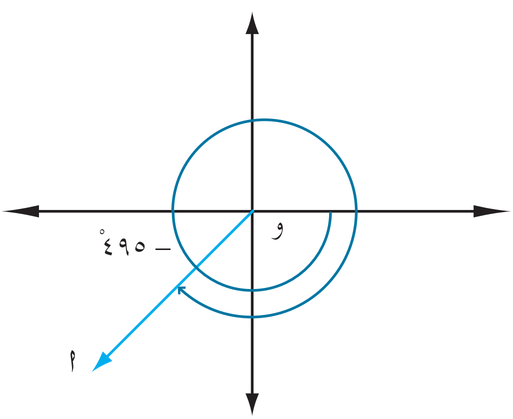
(دورة واحدة باتجاه حركة عقارب الساعة)

والباقي = –١٣٥° .

∵ $\overleftarrow{\text{و أ}}$ دار دورة كاملة مع حركة عقارب الساعة ،

حتى استقر على قياس أساسي مقداره –١٣٥° .

∴ الزاوية –٤٩٥° سالبة ، وتقع في الربع الثالث .



شكل (٧ – ١٤)

تمارين ومسائل (٧ : ١)

[١] تحقق من صحّة موقع الزوايا في وضعها القياسي باختيار الإجابة الصحيحة .

أ) الزاوية التي قياسها ٣٠٠° تقع في الربع ... [الأول – الثاني – الثالث – الرابع].

ب) الزاوية التي قياسها ٢٥٠° تقع في الربع ... [الأول – الثاني – الثالث – الرابع].

[٢]أوجد القياس الأساسي لكل من الزوايا الموجّهة في وضعها القياسي مبيناً الربع الذي تقع فيه ، ثم ارسمها :

أ) ٤٥° . ب) – ٣٠° . جـ) –٣٩٠° . ء) ٨٥٠° .

هـ) ١٩٢٠° . و) – ١١٢٥° . ي) ٢٩٨١° .

[٣] في أي ربع أو على أي محور يقع الضلع النهائي لكل من الزوايا التالية في الوضع القياسي ؟

أ) ٣١٥° . ب) – ٢٠٠° . جـ) –٥٦٠° . ء) –٤٨٠° .

هـ) ٢٥٠° . و) – ٨٥° . ي) ٢٦٠° . ح) ٠° .

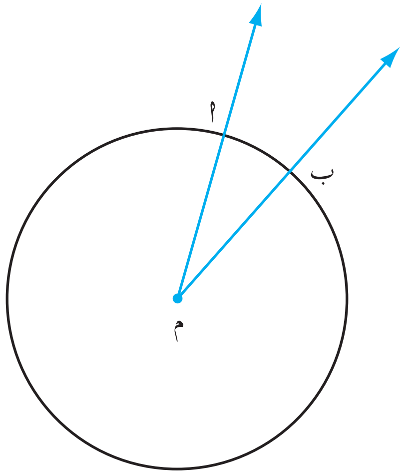
[٤] في أي من الحالات الآتية تكون الزاوية الموجّهة ∡ س ص ع في وضع قياسي .

أ) س (٥ ، ٠) ، ص (٠ ، ٠) ، ع (٠ ، –٥) .

ب) س (٢ ، ٢) ، ص (٠ ، ٠) ، ع (٠ ، ٤) .

هناك نظامان لقياس الزوايا يسمى الأول بالنظام (أو التقدير) الستيني ، ويسمى الآخر النظام (أو التقدير) الدائري .

أولاً – التقدير الستيني :



شكل (٧ – ١٥)

يلاحظ في الشكل (٧–١٥) دائرة مركزها « م » قسم محيطها إلى ٣٦٠ جزءً متساوياً ، والشعاعان $\overrightarrow{\text{م أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ب}}$ يحددان ضلعي $\measuredangle$ أ م ب بحيث يحصران قوساً طوله يساوى $\frac{١}{٣٦٠}$ من محيط الدائرة لتشكل الزاوية الناتجة عن هذا التقسيم وحدة قياس للنظام الستيني بدرجة ستينية واحدة يرمز لها بالرمز (١°) .

تعريف (٧ : ٢)

الدرجة الستينية هي قياس الزاوية المركزية التي يحصر ضلعاها قوساً طوله $\frac{١}{٣٦٠}$ ، ويرمز لها بالرمز (١°)

نقسم الدرجة إلى (٦٠) وحدة متساوية القياس كل منها تسمى دقيقة يرمز لها بالرمز ($١'$) ، وبقسمة الدقيقة إلى (٦٠) وحدة متساوية القياس كل منها تسمى ثانية ويرمز لها بالرمز ($١''$) .

الدرجة = ٦٠ دقيقة ، أي أن : $١^\circ = ٦٠'$

الدقيقة = ٦٠ ثانية ، أي أن : $١' = ٦٠''$

ثانياً – التقدير الدائري:

إلى جانب التقدير الستيني لقياس الزوايا يوجد قياس آخر للأقواس والزوايا يسمى بالتقدير الدائري ووحدته هي الراديان.

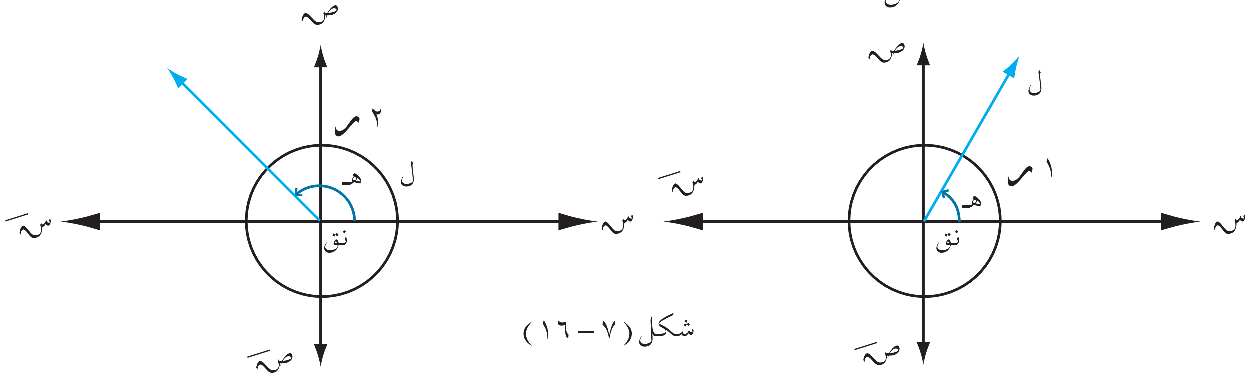
تعريف (٧ : ٣)

الراديان (الزاوية النصف قطرية) : هو قياس زاوية مركزية تقابل قوساً من دائرة طوله مساوٍ لنصف قطر تلك الدائرة ، ويرمز له بالرمز « ر » .

بمعنى أن الزاوية التي قياسها (واحد راديان) تقابل قوساً طوله (نق) .

والزاوية التي قياسها (٢ راديان) تقابل قوساً طوله (٢ نق) ، وبصورة عامة فإن الزاوية التي قياسها هـ ر تقابل قوساً طوله (هـ نق) وحدة طول ، ونستنتج أن طول القوس (ل) المقابل لزاوية مركزية قياسها

وعليه فإن : هـ = $\frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ ، نق ≠ صفر .



شكل (٧ – ١٦)

العلاقة بين القياسين الستيني والدائري :

تعرف أن محيط الدائرة يساوي ٢ π نق ، وأن القياس الدائري للزاوية الناتجة عن دورة كاملة بالاتجاه الموجب تساوى $\frac{\text{٢ } \pi \text{ نق}}{\text{نق}}$ = ٢ π ر ، وهذه الزاوية تساوي ٣٦٠° في التقدير الستيني .

∴ ٢ π ر = ٣٦٠° أو π ر = ١٨٠° .

ولذلك فإن :

١° = $\frac{\pi}{\text{١٨٠°}}$ ، ١ ر = $\frac{\text{١٨٠°}}{\pi}$.

قاعدة :

١ – عند التحويل من الدرجات إلى راديان تضرب في $\frac{\pi}{\text{١٨٠°}}$.

٢ – عند التحويل من الراديان إلى درجات تضرب في $\frac{\text{١٨٠°}}{\pi}$.

فعلى سبيل المثال :

التقدير الستيني	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
التقدير الدائري	$\frac{\pi}{\text{٦}}$	$\frac{\pi}{\text{٤}}$	$\frac{\pi}{\text{٣}}$	$\frac{\pi}{\text{٢}}$	π	$\frac{\text{٣ }\pi}{\text{٢}}$	٢ π

الجدول (٧ – ١)

مثال (٧ – ٦) أكمل الجدول (٧ – ٢) التالي :

التقدير الستيني	١٢٠°	– ١٥٠°		
التقدير الدائري			$\frac{\text{٣ }\pi}{\text{٢}}$	$\frac{-\pi}{\text{٩}}$

الحل

– لتحويل ١٢٠° إلى الراديان نضرب في $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$

$$١٢٠^\circ = ١٢٠^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} = \frac{٢}{٣}\pi \text{ ،}$$

– لتحويل -١٥٠° إلى الراديان .

$$\left(-١٥٠^\circ = -١٥٠^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} = -\frac{٥}{٦}\pi \right)$$

– لتحويل $\frac{٣}{٢}\pi$ إلى الدرجات نضرب في $\frac{١٨٠^\circ}{\pi}$

$$\therefore \frac{٣}{٢}\pi = \frac{٣}{٢}\pi \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} = ٢٧٠^\circ$$

– لتحويل $-\frac{\pi}{٩}$ إلى الدرجات :

$$\left(-\frac{\pi}{٩} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} = -٢٠^\circ \right) .$$

مثال (٧ – ٨) أوجد طول القوس الذي يقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° في دائرة طول نصف قطرها ١٢سم . ($\pi = ٣,١٤$) .

الحل

$$٦٠^\circ = ٦٠^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} = \frac{\pi}{٣} .$$

$$ل = نق \times هـ = ١٢ \times \frac{١}{٣}\pi = ٤ \times ٣,١٤ = ١٢,٥٦ \text{سم} .$$

تمارين ومسائل (٧ : ٢)

[١] حوّل إلى الراديان كلاً مما يلي :

أ) ٣٦٠° . ب) ٩٠° . جـ) ٤٥° . ء) ١٥° .

هـ) -١٢٠° . و) ٣٠٠° . ز) -٥٤٠° . ح) ٠° .

ط) -٢٥٥°

[٢] حوّل إلى الدرجات كلاً مما يلي :

أ) $\frac{\pi}{٢}$ ر . ب) $-\frac{\pi}{٤}$ ر . جـ) $\frac{٥\pi}{٦}$ ر . ء) $٢,٦\pi$ ر .

الزاوية بالتقدير الستيني	١٥٠°	٢٢٥°				٣٦٠°
الزاوية بالتقدير الدائري			$\frac{٤\pi}{٣}$ ر	$\frac{٧\pi}{٤}$ ر	$\frac{١١\pi}{٦}$ ر	

الجدول (٧ – ٣)

[٤] دائرة طول نصف قطرها يساوي ٢٠سم ، أوجد طول القوس الذي يقابل زاوية مركزية قياسها هـ ، حيث :

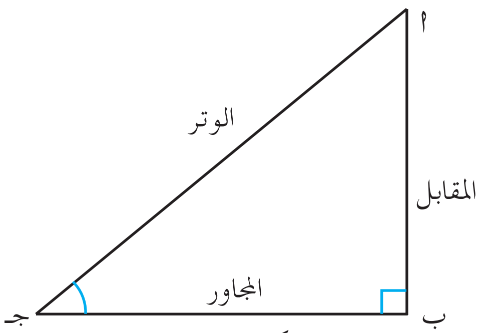
أ) هـ = $\frac{٣\pi}{٤}$.   ب) هـ = $\frac{٥\pi}{٤}$.   جـ) هـ = ١٤٠° .   ء) هـ = ٦٠° .

٧ : ٣ النســب المثلثيــة

سابقاً تعرفت على النسب المثلثيةالتالية :

جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، ظا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

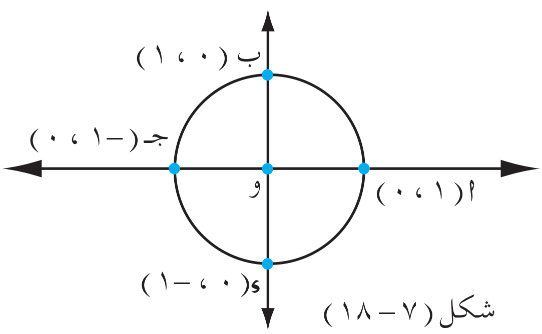
كما هو موضح في [الشكل (٧–١٧)] .



شكل (٧ – ١٧)

والآن يمكن أن نتعرف على النسب المثلثية التالية الأساسية (جا ، جتا ، ظا) من خلال دائرة الوحدة .

لاحظ [الشكل (٧ – ١٨)] إذا رسمنا دائرة نصف قطرها وحدة واحدة مركزها نقطة الأصل (و) في المستوى الديكارتي المتعامد الإحداثيات أن الدائرة في هذه الحالة تسمى بدائرة الوحدة حيث تقطع محور السينات في النقطتين أ (١ ، ٠) ، جـ (–١ ، ٠) ، وتقطع محور الصادات في النقطتين ب (٠ ، ١) ، ء (٠ ، –١) ، وفي ضوء ذلك نعرف دائرة الوحدة .

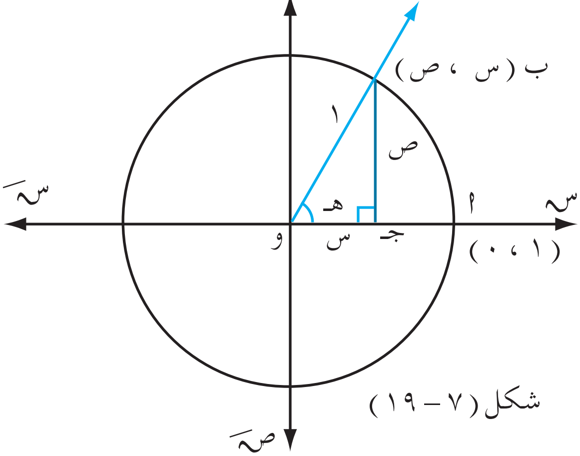


شكل (٧ – ١٨)

تعريف (٧ : ٤)

دائرة الوحدة : هي الدائرة التي مركزها نقطة الأصل (و) في نظام إحداثي متعامد وطول نصف قطرها يساوي وحدة الأطوال . أي | و أ | = ١ وحدة طول

إذا رسمنا في دائرة الوحدة في [الشكل (٧–١٩)] زاوية موجّهة مثل الزاوية هـ في الوضع القياسي حيث يقطع الضلع الابتدائي للدائرة في النقطة أ (١ ، ٠) ويقطع ضلعها النهائي في النقطة ب (س ، ص) .



شكل (٧ – ١٩)

في جـ وبحسب نظرية فيثاغورث :

|و جـ|^{٢} + |ب جـ|^{٢} = |و ب|^{٢} ،

ولكن |و ب| = نق = ١ .

∴ |و جـ|^{٢} + |ب جـ|^{٢} = ١ ،

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ١ ——— (١)

ونعـرف النسب المثلثيـة الأساسية لهذه الزاوية كالآتي :

تعريف (٧ : ٥)

إذا كانت ب (س ، ص) هي النقطة لزاوية قياسها هـ في دائرة الوحدة فإن :

١ – الإحداثي الصادي للنقطة ب يسمى جيب الزاوية ، ويكتب : جا هـ = ص

٢ – الإحداثي السيني للنقطة ب يسمى جيـب تمـام الزاويـة ، ويكتـب : جتا هـ = س .

٣ – ناتج قسمة الإحداثي الصادي على الإحداثي السيني للنقطة ب يسمى ظل الزاوية ويكتب :

$$\textbf{ظاهـ} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} .$$

وبالتعويض عن س = جتا هـ ، ص = جاهـ في العلاقة (١) نحصل على :

جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ = ١ ——— (٢) .

بالإضافة إلى النسب المثلثية الأساسية فإننا نعرف نسباً مثلثية أخرى للزاوية التي قياسها هـ على النحو التالي :

تعريف (٧ : ٦)

١ – قاطع تمام الزاوية : $\textbf{قتا هـ} = \frac{١}{\text{جا هـ}}$ ، جا هـ ≠ ٠

٢ – قاطع الزاوية : $\textbf{قا هـ} = \frac{١}{\text{جتا هـ}}$ ، جتا هـ ≠ ٠

٣ – ظل تمام الزاوية : $\textbf{ظتا هـ} = \frac{١}{\text{ظا هـ}} = \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$ ، جا هـ ≠ ٠

وفي دائرة الوحدة نجد أن : $\textbf{قتا هـ} = \frac{١}{\text{ص}}$ ، ص ≠ ٠

$\textbf{قا هـ} = \frac{١}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

$\textbf{ظتا هـ} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، ص ≠ ٠

مثال إذا كان جا هـ = $\frac{\quad}{١٣}$ ، جتاهـ = $\frac{\quad}{١٣}$ أوجد كلا من ظاهـ ، قتاهـ ، قاهـ ، ظتاهـ .

الحـــل

∵ ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ ∴ ظاهـ = $\frac{\frac{٥}{١٣}}{\frac{١٢}{١٣}} = \frac{٥}{١٣} \times \frac{١٣}{١٢} = \frac{٥}{١٢}$ ،

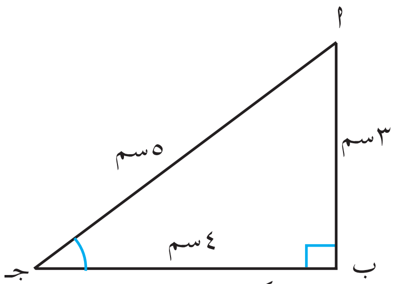
∵ قتا هـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$ ∴ قتاهـ = $\frac{١}{\frac{٥}{١٣}} = \frac{١٣}{٥}$ ،

∵ قا هـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$ ∴ قاهـ = $\frac{١}{\frac{١٢}{١٣}} = \frac{١٣}{١٢}$ ،

∵ ظتا هـ = $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$ ∴ ظتاهـ = $\frac{١٢}{١٣} \div \frac{٥}{١٣} = \frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٣}{٥} = \frac{١٢}{٥}$

مثال (٧ – ١٠) إذا كان جا جـ = $\frac{٣}{٥}$ حيث $°٠ <$ جـ $< °٩٠$ ، فأوجد قيمة جتا^٢ جـ – جا^{٢}جـ .

الحـــل



شكل (٧ – ٢٠)

نستخدم نظرية فيثاغورث

$|$أ ب$|^٢ + |$ب جـ$|^٢ = |$أ جـ$|^٢$.

$(٣)^٢ + |$ب جـ$|^٢ = (٥)^٢ \Leftarrow |$ب جـ$|^٢ = ٢٥ - ٩ = ١٦$

∴ $|$ب جـ$| = \sqrt{١٦} = ٤$ ، ∴ جتا جـ = $\frac{٤}{٥}$

∴ جتا^٢ جـ – جا^٢ جـ = $(\frac{٤}{٥})^٢ - (\frac{٣}{٥})^٢$.

$= \frac{١٦}{٢٥} - \frac{٩}{٢٥} = \frac{٧}{٢٥}$.

حل آخر :

جا^٢ جـ + جتا^٢ جـ = ١ ∴ جتا^٢ جـ = ١ – جا^٢ جـ

$= ١ - \frac{٩}{٢٥} = \frac{١٦}{٢٥}$

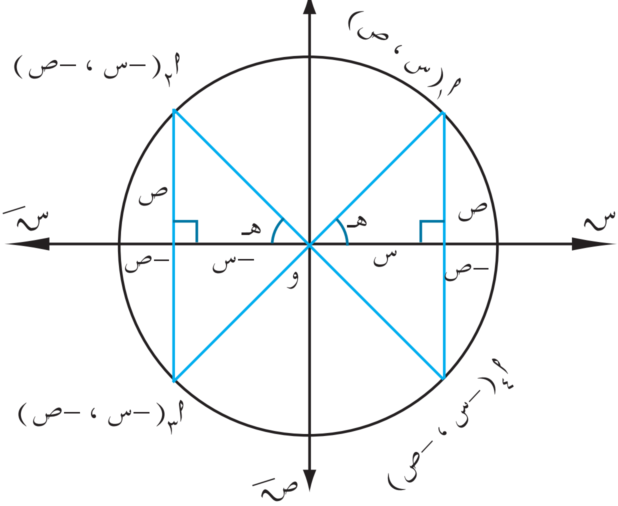
∴ جتا^٢ جـ – جا^٢ جـ = $\frac{١٦}{\quad} - \frac{٩}{\quad} = \frac{٧}{\quad}$

قاعدة الإشارات للنسب المثلثية :

إذا كانت جاهـ = ص ، جتا هـ = س ،

ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ (حيث س ≠ ٠)

لاحظ [الشكل (٧–٢١)] حيث أ (س ، ص) هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية هـ مع دائرة الوحدة ، لذلك فإشارة كل من جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ ، ظتاهـ تتبع إشارة كل من س ، ص .

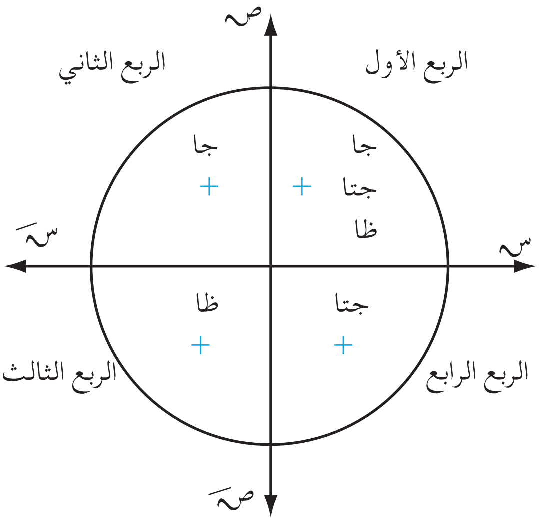


شكل (٧ – ٢١)

أدرس الجدول(٧ – ٤) مستخدماً [الشكل (٧–٢٢)] :

الربع	الفترة بالدرجات	قيم س ، ص	إشارة النسب المثلثية للزاوية هـ
الأول	[٠° ، ٩٠°]	س موجبة ، ص موجبة	(جا ، جتا ، ظا) موجبة
الثاني	]٩٠° ، ١٨٠°]	س سالبة ، ص موجبة	جا موجبة ، (جتا ، ظا) سالبة
الثالث	] ١٨٠° ، ٢٧٠°]	س سالبة ، ص سالبة	(جا ، جتا) سالبة، ظا موجبة
الرابع	]٢٧٠ ، ٣٦٠° [	س موجبة ، ص سالبة	(جا، ظا) سالبة ،جتا موجبة

الجدول (٧ – ٤)



شكل (٧ – ٢٢)

تدريب (٧–٣)

أكمل الجدول (٧ – ٥) التالي :

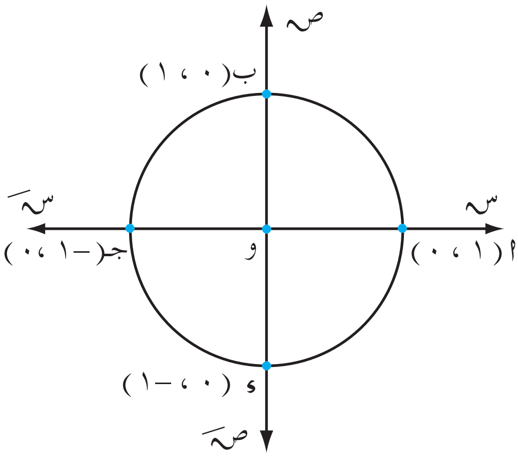
قياس الزاوية الموجهة	الربع الذي تقع فيه	إشـــارة		
		جا هـ	جتا هـ	ظا هـ
٤٥°				
١١٠°				
٣٠٠°				
٢١٠°				
٧٥٠°				

الجدول (٧ – ٥)

النسب المثلثية لبعض الزوايا المحورية :

تعلمت سابقاً إيجاد النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة مثل : ٣٠ْ ، ٦٠ْ ، ٤٥ْ ، ونتعرف الآن على بعض النسب المثلية للزوايا ٠ْ ، ٩٠ْ ، ١٨٠ْ ، ٢٧٠ْ ، ٣٦٠ْ باستخدام دائرة الوحدة .

نرسم دائرة الوحدة في النظام الإحداثي المتعامد [الشكل (٧ −٢٣)] .



شكل (٧ − ٢٣)

نلاحظ أن دائرة الوحدة تقطع المحور السيني في النقطتين أ(١ ، ٠) ، جـ(−١ ، ٠) ، وتقطع المحور الصادي في النقطتين ب (٠ ، ١) ، ء (٠ ، −١) ، ومن خلال ذلك نستطيع تحديد بعض النسب المثلثية للزوايا : ٠ْ ، ٩٠ْ ، ١٨٠ْ ، ٢٧٠ْ ، ٣٦٠ْ باستخدام دائرة الوحدة .

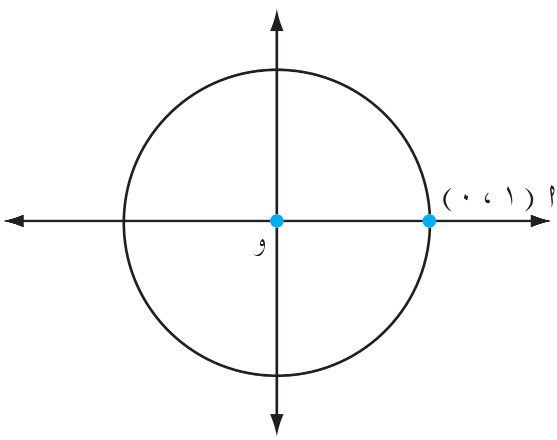
١ − انظر [الشكل (٧−٢٤)] أ هي النقطة (١ ، ٠) ،

ق(∢ أ و أ) = ٠ْ

∴ جا ٠ْ = ٠

جتا ٠ْ = ١

ظا ٠ْ = ٠ .



شكل (٧ − ٢٤)

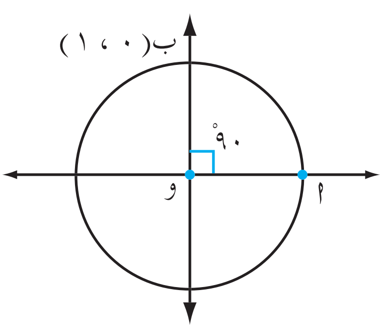
٢ − انظر [الشكل (٧−٢٥)] ب هي النقطة (٠ ، ١) ،

ق(∢ أ و ب) = ٩٠ْ .

∴ جا ٩٠ْ = ١

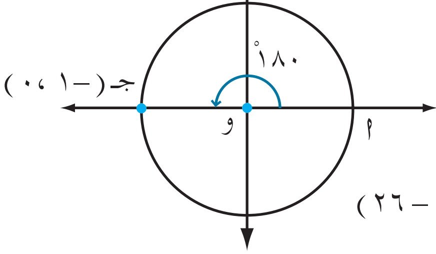
جتا ٩٠ْ = ٠

ظا ٩٠ْ = غير معرّف (لماذا ؟)



شكل (٧ − ٢٥)

٣ – انظر [الشكل (٧–٢٦)] جـ هي النقطة (–١ ، ٠)،



شكل (٧ – ٢٦)

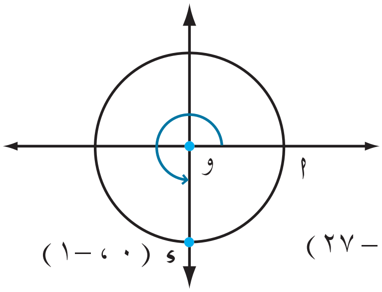
ق (∡ أ و جـ) = ١٨٠ْ

∴ جا ١٨٠ْ = ٠

جتا ١٨٠ْ = –١

ظا ١٨٠ْ = ٠

٤ – انظر [الشكل (٧–٢٧)] د هي النقطة (٠ ، –١)،



شكل (٧ – ٢٧)

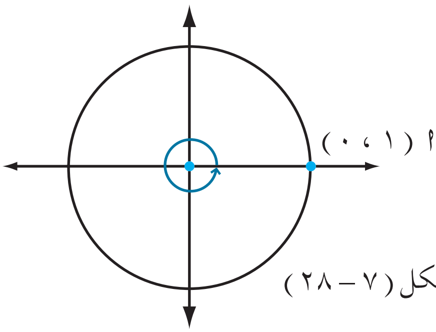
ق (∡ أ و د) = ٢٧٠ْ

∴ جا ٢٧٠ْ = –١

جتا ٢٧٠ْ = ٠

ظا ٢٧٠ْ = غير معرّف (لماذا ؟) .

٥ – انظر [الشكل (٧–٢٨)] أ هي النقطة (١ ، ٠) .



شكل (٧ – ٢٨)

ق (∡ أ و أ) = ٣٦٠ْ

∴ جا ٣٦٠ْ = ٠

جتا ٣٦٠ْ = ١

ظا ٣٦٠ْ = ٠

تدريب (٧–٤) قارن النسب المثلثية للزاويتين اللتين قياس كل منهما ٠ْ ، ٣٦٠ْ . ماذا تستنتج ؟

يلخص الجدول (٧ – ٤) النسب المثلثية للزوايا الخاصة السابقة الذكر كالتالي :

النسب المثلثية الزاوية	جا هـ	جتا هـ	ظا هـ	قا هـ	قتا هـ	ظتا هـ
٠ْ	٠	١	٠	١	غير معرّفة	غير معرّفة
٩٠ْ	١	٠	غير معرّفة	غير معرّفة	١	٠
١٨٠ْ	٠	–١	٠	–١	غير معرّفة	غير معرّفة
٢٧٠ْ	–١	٠	غير معرّفة	غير معرّفة	–١	٠
٣٦٠ْ	٠	١	٠	١	غير معرّفة	غير معرّفة

مثال (٧ – ١١) إذا كانت (س ، $\frac{٣}{٥}$) نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجّهة قياسها هـ مع دائرة الوحدة فأوجد جا هـ ، جتا هـ ، ظا هـ ، حيث $٠^\circ <$ هـ $< ٩٠^\circ$

الحل

∵ (س ، $\frac{٣}{٥}$) نقطة على دائرة الوحدة . ، ∴ فهي تحقق معادلتها $س^٢ + ص^٢ = ١$

وبالتعويض عن قيمة ص يكون : $س^٢ + (\frac{٣}{٥})^٢ = ١$ ، ومنها $س^٢ = \frac{١٦}{٢٥}$.

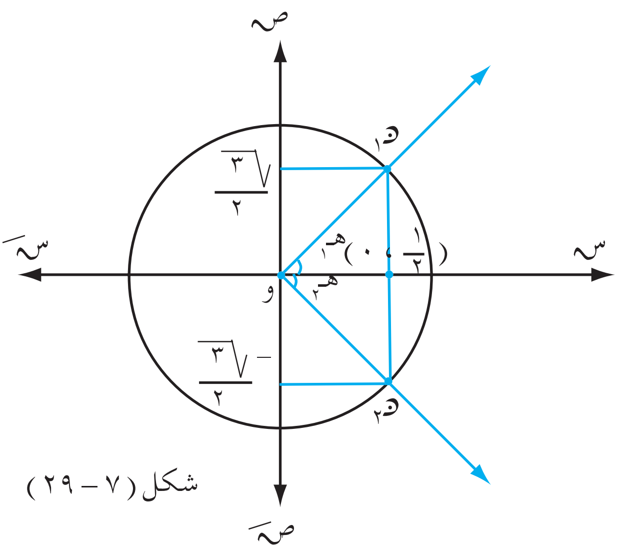
∴ س = $\pm \frac{٤}{٥}$ ، ∵ $٠^\circ <$ هـ $< ٩٠^\circ$

∴ الزاوية هـ واقعة في الربع الأول ، س ، ص موجبتان ، ومنه تكون : جا هـ = ص = $\frac{٣}{٥}$ ،

جتا هـ = س = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا هـ = $\frac{ص}{س} = \frac{\frac{٥}{١٣}}{\frac{١٢}{١٣}} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{٤} = \frac{٣}{٤}$.

مثال (٧ – ١٢) لتكن د ($\frac{١}{٢}$ ، ص) هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية الموجّهة هـ مع دائرة الوحدة . أثبت أنه توجد قيمتان لـ ص ، وعين على الشكل الزاويتين لهما رسماً ، (حيث ٠ < هـ < ٢π) ، ثم أوجد النسب المثلثية الست لكل من الزاويتين :

الحل



شكل (٧ – ٢٩)

∵ د ($\frac{١}{٢}$ ، ص) تقع على دائرة الوحدة فهي

تحقق معادلتها $س^٢ + ص^٢ = ١$ فيكون :

$(\frac{١}{٢})^٢ + ص^٢ = ١$ ، ومنها $ص^٢ = \frac{٣}{٤}$

، ∴ ص = $\pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ يوجد نقطتان على دائرة الوحدة هما :

$د_١$ ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) ، $د_٢$ ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$) انظر [الشكل (٧–٢٩)]

∴ يوجد قياسان للزاوية هما : $هـ_١$ ، $هـ_٢$ حيث $هـ_١$ ، $هـ_٢$ ∈] ٠ ، ٢π [

فيكون جاهـ$_١$ = $\frac{\quad}{٢}$ ، جتاهـ$_١$ = $\frac{\quad}{٢}$ ، ظاهـ$_١$ = $\sqrt{٣}$ (لماذا ؟)

∴ قتاهـ$_١$ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، قاهـ$_١$ = ٢ ، ظتاهـ$_١$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ .... (لماذا ؟)

جاهـ$_٢$ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتاهـ$_٢$ = $\frac{١}{٢}$ ، ظاهـ$_٢$ = $-\sqrt{٣}$.

قتاهـ$_٢$ = $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ ، قاهـ$_٢$ = ٢ ، ظتاهـ$_٢$ = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ... (لماذا ؟)

مثال (٧-١٣) إذا كان جتاهـ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ، أوجد قيمة كل من جاهـ ، ظاهـ ، قاهـ ، قتاهـ ، ظتاهـ حيث أن $٩٠^\circ <$ هـ < ١٨٠

الحل

جتا^٢ هـ + جا^٢ هـ = ١ ، جتاهـ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢$ + جا^{٢}هـ = ١ $\Leftarrow$ $\frac{٣}{٤}$ + جا^٢ هـ = ١

∴ جا^٢ هـ = $\frac{١}{٤}$ $\Leftarrow$ جاهـ = $\pm \frac{١}{٢}$.

بما أن الجيب في الربع الثاني موجب .

∴ جاهـ = $\frac{١}{٢}$ $\Leftarrow$ قتا هـ = $\frac{٢}{١}$ = ٢

وعليه ظاهـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{١}{٢} \div \frac{-\sqrt{٣}}{٢} = \frac{١}{٢} \times \frac{-٢}{\sqrt{٣}} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ∴ ظتاهـ = $-\sqrt{٣}$ ،

قاهـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}} = \frac{-٢}{\sqrt{٣}}$.

تمارين ومسائل (٧ : ٣)

[١] إذا كان جاهـ = $\frac{٣}{٥}$ ، $٩٠^\circ <$ هـ $< ١٨٠^\circ$ ، فأوجد : جتاهـ ، ظاهـ ، قاهـ ، ظتاهـ .

[٢] إذا كانت جاهـ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ ر $<$ هـ $< ٢\pi$ ر ، فاحسب كلاً من جاهـ ، جتا هـ ، ظاهـ .

[٣] إذا كانت جتا هـ = $\frac{-٢}{٣}$ ، وكانت هـ في الربع الثاني . أوجد قيمة كلٍّ من جا هـ ، ظاهـ ، ظتاهـ.

[٤] أوجد قيمة كلٍّ من :

أ) جا ٣٠° + جتا ٦٠° + ظا ٤٥° .   ب) ظا^{2} ٦٠° + ٤ جتا^{2} ٤٥° + ٣ قتا^{2} ٣٠° .

جـ) ٢ جا ٤٥° + $\frac{١}{٢}$ قتا ٤٥° .

[٥] إذا كان جتا س = $\frac{\text{جا } ٦٠^\circ}{\text{جا } ٩٠^\circ} - \frac{\text{جا } ٠^\circ}{\text{جا } ٤٥^\circ}$ فما قيمة س بفرض أنها زاوية حادة موجبة ؟

[٦] إذا كانت (س ، $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$) هي نقطة للزاوية التي قياسها هـ في دائرة الوحدة. فأوجد جا هـ ، جتا هـ ، ظا هـ ، علماً بأن $١٨٠^\circ < \text{هـ} < ٢٧٠^\circ$.

[٧] إذا كانت ($-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ص) نقطة لزاوية قياسها هـ في دائرة الوحدة حيث $١٨٠^\circ < \text{هـ} < ٢٧٠^\circ$ ، فأوجد جاهـ ، ظاهـ ، قتاهـ ، قا هـ .

[٨] أثبت أن النقطة ن ($-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$) تقع على دائرة الوحدة ، وإذا مر بالنقطة ن الضلع النهائي لزاوية موجّهة في وضع قياسي وكان قياسها ع . فأوجد قيمة جا ع ، جتا ع ، ظا ع .

٧ : ٤ العلاقات بين النسب المثلثية

تعرفنا سابقا على دائرة الوحدة وعلى العلاقة فيها $\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} = ١$ ، ولاحظنا أن س = جتا هـ ، ص = جا هـ ، وبالتعويض في المعادلة السابقة عن قيمة س ، ص نحصل على :

$$\boxed{\text{جتا}^{2}\text{ هـ} + \text{جا}^{2}\text{ هـ} = ١} \quad \text{———} (١)$$

وبقسمة طرفي المعادلة (١) على جتا^{2} هـ نجد أن : $\frac{\text{جتا}^{2}\text{ هـ}}{\text{جتا}^{2}\text{ هـ}} + \frac{\text{جا}^{2}\text{ هـ}}{\text{جتا}^{2}\text{ هـ}} = \frac{١}{\text{جتا}^{2}\text{ هـ}}$.

ومنه $$\boxed{١ + \text{ظا}^{2}\text{ هـ} = \text{قا}^{2}\text{ هـ}} \quad \text{———} (٢)$$

وبقسمة طرفي المعادلة (١) على جا^{2} هـ نجد أن :

$$\frac{\text{جتا}^{2}\text{ هـ}}{\text{جا}^{2}\text{ هـ}} + \frac{\text{جا}^{2}\text{ هـ}}{\text{جا}^{2}\text{ هـ}} = \frac{١}{\text{جا}^{2}\text{ هـ}} .$$

ومنه $$\boxed{\text{ظتا}^{2}\text{ هـ} + ١ = \text{قتا}^{2}\text{ هـ}} \quad \text{———} (٣)$$

ويمكن استخدام العلاقات الثلاثة السابقة في إثبات صحة علاقات مثلثية أخرى .

مثال (٧ – ١٤) إذا كان قياس زاوية موجّهة تقع في الربع الرابع يساوي هـ ، و كان جتا هـ $= \frac{١٢}{١٣}$ ،
فأوجد قيمة كلٍّ من : جا هـ ، قتا هـ ، ظا هـ .

الحــل

$\because$ جا^٢ هـ + جتا^٢ هـ = ١ ، $\therefore$ جا^٢ هـ = ١ – جتا^٢ هـ .

جا^٢ هـ $= ١ - \left(\frac{١٢}{١٣}\right)^٢ = ١ - \frac{١٤٤}{١٦٩} = \frac{٢٥}{١٦٩}$.

$\therefore$ جا هـ $= \pm \frac{٥}{١٣}$ ، $\because$ الزاوية هـ تقع في الربع الرابع .

$\therefore$ جا هـ $= - \frac{٥}{١٣}$ ، $\because$ قتا هـ $= \frac{١}{\text{جا هـ}}$.

$\therefore$ قتا هـ $= \frac{١}{\frac{-٥}{١٣}} = \frac{-١٣}{٥}$ ، ظا هـ $= \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\frac{-٥}{١٣}}{\frac{١٢}{١٣}}$ ، ظا هـ $= \frac{-٥}{١٣} \times \frac{١٣}{١٢} = \frac{-٥}{١٢}$.

مثال (٧ – ١٥) إذا كان ظا هـ = ٢ ، $١٨٠^\circ <$ هـ $< ٢٧٠^\circ$ ، فأوجد كلٍّ من جتا هـ ، جا هـ ، قتا هـ .

الحــل

$\because$ ١ + ظا^٢ هـ = قا^٢ هـ .

$\therefore$ $١ + (٢)^٢ =$ قا^٢ هـ $\Leftarrow$ ٥ = قا^٢ هـ $\Leftarrow$ قا هـ $= \pm \sqrt{٥}$

، حيث أن $١٨٠^\circ <$ هـ $< ٢٧٠^\circ$ فالزاوية تقع في الربع الثالث .

$\therefore$ قا هـ $= - \sqrt{٥}$

، $\because$ قا هـ $= \frac{١}{\text{جتا هـ}}$ $\Leftarrow$ $- \sqrt{٥} = \frac{١}{\text{جتا هـ}}$ $\Leftarrow$ $- \sqrt{٥} \times$ جتا هـ = ١

$\therefore$ جتا هـ $= - \frac{١}{\sqrt{٥}}$.

، $\because$ ظا هـ $= \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ $\Leftarrow$ جا هـ = ظا هـ $\times$ جتا هـ .

$\therefore$ جا هـ $= ٢ \times - \frac{١}{\sqrt{٥}} = \frac{-٢}{\sqrt{٥}}$.

$\because$ قتا هـ $= \frac{١}{\text{جا هـ}}$. $\Leftarrow$ قتا هـ $= \frac{١}{\frac{-٢}{\sqrt{٥}}}$

$\therefore$ قتا هـ $= \frac{-\sqrt{٥}}{٢}$.

الحــل

$$\text{الطرف الأيمن} = \left(\text{قتا هـ} - \text{ظتا هـ}\right)^{2} = \left(\frac{1}{\text{جا هـ}} - \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}\right)^{2} = \frac{\left(1 - \text{جتا هـ}\right)^{2}}{\text{جا}^{2}\,\text{هـ}}$$

$$= \frac{\left(1 - \text{جتا هـ}\right)\left(1 - \text{جتا هـ}\right)}{1 - \text{جتا}^{2}\,\text{هـ}} = \frac{\cancel{\left(1 - \text{جتا هـ}\right)}\left(1 - \text{جتا هـ}\right)}{\cancel{\left(1 - \text{جتا هـ}\right)}\left(1 + \text{جتا هـ}\right)} = \frac{1 - \text{جتا هـ}}{1 + \text{جتا هـ}} = \text{الطرف الأيسر.}$$ (و.هـ.م)

مثال (٧ – ١٧) أثبت أن : $\left(\text{ظا س} + \text{ظتا س}\right)^{2} = \text{قا}^{2}\,\text{س} + \text{قتا}^{2}\,\text{س}$.

الحــل

$$\text{الطرف الأيمن} = \left(\text{ظا س} + \text{ظتا س}\right)^{2} = \text{ظا}^{2}\,\text{س} + \text{ظتا}^{2}\,\text{س} + 2\,\text{ظا س ظتا س}$$

$$= \text{ظا}^{2}\,\text{س} + \text{ظتا}^{2}\,\text{س} + 2 \times \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} = \text{ظا}^{2}\,\text{س} + \text{ظتا}^{2}\,\text{س} + 2$$

$$= \left(1 + \text{ظا}^{2}\,\text{س}\right) + \left(1 + \text{ظتا}^{2}\,\text{س}\right) = \text{قا}^{2}\,\text{س} + \text{قتا}^{2}\,\text{س} = \text{الطرف الأيسر}$$ (و.هـ.م).

مثال (٧ – ١٨) برهن أن $\text{قا}^{2}\,\text{هـ} + \text{قتا}^{2}\,\text{هـ} = \frac{1}{\text{جا}^{2}\,\text{هـ جتا}^{2}\,\text{هـ}}$.

الحــل

$$\text{الطرف الأيمن} = \text{قا}^{2}\,\text{هـ} + \text{قتا}^{2}\,\text{هـ} = \frac{1}{\text{جتا}^{2}\,\text{هـ}} + \frac{1}{\text{جا}^{2}\,\text{هـ}} = \frac{\text{جا}^{2}\,\text{هـ} + \text{جتا}^{2}\,\text{هـ}}{\text{جتا}^{2}\,\text{هـ جا}^{2}\,\text{هـ}} = \frac{1}{\text{جتا}^{2}\,\text{هـ جا}^{2}\,\text{هـ}}$$

لأن [$\text{جا}^{2}\text{هـ} + \text{جتا}^{2}\text{هـ} = 1$] = الطرف الأيسر. (و.هـ.م)

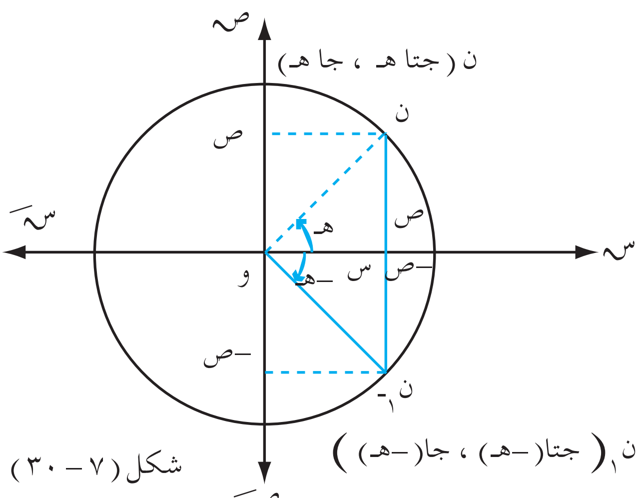
تأمل [الشكل (٧ – ٣٠)].. ماذا تلاحظ ؟

قارن بين النقطتين ن ، ن_1 ... ماذا تستنتج .

تلاحظ أن : ن_1 (جتا (– هـ)، جا (–هـ)) هي نقطة لزاوية موجّهة قياسها (–هـ) ، وهي صورة للنقطة ن (جتا هـ ، جا هـ) بالإنعكاس في محور السينات فإذا كان (س، ص) إحداثي ن فإن (س ، – ص) إحداثيا ن_1 ،

∴ جتا (–هـ) = س = جتا هـ

، جا (–هـ) = – ص = – جا هـ



شكل (٧ – ٣٠)

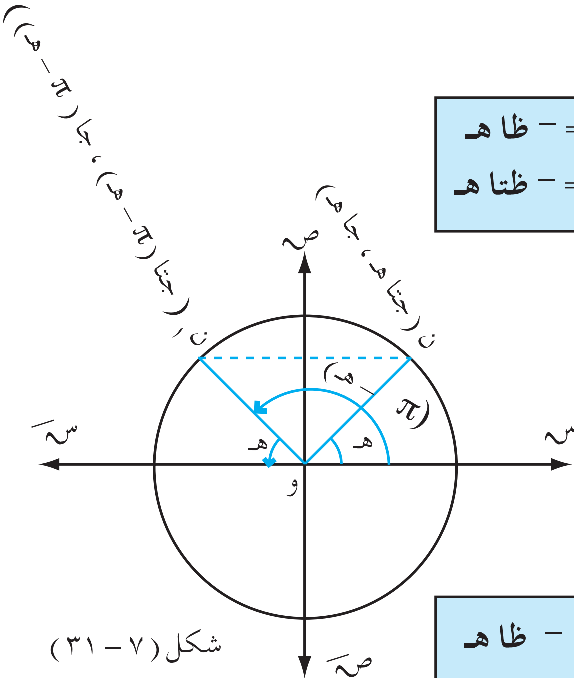
ظا (−هـ) = $\frac{\text{جا } (-\text{هـ})}{\text{جتا } (-\text{هـ})}$ = $\frac{-\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = − ظاهـ .

ظتا (−هـ) = $\frac{1}{\text{ظا } (-\text{هـ})}$ = − $\frac{1}{\text{ظا هـ}}$ = − ظتاهـ .

إذن :

جتا (− هـ) = جتا هـ ،	**ظا (−هـ) = − ظا هـ**
جا (− هـ) = − جا هـ ،	**ظتا (−هـ) = − ظتا هـ**

تدريب (٧−٥)



شكل (٧ – ٣١)

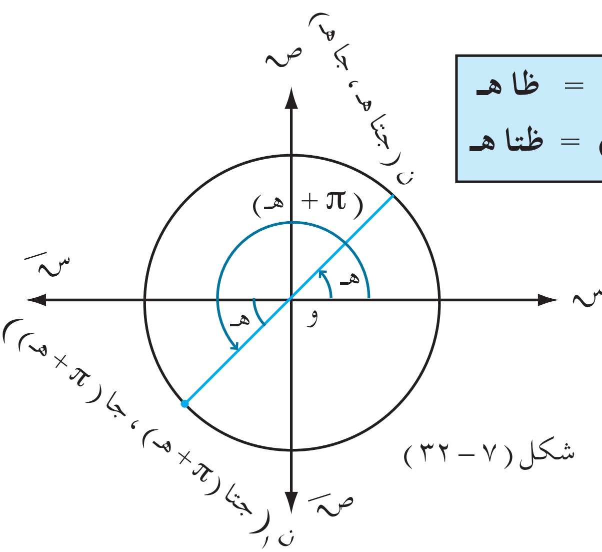
في [الشـــــكل (٧ – ٣١)] قم بالمقارنة بين النقطتين ن ، ن١ ، واستنتج العلاقات الممكنة ، ستحصل على أن :

جتا (π − هـ) = − جتا هـ ،	**ظا (π − هـ) = − ظا هـ**
جا (π − هـ) = جا هـ ،	**ظتا (π − هـ) = − ظتا هـ**

تدريب (٧−٦)

أعـد النشـــاط فـي التـدريـــب بالنسبـــة للشكل (٧ – ٣٢) تحصل على أن :

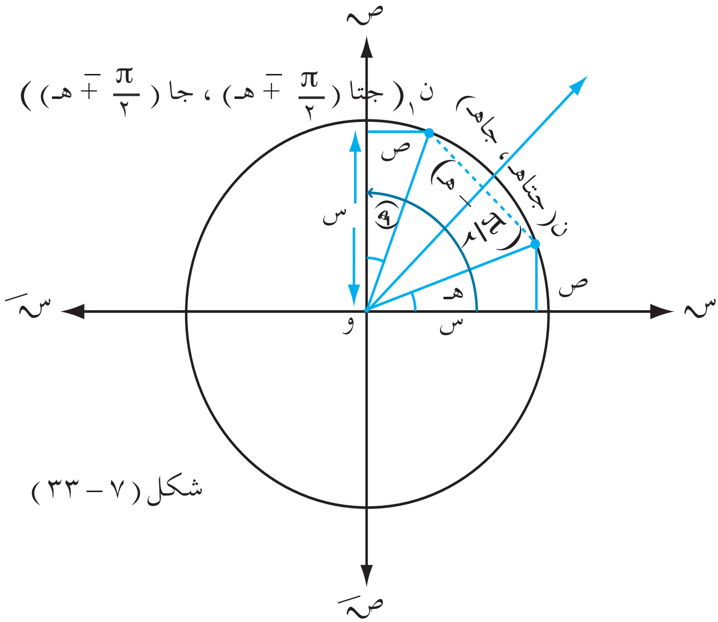
جتا (π + هـ) = − جتا هـ ،	**ظا (π + هـ) = ظا هـ**
جا (π + هـ) = − جا هـ ،	**ظتا (π + هـ) = ظتا هـ**



شكل (٧ – ٣٢)

تدريب (٧–٧)

أدرس الشكل (٧ – ٣٣) واستنتج العلاقات الممكنة .. تحصل على أن :



شكل (٧ – ٣٣)

$$\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{هـ}\right) = \text{س} = \text{جا هـ} \quad ، \quad \text{ظا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{هـ}\right) = \text{ظتا هـ}$$

$$\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{هـ}\right) = \text{ص} = \text{جتا هـ} \quad ، \quad \text{ظتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{هـ}\right) = \text{ظا هـ}$$

مثال (٧ – ١٩) أوجد كلاً من القيم التالية :

أ) جتا (-٣٠°) .　　ب) ظا (-٣٣٠°) .

جـ) جا $\left(\frac{٥\pi}{٦}\right)$.　　ء) جا (٢٤٠°) .　　هـ) جا $\frac{\pi}{٦}$.

الحــل

أ) $\text{جتا}(-٣٠^\circ) = \text{جتا } ٣٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$.

ب) $\text{ظا}(-٣٣٠^\circ) = \text{ظا}(-٣٣٠^\circ + ٣٦٠^\circ) = \text{ظا } ٣٠^\circ = \frac{١}{\sqrt{٣}}$.

جـ) $\text{جا } \frac{٥\pi}{٦} = \text{جا}\left(\pi - \frac{\pi}{٦}\right) = \text{جا } \frac{\pi}{٦} = \text{جا } ٣٠^\circ = \frac{١}{٢}$.

ء) $\text{جا } ٢٤٠^\circ = \text{جا}(١٨٠^\circ + ٦٠^\circ) = -\text{جا } ٦٠^\circ = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.

هـ) $\text{جا } \frac{\pi}{٦} = \text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٣}\right) = \text{جتا } \frac{\pi}{٣} = \text{جتا } ٦٠^\circ = \frac{١}{٢}$.

مثال (٧ – ١٠)

إذا كان جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، فأوجد س علماً بأن : ٠° < س < ١٨٠° .

الحل

∵ ٠° < س < ١٨٠° ، جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ موجبة .

∴ الزاوية س لها قيمتان في الربع الأول والثاني .

في الربع الأول س = ٦٠° لأن جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

وفي الربع الثاني س = ١٨٠° – ٦٠° = ١٢٠° لأن جا ١٢٠° = جا (١٨٠° – ٦٠°) .

= جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.

تمارين ومسائل (٧ : ٤)

[١] أوجد النسب المثلثية للزوايا الآتية : –٦٠° ، ٢١٠° ، –٣π ، $\frac{٧\pi}{٣}$ ، ١٣٥° .

[٢] أوجد بدلالة القياس هـ النسب المثلثية التالية : علماً بأن هـ قياس زاوية حادة موجبة .

أ) ظتا (١٨٠° – هـ) . ب) ظتا (١٨٠° + هـ) .

جـ) قا (١٨٠° – هـ) . ء) قتا (١٨٠° – هـ) .

[٣] اختصر لأبسط صورة :

$$\frac{\text{جا}\,(١٨٠° - \text{هـ})}{\text{ظا}\,(١٨٠° + \text{هـ})} \times \frac{\text{ظتا}\,(٩٠° - \text{هـ})}{\text{ظا}\,(٩٠° + \text{هـ})} \times \frac{\text{جتا}\,(٣٦٠° - \text{هـ})}{\text{جا}\,(-\text{هـ})}$$

[٤] أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي : جا ١٥٠° ، جتا ($\frac{٢\pi}{٣}$) ، جا ٢٤٠° ، جتا ($\frac{٥\pi}{٤}$) ، قتا ١٣٥° .

[٥] اختصر ما يأتي إلى أبسط صورة : (قا^{٤} س – ظا^{٤} س) – ظا^{٢} س .

[٦] أثبت أن : جا^{٢} جـ قتا جـ + جتا^{٢} جـ قا جـ = جا جـ + جتا جـ .

[٧] أثبت أن : (جا أ + قتا أ)^{٢} + (جتا أ + قا أ)^{٢} = ظا^{٢} أ + ظتا^{٢} أ + ٧ .

[٨] برهن ما يلي :

أ) (قتا جـ – ظتا جـ)^{٢} = $\frac{١ - \text{جتا جـ}}{١ + \text{جتا جـ}}$.

ب) $\sqrt{\frac{١ + \text{جتا جـ}}{١ - \text{جتا جـ}}} = \frac{\text{ظا جـ}}{\text{قا جـ} - ١}$.

يمكن بواسطة الآلات الحاسبة إجراء العمليات الحسابية والحصول على قيم ونتائج نسب مثلثية الكثير من الجهد والوقت الذي ممكن أن يضيع عليك إذا استخدمت الجداول المثلثية . لاتنسى أن الآلات الحاسبة أنواع وكل نوع له طريقة خاصة في الاستعمال ، لكن يوجد مع كل آلة دليل الآلة (كتيب) يشرح طريقة استعمالها ، ومع ذلك هناك سمات مشتركة بين الآلات .

قبل استخدام الآلة نفسها : عليك أولاً أن تتعرف على بعض المفاتيح التي تمثل الرموز اللاتينية للنسب المثلثية في الالآت الحاسبة.

Sin مفتاح « جا » ، (Sin) اختصاراً لكلمة (Sine) التي تعني « جيب ».

Cos مفتاح « جتا » ، (Cos) اختصاراً لكلمة (Cosine) التي تعني « جيب تمام » .

tan مفتاح « ظا » ، (tan) اختصاراً لكلمة (tangent) التي تعني « ظل » .

وعند الضغط على أي من هذه المفاتيح الثلاثة بعد إدخال عدد نحصل على قيمة النسبة المثلثية المعنية .

O,,, يستخدم لإدخال أجزاء الدرجة (الدقيقة – الثانية)وللتحويل من دائري إلى ستيني وبالعكس .

Inv يستخدم لمعرفة قياس الزاوية التي عُلمتْ إحدى نسبها المثلثية وله وظائف أخرى .

I \ X مفتاح نظير أو مقلوب عدد ≠ صفر .

ab \ C d \ CI يستخدم للكسر ، والعدد الكسري .

فمثلاً : لإدخال ٤٥ً ١٥َ ٣٥ْ إلى الآلة الحاسبة نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي من اليسار إلى اليمين.

3 5 O,,, 1 5 O,,, 4 5 O,,,

فيظهر على الشاشة : 35 15 45

ولإظهار قياس الزاوية بالصورة المطلوبة نستخدم المفتاحين الآتين على التوالي : Inv O,,,

35 15 45

تدريب (٧–٨) أدخل إلى الحاسبة قياس كل من الزاويتين : أ) ٥٠َ ٤٠ْ . ب) ٣٥ً ١٥َ ٤٢ْ .

١ – إيجاد النسب المثلثية لزاوية قياسها معلوم :

نستخدم الحاسبة في إيجاد النسب المثلثية (جا ، جتا ، ظا) إذا علم قياس الزاوية .

ملاحظة : « عندما يكون قياس الزاوية بالدرجات وأجزائها نجعل الحاسبة على الوضع DEG .

مثال (٧ – ٢١) أوجد جا ٧٠ْ .

الحـــل

لإيجاد جا ٧٠ْ نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي : فيظهر على الشاشة 0,93969 Sin 0 7 ،

مثال (٧ – ٢٢) أوجد ما يأتي : أ) ظا ٢٢° ، ب) جا ٤٥,٥° .

جـ) قا ٣٠َ ٤٥° .

الحـــل

أ) لإيجاد ظا ٢٢° نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي : $\boxed{\text{tan}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$.

فيظهر على الشاشة : 0,4040

∴ ظا ٢٢° = ٠,٤٠٤٠

ب) لإيجاد جا ٤٥,٥° نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي :

$\boxed{\text{Sin}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{0}$ $\boxed{5}$ $\boxed{4}$

فيظهر على الشاشة : 0,7133 ∴ جا ٤٥,٥° = ٠,٧١٣٣

جـ) لإيجاد قا ٣٠َ ٤٥° نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي :

$\boxed{\text{I \textbackslash X}}$ $\boxed{\text{Cos}}$ $\boxed{0,,,}$ $\boxed{0}$ $\boxed{3}$ $\boxed{0,,,}$ $\boxed{5}$ $\boxed{4}$

فيظهر على الشاشة 1,4267 إذن قا ٣٠َ ٤٥° = ١,٤٢٧

مثال (٧ – ٢٣) إذا كان ٠° ≤ س° ≤ ٩٠° ، أوجد قيمة س فيما يأتي :

أ) ظا س = $\sqrt{٣}$ ب) جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جـ) قتا س = $\sqrt{٢}$.

الحـــل

أ) لإيجاد قيمة س نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي :

$\boxed{\text{tan}}$ $\boxed{\text{Inv}}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{3}$

فيظهر على الشاشة 60 إذن س = ٦٠° .

ب) لإيجاد قيمة س نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي :

$\boxed{\text{Cos}}$ $\boxed{\text{inv}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{3}$

فيظهر على الشاشة 30 إذن س = ٣٠° .

جـ) لإيجاد قيمة س نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي :

$\boxed{\text{Sin}}$ $\boxed{\text{Inv}}$ $\boxed{\text{I\textbackslash X}}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{2}$

فيظهر على الشاشة 45 إذن س = ٤٥° .

[١] باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كلٍّ من :

أ) جا ١٥° ٤٥َ .   ب) جتا ١٥° ٤٥َ .   جـ) ظا ١١٥° ٣٠َ ٥٠ً .

د) جا (−٢٢٥°) .   هـ) قتا ٣٢٫٥° .

[٢] أكمل الجدول (٧ − ٥) مستعيناً بالآلة الحاسبة :

س	جا س	جتا س	ظا س
صفر	صفر	......	......
١٣٠°	......	......	− ١٫١٩١٨
٢٥٠°	......	......	......
− ٧٠٠°	......	......	......

[٣] أوجد قيمة كل مقدار مما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة :

أ) جا ٤٠° + ٢ − ٣ جتا ٦٠° .   ب) ٣ جتا ٣٣٠° ظا ٢٤٠° + ٢جتا ١٣٥° ظا ٤٥° جا ٩٠° .

جـ) جا (− ٦٠°) ظا ٢١٠° + جا ٧٢٠° .

[٤] اكتب العملية ، ثم أوجد الناتج وفق استخدام مفاتيح آلة حاسبة على النحو التالي :

8 | 0 | 0,,, | 4 | 5 | 0,,, | tan

[٥] إذا كانت ٠° ≤ س ≤ ١٨٠° . أوجد قيمة س لكل مما يأتي :

أ) جا س = ٠٫٢٥٦٠ .   ب) قا س = − ٢٫٥٧١٩ .

جـ) ظتا س = ٠٫٤١٤٢ .

٧ : ٦ حل المثلث القائم

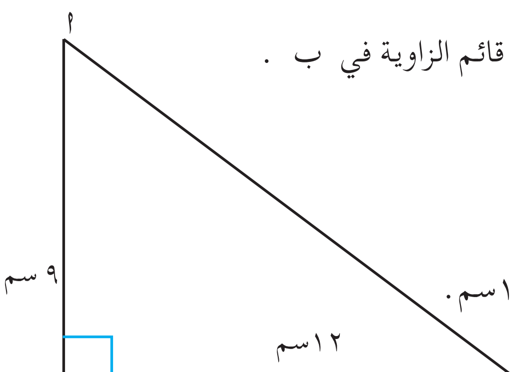
تعرفت سابقاً على العلاقات العددية في مثلث قائم الزاوية ، كما تعرفت على مبرهنة فيثاغورث « مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين » .

تدريب (٧−٩) في [الشكل (٧−٣٤)] المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب .

| أ ب | = ٩سم ،

| ب جـ | = ١٢سم ، أوجد | أ جـ | .

لاشك أنك حصلت على أن | أ جـ | = ١٥سم .

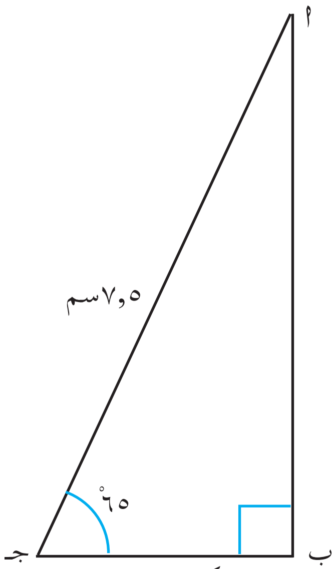


وفي هذا البند ندرس حل المثلث القائم الزاوية ، ونعني بحل المثلث تعيين عناصره الستة (٣ أضلاع ، ٣ زوايا، وتعطى عادة ثلاثة عناصر أحدها على الأقل طول ضلع ، ويلزم تعيين العناصر الثلاثة الأخرى .

وسنأخذ في هذا البند حالتين .

أولاً – حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طول ضلع وقياس زاوية .

مثال (٧ – ٢٤) حل المثلث ا ب جـ القائم الزاوية في ب ، والذي فيه ق (∢ جـ) = ٦٥° ، | ا جـ | = ٧,٥سم .



شكل (٧ – ٣٥)

الحل

∵ ق (∢ جـ) = ٦٥° .

∴ ق (∢ ا) = ٩٠° – ٦٥° = ٢٥° .

$\frac{|ا ب|}{|ا جـ|}$ = جا جـ . ، | ا جـ | = ٧,٥ سم .

∴ $\frac{|ا ب|}{٧,٥}$ = جا ٦٥° .

ومنه | ا ب | = ٧,٥ جا ٦٥° (باستخدام الآلة الحاسبة ، والتقريب لأربعة أرقام عشرية) .

= ٧,٥ × ٠,٩٠٦٣ .

≈ ٦,٨ سم .

$\frac{|ب جـ|}{|ا جـ|}$ = جتا جـ . $\frac{|ب جـ|}{٧,٥}$ = جتا ٦٥° .

∴ | ب جـ | = ٧,٥ جتا ٦٥° = ٧,٥ × ٠,٤٢٢٦ ≈ ٣,٢ سم .

ثانياً – حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طولا ضلعين :

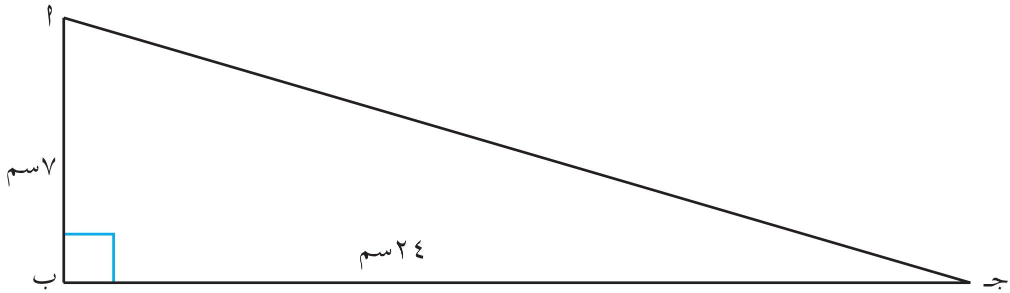
مثال (٧ – ٢٥) المثلث ا ب جـ القائم الزاوية في ب إذا كان | ا ب | = ٧سم ، | ب جـ | = ٢٤سم .

فأوجد :

| ا جـ | ، ق (∢ ا) ، ق (∢ جـ) .

الحــل

لاحظ [الشكل (٧ – ٣٦)] : $|أجـ|^٢ = |أب|^٢ + |ب جـ|^٢$ ... (مبرهنة فيثاغورث) .



شكل (٧ – ٣٦)

$|أجـ|^٢ = (٧)^٢ + (٢٤)^٢$.

$= ٤٩ + ٥٧٦ = ٦٢٥$.

$\therefore |أجـ| = \sqrt{٦٢٥} = ٢٥$سم والآن نجد قياسات الزوايا

$\because$ جا جـ $= \frac{|أب|}{|أجـ|} = \frac{٧}{٢٥} = ٠,٢٨٠٠$.

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ جـ) $= ١٦ ١٦َ$ ْ (باستخدام الآلة الحاسبة والتقريب إلى الدقائق) .

$\because$ مجموع زوايا المثلث = ١٨٠ ْ ، ق ($\measuredangle$ ب) = ٩٠ ْ

، ق ($\measuredangle$ جـ) = ١٦ ١٦َ ْ .

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ أ) = ٩٠ ْ – ١٦ ١٦َ ْ = ٧٣ ٤٤َ ْ .

تمارين ومسائل (٧ : ٦)

(استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد نواتج العمليات لأربعة أرقام عشرية) .

[١] حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب في كل من الحالات الآتية :

أ) $|أجـ|$ = ٧٠سم ، ق ($\measuredangle$ جـ) = ٥٠ ْ .

ب) $|أجـ|$ = ٥٠سم ، ق ($\measuredangle$ جـ) = ٣٥ ْ .

جـ) $|أجـ|$ = ١٢سم ، ق ($\measuredangle$ جـ) = ٤٧ ٣٦َ ْ .

ا) |ع ص| = ٨٠سم ، ق (∢ ع) = ٦٢° .

ب) |ع ص| = ٤٣,٥ سم ، ق (∢ ع) = ٧٠° .

[٣] حل المثلث ا ب جـ القائم الزاوية في جـ في كل من الحالات الآتية :

ا) |ا جـ| = ١٠سم ، |ا ب| = ٢٠سم .

ب) |ا جـ| = ١٢,٥سم ، |ا ب| = ١٨سم .

جـ) |ا ب| = ٨سم ، جا ب = ٠,٧٨٨٠ .

ء) |ب جـ| = ٩سم ، جتا ب = ٠,٢٢٥٠ .

هـ) |ا جـ| = ٢ |ب جـ| ، |ا ب| = ٨٠ .

[٤] ك ل م مثلث قائم الزاوية في ل فيه |ك ل| = ٢٤,٣٧ متراً ، |ك م| = ٦٢,٩٩ متراً . أوجد كلاً من |ل م| ، ق (∢ م) ، ق (∢ ك) .

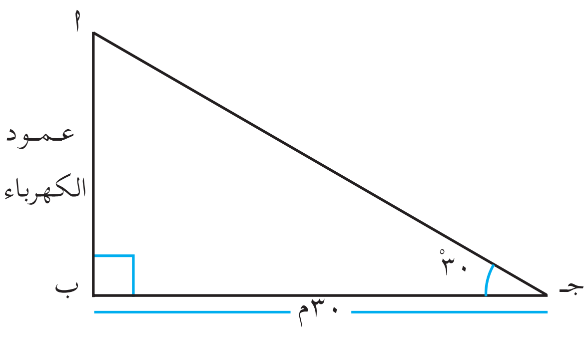
٧ : ٧ تطبيقات على حل المثلث القائم

هناك تطبيقات كثيرة لحل المثلث القائم الزاوية في كثير من المواقف الحياتية منها : حساب مسافات وارتفاعات وانخفضات يصعب إيجادها بالقياس العملي المباشر ، وفيما يلي بعض الأمثلة لذلك :

مثال (٧ – ٢٦) شاهد شخص عمود كهرباء من نقطة على سطح الأرض تبعد عن قاعدته ٣٠ متراً ، فكانت زاوية ارتفاع عمود الكهرباء ٣٠° . أوجد ارتفاع العمود عن سطح الأرض .

الحـــل

لاحظ [الشكل (٧–٣٧)] حيث ا ب يمثل ارتفاع عمود الكهرباء ، ق (∢ جـ) = ٣٠° (هي زاوية الارتفاع) ، |ب جـ| = ٣٠ م



شكل (٧ – ٣٧)

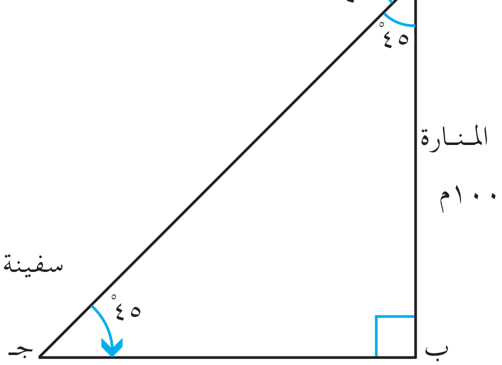
لإيجاد |ا ب| نستخدم العلاقة :

$$\frac{|ا ب|}{|ب جـ|} = ظا (∢ جـ) ،$$

$$∵ \frac{|ا ب|}{٣٠} = ظا ٣٠° .$$

$$∴ |ا ب| = ٣٠ ظا ٣٠° = \frac{٣٠}{\sqrt{٣}} م .$$

مثال (٧ – ٢٧) شخص ينظر إلى سفينة في البحر من خلال منارة ارتفاعها ١٠٠ متر عن سطح البحر ، وجد أن قياس زاوية الانخفاض للسفينة في البحر هي ٤٥° ، فما بعد السفينة عن قاعدة المنارة لأقرب متر .



شكل (٧ – ٣٨)

الحل

لاحظ [الشكل (٧–٣٨)] ا ب يمثل المنارة ، ∢ ج ا ء زاوية الانخفاض .

∴ ق (∢ ب ا ج) = ٤٥° ، ومنه |ب ج| / |ا ب| = ظا (∢ ب ا ج) .

∴ |ب ج| / |ا ب| = ظا ٤٥ . ، |ا ب| = ١٠٠م

∴ |ب ج| = ١٠٠ × ظا ٤٥° = ١٠٠ × ١ . ∴ |ب ج| = ١٠٠ م .

تمارين ومسائل (٧ : ٧)

[١] من نقطة على سطح الأرض على بعد ٦٠ متراً من قاعدة برج وجد أن زاوية ارتفاع قمته ٣٠° . أوجد ارتفاع البرج .

[٢] سلّم يرتكز على حائط رأسي ،، فإذا كان طول السلم ٢٠ قدما ويبعد موقعه عن الحائط ١٠ أقدام . أوجد زاوية ميل السلم عن الأرض ، ثم أوجد نقطة ارتكازه على الجدار . (نقطة ارتفاعه عن الأرض) .

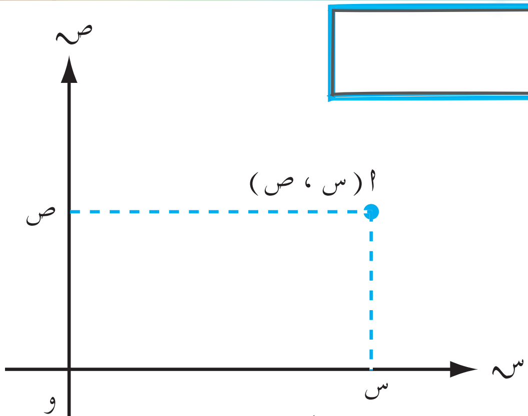
[٣] قيست زاوية انخفاض قارب في البحر من أعلى فنار ارتفاعه عن سطح البحر ٦٠ متراً فوجدت ٢١° ٢٥َ . فما بُعد القارب عن موقع الفنار مقرباً لأقرب متر .

[٤] من نقطة تبعد ١٥٠ متراً عن قاعدة سارية علم وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة السارية ١٠° ٢٥َ . فما ارتفاع السارية لأقرب متر ؟

[٥] من نقطة على سطح الأرض وجد رجل أن زاوية ارتفاع قمة جبل هي ٣٢° ٢١َ ، ولما سار نحو الجبل مسافة ٨٠٠ متراً وجد أن زاوية ارتفاع قمة الجبل ٥٠° . أوجد ارتفاع قمة الجبل عن سطح الأرض .

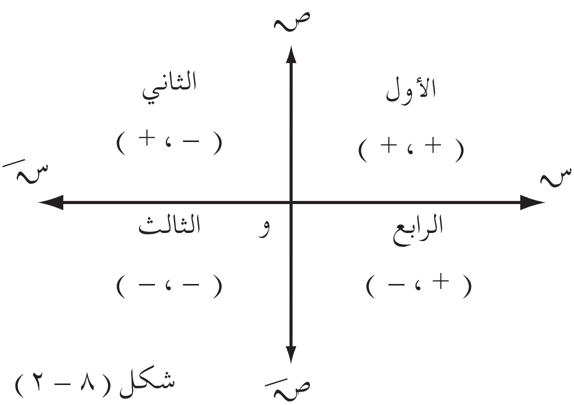
[٦] من نقطة على سطح عمارة ترتفع ١٥م عن سطح الأرض وجد شخص أن زاوية ارتفاع قمة عمارة أخرى تقابله ٣٠° ، وأن زاوية انخفاض قاعدة تلك العمارة ٢٥° . أوجد ارتفاع العمارة المقابلة للشخص والمسافة بين

٨ : ١ مــــراجـــعــــة



شكل (٨ – ١)

تعرفت في المرحلة الأساسية أن كل نقطة على خط الأعداد تمثل عدداً حقيقياً ، كما أن كل عدد حقيقي يمكن أن يمثل بنقطة على خط الأعداد . كذلك كل نقطة في المستوى الديكارتي يمكن تمثيلها بزوج مرتب من الأعداد . مثل النقطة أ (س ، ص) كما في شكل (٨ – ١)
حيث س الأحداثي السيني للنقطة أ ،
ص الأحداثي الصادي للنقطة أ .

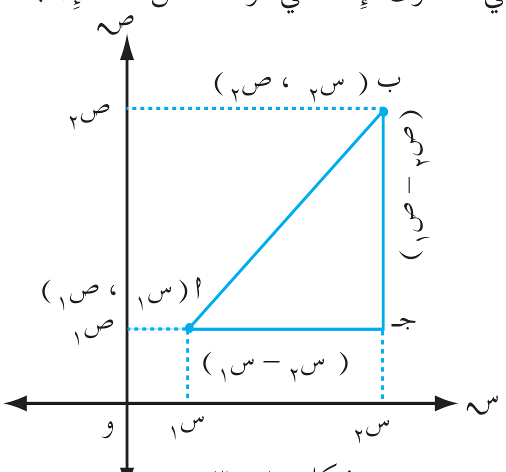


شكل (٨ – ٢)

ومحورا الإحداثيات يقسما المستوى إلى أربعة أجزاء يطلق عليها الأرباع موضحة كما في [الشكل (٨ – ٢)]. في الربع الأول الإحداثي السيني والإحداثي الصادي كلاهما موجب ،في الربع الثاني الإحداثي السيني سالب والإحداثي الصادي موجب، في الربع الثالث الإحداثي السيني والإحداثي الصادي كلاهما سالب ، وفي الربع الرابع الإحداثي السيني موجب والإحداثي الصادي سالب .

تدريب (٨–١) حدد في أي ربع تقع كل من النقاط التالية : (١ ، ٢) ، (–٣ ، ١) ، ($-\frac{٣}{٢}$ ، –٢) ، (٣ ، –١) ، ثم أرسمها في المستوى الإحداثي، وتأكد من صحة إجابتك.

المسافة بين نقطتين :



لتكن لدينا النقطتان أ (س$_١$ ، ص$_١$) ، ب(س$_٢$ ، ص$_٢$)انظر [الشكل (٨–٣)]يمكن إيجاد المسافة بينهما باستخدام مبرهنة فيثاغورث .

$$|\text{أب}|^٢ = |\text{أجـ}|^٢ + |\text{جـ ب}|^٢$$

$$= (\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢$$

ومنه $|\text{أب}| = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$.

ملاحظة: منتصف أب هي النقطة (——— ، ———) .

مثال (٨ – ١)

أوجد البعد بين النقطتين أ (–١ ، ٣) ، ب(٢ ، ٧) ، وإحداثي منتصف القطعة الواصلة بينهما .

الحـــل

| أب | = √((٢ – (–١))^٢ + (٧ – ٣)^٢) = √(٩ + ١٦) = √٢٥ = ٥ وحدة طول

منتصف أب هي النقطة ((–١ + ٢) / ٢ ، (٣ + ٧) / ٢) = (١ / ٢ ، ٥) .

تمارين ومسائل (٨ : ١)

[١] أوجد البعد بين كل زوج من أزواج النقاط التالية ، ثم أوجد إحداثي نقطة المنتصف :

أ) (٤ ، ١) ، (–٢ ، ٩) ، ب) (٦ ، ٣) ، (١ ، ٥) ،

جـ) (٤ ، ٠) ، (٧ ، ٠) ، ء) (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٦) ،

هـ) (–٣ ، –٢) ، (٤ ، –٢) ، و) (–٣ ، –٤) ، (٣ ، ٤) .

[٢] لتكن أ(٤ ، –٦) ، ب (–٥ ، ٣) . أوجد إحداثي النقطة جـ التي تنصف القطعة أب ، ثم احسب | أجـ | ، | جـ ب | وقارن بينهما .

[٣] أثبت أن النقاط أ(–١ ، ١) ، ب (١ ، –٣) ، جـ(٧ ، ٥) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية .

[٤] أثبت أن (١ ، –٤) ، (٣ ، ١) ، (–٢ ، ٣) ، (–٤ ، –٢) هي رؤوس مربع .

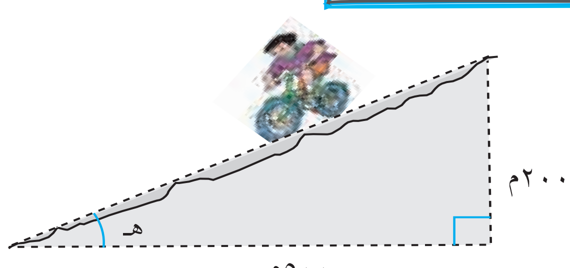
[٥] أوجد الجزء المقطوع من محور السينات ، ومن محور الصادات للحالات التالية :

أ) ص = س – ١ ، ب) ص + ٢ س – ٣ = ٠ ،

جـ) ص – ٢ س = ٦ ، ء) س – ٣ ص + ٦ = ٠ .

٨ : ٢ ميـــل المستقيـــم

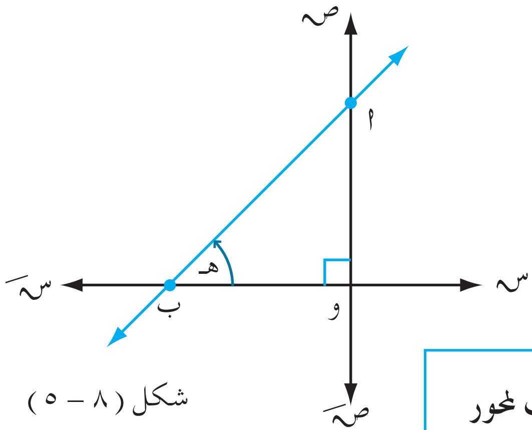
إذا كنـت طالعـاً جبلاً ما ماشيـاً ، أو راكبـاً دراجـة ، فإن حركتك تقـل تدريجياً ؛ وكلما كان الجبـل أكثـر انحـداراً ، كلما كانـت عملية الصعود بطيئة . إن قيـاس انحدار الجبل أو ميله هو عبارة عن نسبـة المسافة العموديـة على المسافـة الأفقية ، وبالرجوع إلى [الشكل (٨ – ٤)] نجد أن :



شكل (٨ – ٤)

لنفرض أن هـ هي الزاوية الموجبة (الاتجاه المضاد لحركة عقارب الساعة) المحصورة بين المستقيم أ ب والاتجاه الموجب لمحور السينات [شكل (٨ – ٥)]

فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\frac{|\text{أ و}|}{|\text{ب و}|}$ = ظا هـ .



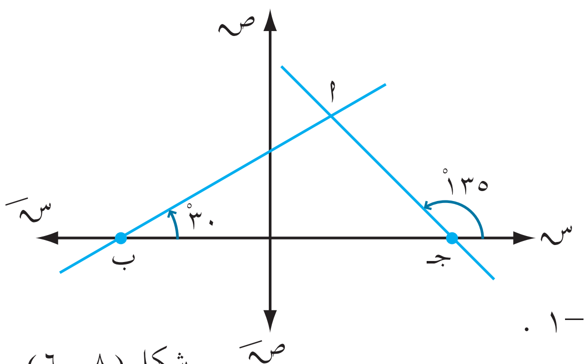
شكل (٨ – ٥)

تعريف (٨ : ١)

ميل المستقيم : هو ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ويرمز له بالرمز م أي أن م = ظا هـ . ، «هـ قياس زاوية الميل» .

إذا كانت زاوية الميل حادة فإن الميل يكون موجباً ، وإذا كانت منفرجة فإن الميل يكون سالباً .

مثال (٨ – ٢) أوجد ميل كل من المستقيمين أ ب ، أ جـ في [الشكل (٨–٦)]



شكل (٨ – ٦)

الحل

ليكن $م_١$ ، $م_٢$ ميلي $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ على التوالي .

∴ $م_١$ = ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ،

$م_٢$ = ظا ١٣٥° = ظا (١٨٠° – ٤٥°) = – ظا ٤٥° = –١ .

المستقيمات المتوازية :

أنظر [الشكل (٨–٧)] ليكن : ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $م_١$ = ظا $هـ_١$

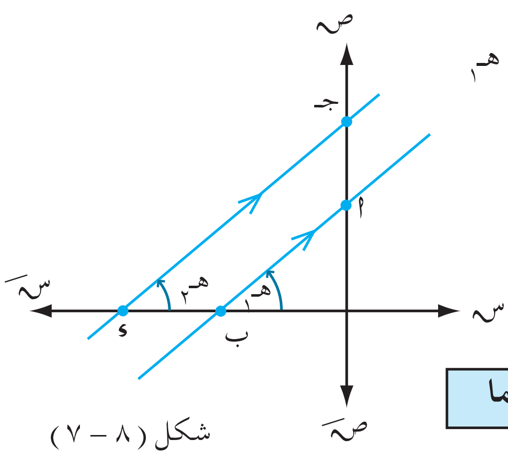
ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ = $م_٢$ = ظا $هـ_٢$

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

∴ $هـ_١$ = $هـ_٢$ (متناظرتان)

∴ ظا $هـ_١$ = ظا $هـ_٢$

∴ $م_١$ = $م_٢$ ، وعليه فإنه :



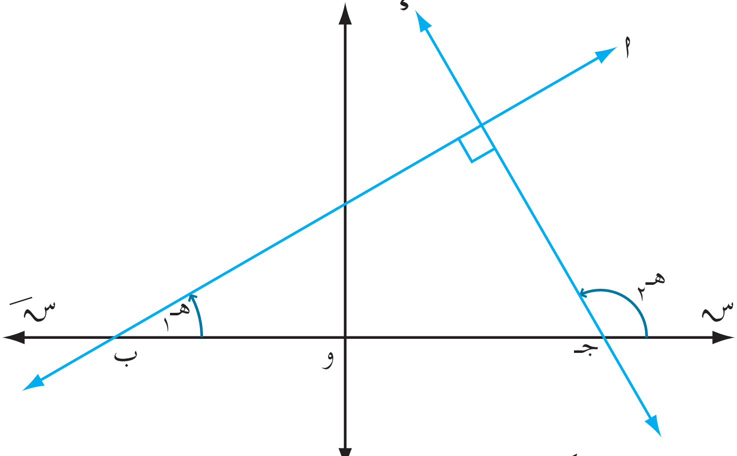
شكل (٨ – ٧)

يتوازى مستقيمان إذا وفقط إذا تساوى ميلاهما

رمزياً : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ⟺ م ($\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$) = م ($\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$) .

ملاحظات :

المستقيمات المتعامدة :



شكل (٨ – ٨)

انظر [الشكل (٨ – ٨)] : ليكن

ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = م١ = ظا هـ١

ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ = م٢ = ظا هـ٢

∵ ق (∠ هـ٢) = ٩٠° + ق (∠ هـ١)

∴ ظا هـ٢ = ظا (٩٠° + هـ١)

$= -$ ظتا هـ١ $= -\dfrac{١}{\text{ظا هـ}_1}$.

∴ ظا هـ١ • ظا هـ٢ = −١

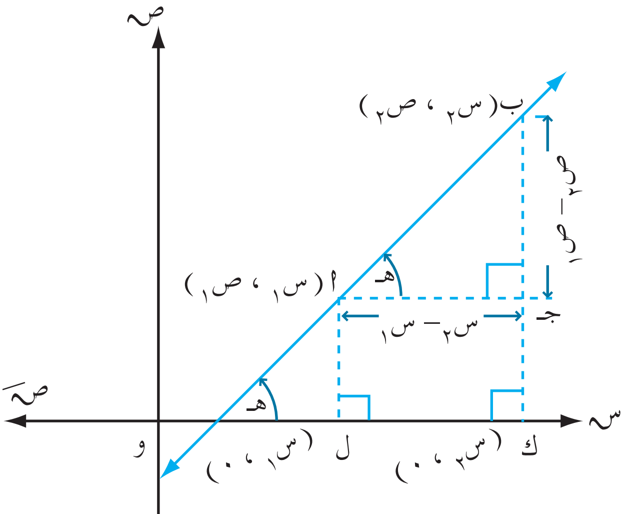
وعليه فإنه :

يتعامد مستقيمان إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي −١

ونعبر عن ذلك رمزياً : $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \Longleftrightarrow$ م($\overleftrightarrow{\text{أب}}$) • م($\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$) = −١

ملاحظة: عندما تكون هـ = ٩٠° ، فإن ظا هـ غير معرف ، وعليه فإن ميل المحور الصادي ، وأي مستقيم موازٍ له غير معرف .

ميل المستقيم بمعلومية نقطتين عليه :



شكل (٨ – ٩)

انظر [الشكل (٨ – ٩)] : ليكن :

أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) نقطتان واقعتان على المستقيم أ ب الذي زاوية ميله هـ .

أسقط $\overleftrightarrow{\text{أل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بك}}$ عموديين على المحور السيني ، و $\overleftrightarrow{\text{أجـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{بك}}$.

∴ ظا هـ $= \dfrac{|\text{ب جـ}|}{|\text{أ جـ}|} = \dfrac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$ ؛

حيث س٢ – س١ ≠ ٠

∵ الميل = ظا هـ $= \dfrac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$ ؛ حيث س٢ – س١ ≠ ٠

أي أن :

ميل مستقيم يمر بنقطتين $= \dfrac{\text{فرق الاحداثيين الصاديين}}{\text{فرق الاحداثيين السينيين}}$.

مثال (٨ – ٣)

لتكن أ (٠ ، ٢) ، ب (٣ ، ٠) ، جـ (٢ ، –٣) ، ء (–١ ، –١) ، هـ (٢ ، $\frac{٧}{٢}$) .

أوجد ميل كل من المستقيمات أ ب ، جـ ء ، ء هـ ، وما العلاقة بينهما .

الحـل

ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $م_١$ = $\dfrac{\text{الإحداثي الصادي لـ ب − الإحداثي الصادي لـ أ}}{\text{الإحداثي السيني لـ ب − الإحداثي السيني لـ أ}}$ = $\dfrac{\text{صفر} - ٢}{٣ - \text{صفر}}$ = $-\dfrac{٢}{٣}$.

وبالمثل :

ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ = $م_٢$ = $\dfrac{-١ - (-٣)}{-١ - ٢}$ = $-\dfrac{٢}{٣}$.

ميل $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ = $م_٣$ = $\dfrac{\frac{٧}{٢} - (-١)}{٢ - (-١)}$ = $\dfrac{٩}{٦}$ = $\dfrac{٣}{٢}$.

نلاحظ أن : $م_١$ = $م_٢$ = $-\dfrac{٢}{٣}$ ، ∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

أيضاً : $م_١ \bullet م_٣$ = $م_٢ \bullet م_٣$ = $-\dfrac{٢}{٣} \times \dfrac{٣}{٢} = -١$

∴ $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، وكذلك $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

تمارين ومسائل (٨ : ٢)

[١] أوجد ميل المستقيم الواصل بين كل زوج من أزواج النقاط التالية :

أ) (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ؛ ب) (−٢ ، ٤) ، (−٥ ، ٨) ؛

جـ) (−٥ ، −٣) ، (٤ ، ٣) ؛ د) (س ، ص) ، (ع ، س) ؛

هـ) (س ص^٢ ، ٢ س ص) ، (س ع^٢ ، ٢ س ع) .

[٢] لتكن أ(٤ ، −٣) ، ب (٦ ، ٥) ، جـ(٥ ، ١) . أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، ومن ثم أثبت أن النقاط المذكورة تقع على إستقامة واحدة .

[٣] أثبت أن النقاط (٦ ، ٣) ، (−٣ ، ٠) ، (١٢ ، ٥) تقع على استقامة واحدة .

[٤] أوجد قيمة ص التي تجعل النقطة (٣ ، ص) تقع على المستقيم الواصل بين النقطتين (−٢ ، −١) ، (١ ، ٣) .

[٥] أثبت أن المستقيم الواصل بين النقطتين (٠ ، ٠) ، (٤ ، ١١) عمودياً على المستقيم الواصل بين النقطتين(٨ ، ٢) ، (−٣ ، ٦) .

[٦] أثبت أن النقاط التالية هي رؤوس متوازي أضلاع ، ثم بين أيًّا منهما مستطيلاً :

أ) (−٢ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (−١ ، ٠) .

ب) (٥ ، −٤) ، (−١١ ، ١٦) ، (−١ ، ٤) ، (−٥ ، ٨) .

[٧] أثبت أن (١ ، −٤) ، (٣ ، ١) ، (−٢ ، ٣) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية .

[٨] أوجد قيمة س بحيث تكون النقاط (−٤ ، −٢) ، (٢ ، ٥) ، (س ، −١) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية عند (٢ ، ٥) .

[٩] النقطة أ (−١ ، ٠) ، ب (٧ ، −١) ، جـ (٤ ، ١) هي رؤوس مثلث . أثبت أن المستقيم الواصل بين منتصفي أي ضلعين يوازي الضلع الثالث .

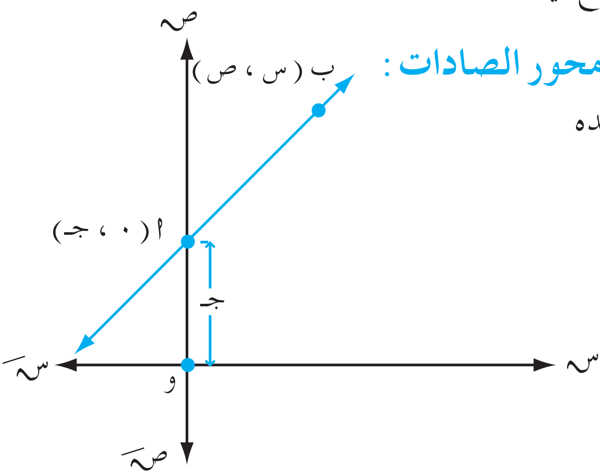
٨ : ٣ معادلة المستقيم

تعرف أن المعادلة أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ هي معادلة من الدرجة الأولى في متغيرين ، ويمثلها بيانياً في المستوى الإحداثي خطاً مستقيماً يمر بالنقطتين :

$\left(-\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} ، ٠\right)$ ، $\left(٠ ، -\frac{\text{جـ}}{\text{ب}}\right)$ الواقعتين على محوري السينات والصادات على التوالي ، ويقدر ميله بالعدد $-\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ أي أن : $\text{م} = -\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = -\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$.

تسمى هذه المعادلة بالمعادلة العامة للمستقيم ، وهناك صور أخرى لكتابة معادلة المستقيم ولكن قد تكون إحداها أكثر ملاءمة من الأخرى وفقاً للاستخدام الذي ستوضع فيه المعادلة .

أولا : معادلة مستقيم بمعلومية ميله وما يقطعه من محور الصادات :



شكل (٨ − ١٠)

ليكن أ ب مستقيماً ميله م ، ويقطع جـ وحده من محـور الصـادات [شكل (٨−١٠)] .

فإن (٠ ، جـ) هـي إحـداثـي النقطـة أ .

أفـرض أن (س ، ص) إحـداثـي النقطـة ب .

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = م = $\frac{\text{ص} - \text{جـ}}{\text{س} - ٠}$

ومنه م (س − ٠) = ص − جـ

أو ص = م س + جـ

وعليه فإن معادلة المستقيم أ ب بمعلومية ميله م ، وما يقطعه من محور الصادات (جـ وحده) هي :

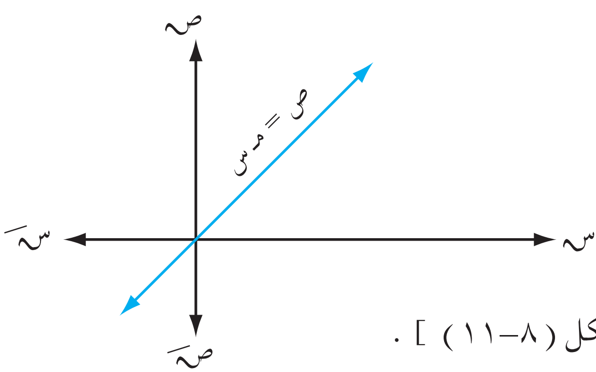
$$\boxed{\text{ص} = \text{م س} + \text{جـ} \quad \text{———} \ (١)}$$

حالات خاصة :

١ − عندما جـ = ٠ ، فإن المعادلة(١)تأخذ الصورة

$$\boxed{\text{ص} = \text{م س} \ .}$$

وهي معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله م [شكل (٨−١١)] .

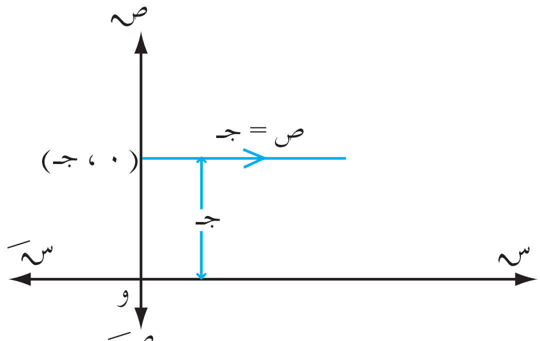


شكل (٨ − ١١)

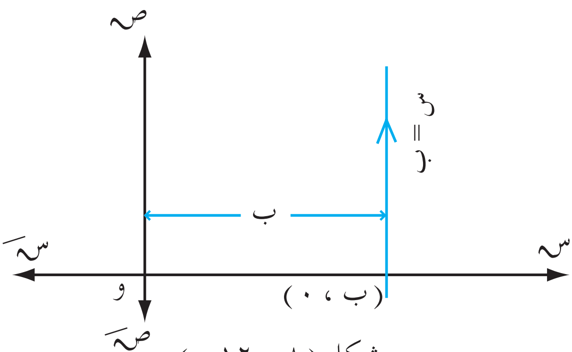
٢ – عندما م = ٠ ، فإن المعادلة (١) تأخذ الصورة $\boxed{\text{ص = جـ .}}$

وهي معادلة مستقيم يوازي محور السينات ويبعد عنه جـ وحده [شكل (٨ – ١٢ أ)] . أما معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات وعلى بعد ب وحده منه [الشكل (٨ – ١٢ب)] فهي :

$\boxed{\text{س = ب .}}$



شكل (٨ – ١٢ أ)



شكل (٨ – ١٢ب)

٣ – عندما م = ٠ ، جـ = ٠ ، فإن المعادلة (١) تأخذ الصورة : ص = ٠ ، وهي معادلة محور السينات.
أما معادلة محور الصادات فهي س = صفر .

مثال (٨ – ٤) أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيمات التالية :

أ) ص = ٤ س – ٣ ، ب) ٢ ص + ٣ س – ٤ = ٠ .

الحـــل

أ) المستقيم ص = ٤ س – ٣ ، ميله ٤ ، ويقطع ٣ وحدات من محور الصادات السالب ، أي يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، –٣) .

ب) المستقيم ٢ ص + ٣ س – ٤ = ٠ يمكن كتابة معادلته على الصورة : ص = – $\frac{٣}{٢}$ س + ٢ .

وعليه فإن ميله – $\frac{٣}{٢}$ ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٢) .

مثال (٨ – ٥) ما العلاقة بين كل زوج من أزواج المستقيمات التالية :

أ) ص = ٣ س – ٤ ، ب) ص = ٣ س – ٢
ص = ٣ س + ٥ ، ص = – $\frac{١}{٣}$ س + ٥ .

الحـــل

أ) المستقيمان ص = ٣ س – ٤ ، ص = ٣ س + ٥
∵ م = ٣ ، م = ٣ ∴ المستقيمان متوازيان .

$م_١ \times م_٢ = ٣ \times - \frac{١}{٣} = -١$.

مثال (٨ − ٦) أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع ٥ وحدات من محور الصادات الموجب وموازٍ للمستقيم :

٤ س − ٦ ص = ٩ .

الحل

ليكن ل هو المستقيم المطلوب إيجاد معادلته . نكتب معادلة المستقيم : ٤ س − ٦ ص = ٩ بالصورة :

ص = $\frac{٢}{٣}$ س − $\frac{٣}{٢}$ فيكون ميل المستقيم ل = $\frac{٢}{٣}$ ،ومعادلته هي ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٥ .

∴ ٣ ص = ٢ س + ١٥ أو ٢ س − ٣ ص + ١٥ = ٠ .

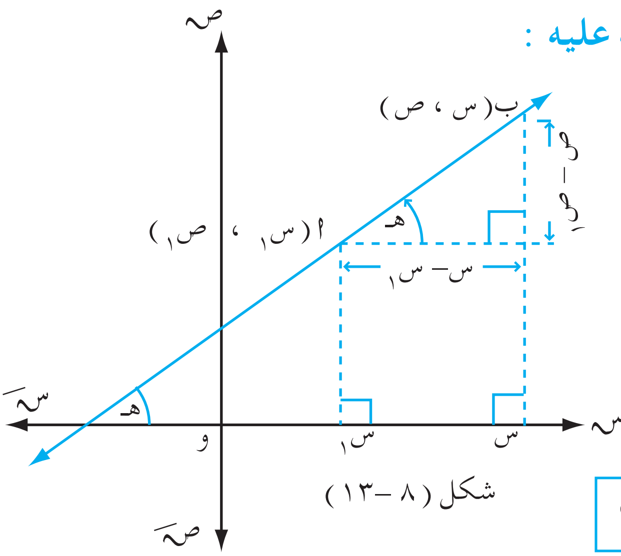
ثانياً : معادلة المستقيم بمعلومية ميله ونقطة واقعة عليه :

المستقيم أ ب يمر بالنقطة ($س_١$، $ص_١$) ، وميله هـ [شكل (٨–١٣)]. (س ، ص) نقطة واقعة عليه . إذن ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ بمعلومية نقطتين واقعتين

عليه : هـ = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$.

∴ ص − $ص_١$ = هـ(س − $س_١$) ، وعليه فإن معادلة المستقيم الذي ميله هـ ، ويمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) هي :

$$\boxed{ص - ص_١ = هـ (س - س_١)}$$



شكل (٨–١٣)

مثال (٨ − ٧) أوجد معادلة المستقيم الذي ميله ٣ ، ويمر بالنقطة (١ ، ٢) .

الحل

معادلة المستقيم الذي ميله هـ ، ويمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) هي : ص − $ص_١$ = هـ(س − $س_١$) .

من المعطيات فإن هـ = ٣ ، $س_١$ = ١ ، $ص_١$ = ٢ ،

وبالتعويض في المعادلة نحصل على : ص − ٢ = ٣ (س − ١) = ٣ س − ٣ .

∴ ٣ س − ص − ١ = ٠ هي المعادلة المطلوبة .

مثال (٨ − ٨) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٤ ، ٠) ، وموازٍ للمستقيم

٣ ص − ٦س = ٧ .

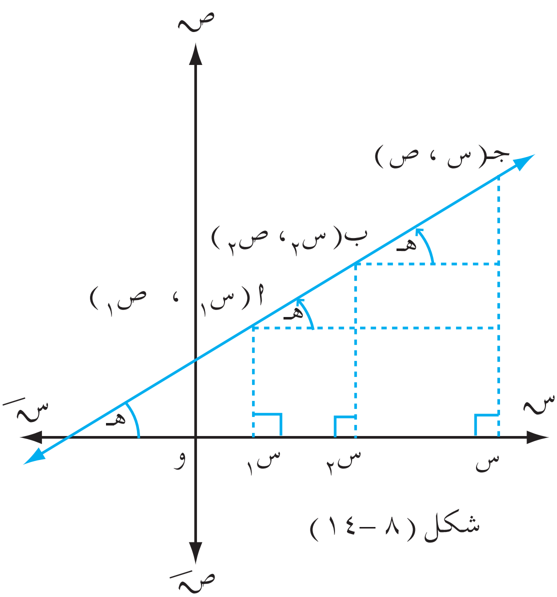
الحـــل

يمكن كتابــة المعادلة ٣ ص – ٦ س = ٧ بالصورة ص = ٢ س + $\frac{٧}{٣}$.

∵ المستقيمان متوازيان ، يكون ميل المستقيم الذي يمر بالنقطة (٤ ، ٠) يساوي ٢ ، وتكون معادلته :

ص – ٠ = ٢ (س – ٤) ∴ ص = ٢ س – ٨ .

ثالثاً : معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين واقعتين عليه :



شكل (٨ – ١٤)

ليكن أ ب مستقيماً يمر بالنقطتين أ (س_1 ، ص_1) ، ب (س_2 ، ص_2) [شـكل (٨ – ١٤)] .

لنأخـذ النقطة جـ (س ، ص) الواقعـة عليـه :

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ بمعلومية أ ، جـ = $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1}$.

وميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ بمعلومية النقطتين أ ، ب = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

وعليه فإن : $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

أي أن معادلة المستقيم بمعلومية النقطتين (س_1 ، ص_1) ، (س_2 ، ص_2) الواقعتين عليه هي :

$$\boxed{\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}}$$

مثال (٨ – ٩) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (–٣ ، ٥) .

الحـــل

معادلة المستقيم المار بالنقطتين (س_1 ، ص_1) ، (س_2 ، ص_2) هي : $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

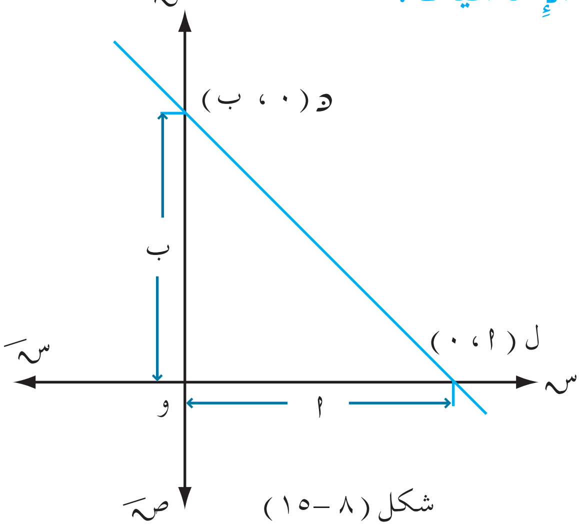
من المعطيات فإن : س_1 = ١ ، ص_1 = ٢ ، س_2 = –٣ ، ص_2 = ٥ ، وبالتعويض في المعادلة نجد :

$$\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ١} = \frac{٥ - ٢}{-٣ - ١} = \frac{٣}{-٤}$$

⇐ –٤ (ص – ٢) = ٣ (س – ١) ⇐ –٤ ص + ٨ = ٣ س – ٣

∴ ٣ س + ٤ ص – ١١ = ٠ هي المعادلة المطلوبة .

رابعاً : معادلة المستقيم بمعلومية ما يقطعه من محوري الإحداثيات :



شكل (٨ – ١٥)

ليكن ل د مستقيماً يقطع أ وحدة من محور السينات ، ويقطع ب وحدة من محور الصادات [شكل (٨ – ١٥)] .

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل د}}$ يمر بالنقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ب)

واستناداً إلى معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين نجد أن :

$$\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - \text{أ}} = \frac{\text{ب} - ٠}{٠ - \text{أ}}$$

∴ – أ ص = ب س – أ ب .

∴ ب س + أ ص = أ ب

وبالقسمة على أ ب نحصل على

$$\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١$$

وعليه فإن معادلة المستقيم الذي يقطع من محور السينات أ وحدة ، ومن محور الصادات ب وحدة هي :

$$\boxed{\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١}$$

مثال (٨ – ١٠) أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع وحدتين من المحور السيني الموجب وثلاث وحدات من المحور الصادي السالب .

الحــل

صورة المعادلة المطلوبة $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١$. من المعطيات فإن : أ = ٢ ، ب = –٣ .

∴ $\frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{-٣} = ١$ (وبضرب طرفي المعادلة في ٦) .

٣ س – ٢ ص = ٦ وهي المعادلة المطلوبة .

مثال (٨ – ١١) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢ ، ٥) ، ويقطع من محور السينات ضعف ما يقطعه من محور الصادات .

الحــل

نفرض أن ما يقطعه من محور الصادات = أ وحدة .

إذن ما يقطعه من محور السينات = ٢ أ وحدة .

وعليه فإن معادلة المستقيم تأخذ الصورة : $\frac{\text{س}}{٢\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{أ}} = ١$ (١)

النقطة (٢ ، ٥) واقعة على المستقيم فهي تحقق المعادلة (١) .

∴ $\frac{٢}{٢\,أ} + \frac{٥}{أ} = ١$ (بضرب الطرفين في أ) .

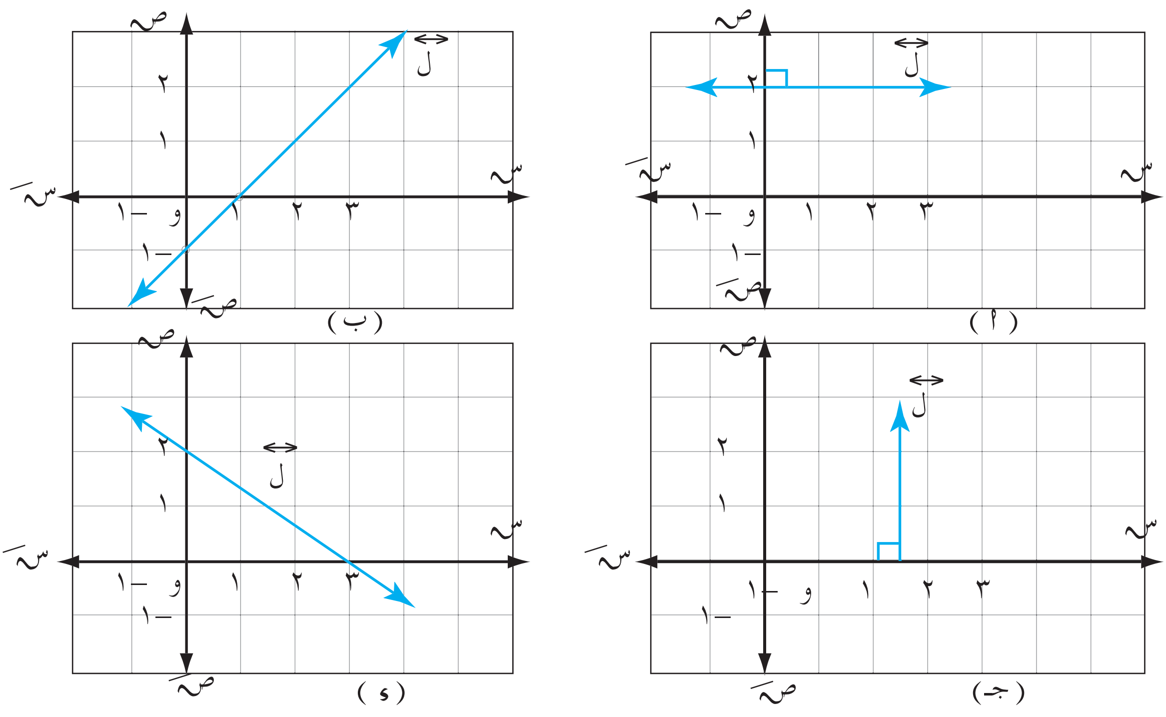
∴ $١ + ٥ = أ$ ، ومنه $أ = ٦$ ، وبالتعويض عن $أ = ٦$ في المعادلة (١) نحصل على :

$\frac{س}{١٢} + \frac{ص}{٦} = ١$ (بضرب الطرفين في ١٢) .

∴ $س + ٢\,ص - ١٢ = ٠$ هي المعادلة المطلوبة .

تمارين ومسائل (٨ : ٣)

[١] في كل من الأشكال التالية ، أوجد الميل والجزء المقطوع من المحور الصادي لكل مستقيم ل ، ثم أوجد معادلته :



شكل (٨ – ١٦)

[٢] أوجد معادلة المستقيم الذي يحقق ما يلي :

أ) ميله ٢ ويمر بالنقطة (–٤ ، –٤) .   ب) ميله $\frac{٧}{٤}$ ويقطع وحدتين من محور الصادات الموجب .

جـ) ميله –١ ويقطع ثلاث وحدات من محور السينات السالب .

ء) يمر بالنقطة (٦ ، ١) ويوازي محور السينات .   هـ) يمر بالنقطتين (–٤ ، –٣) ، (١ ، –٣) .

و) يقطع وحدتين من محور السينات السالب ويقطع أربع وحدات من محور الصادات .

[٣] لكل من المستقيمات التالية ، أوجد معادلة المستقيم العمودي والمستقيم الموازي له والمارين بالنقطة المعطاة .

أ) ص = س ؛ (–٧ ، ٠) .　　　　ب) ٧ س + ٨ ص + ٢٨ = ٠ ؛ (٦ ، –٢) .

جـ) أ س + ب ص + جـ = ٠ ؛ (٠ ، ٥) .

[٤] أوجد الميل والجزئين المقطوعين من محوري الإحداثيات للمستقيمات التالية :

أ) س + ٢ ص = ٦ .　　　　ب) ص – ٢ = $\frac{١}{٣}$ (س + ٥)

جـ) ١٢ س – ٥ ص – ١٧ = ٠ .　　　　ء) ٧ س + $\frac{٣}{٢}$ ص = ٤ + جـ .

[٥] أوجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم ٢ ص – س = ٧ ، وينصف القطعة الواصلة بين النقطتين (٣ ، ١) ، (١ ، –٥) .

[٦] أوجد معادلة المنصف العمودي للقطعة أ ب حيث أ (٣ ، ٢) ، ب (٧ ، ٦) .

[٧] أ ب جـ ء مربع فيه أ (١ ، ٣) ، جـ (٦ ، ٨) . أوجد معادلة القطر $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$.

[٨] أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (–٣ ، ٨) ، ومجموع ما يقطعه من محوري الإحداثيات ٧ وحدات .

٨ : ٤ بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم

بعد نقطة معلومة هـ$_١$ (س$_١$ ، ص$_١$) عن مستقيم معلوم أ س + ب ص + جـ = ٠ معطى بالقانون

$$\text{ف} = \frac{|\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}} \ .$$

البرهان : لإيجاد النقطة هـ$_٢$ (س$_٢$ ، ص$_٢$) التي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين

أ س + ب ص + جـ = ٠ والعمودي عليه هـ$_١$ هـ$_٢$

نوجد معادلة العمودي أولاً :

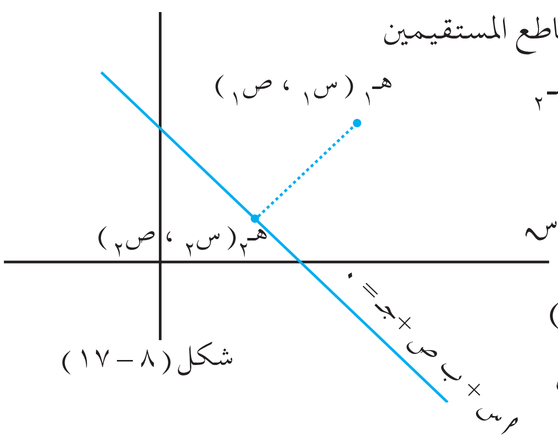
نكتب المعادلة : أ س + ب ص + جـ = ٠

بالصورة :

ص = – $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ س – $\frac{\text{جـ}}{\text{ب}}$ .... (١)

نلاحظ أن المستقيم له ميل يساوي – $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ أي أن

م = – $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$



شكل (٨ – ١٧)

ومن المعلوم أن ميل المستقيم المار بالنقطة هـ$_١$ (س$_١$ ، ص$_١$) وعمودي على المستقيم المعطاه هو : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

ومعادلته هي :

ص – ص$_١$ = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ (س – س$_١$) ..... (٢)

والمستقيمان (١) ، (٢) يتقاطعان في النقطة $هـ_٢$ ($س_٢$ ، $ص_٢$)

وعليه فإنه بحل هاتين المعادلتين بدلالة $س_٢$ ، $ص_٢$ نجد أن :

$$س_٢ = \frac{ب\,(ب\,س_١ - ا\,ص_١) - ا\,جـ}{ا^٢ + ب^٢}$$

$$ص_٢ = \frac{ا\,(-ب\,س_١ + ا\,ص_١) - ب\,جـ}{ا^٢ + ب^٢}$$

وعليه فإن المسافة بين $هـ_١$ ($س_١$ ، $ص_١$) ، $هـ_٢$ ($س_٢$ ، $ص_٢$) هي :

$$ف = \sqrt{(س_٢ ، س_١)^٢ + (ص_٢ ، ص_١)^٢}$$

وبالتعويض عن ($س_٢$ ، $ص_٢$) من أعلاه نجد أن :

$$ف = \sqrt{\left(\frac{ب^٢\,س_١ - ا\,ص_١ - ا\,جـ}{ا^٢ + ب^٢} - س_١\right)^٢ + \left(\frac{ا\,ب\,س_١ + ا^٢\,ص_١ - ب\,جـ}{ا^٢ + ب^٢} - ص_١\right)^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{ا^٢\,(ا\,س_١ + ب\,ص_١ + جـ)^٢ + ب^٢(ا\,س_١ + ب\,ص_١ + جـ)^٢}{(ا^٢ + ب^٢)^٢}}$$

$$= \frac{|ا\,س_١ + ب\,ص_١ + جـ|}{\sqrt{ا^٢ + ب^٢}}$$

مثال (٨ – ١٢) أوجد بعد النقطة هـ(–١ ، ٠) عن المستقيم ٢ س + ٣ ص – ٥ = ٠ .

الحـــل

بالتعويض في القانون $ف = \frac{|ا\,س_١ + ب\,ص_١ + جـ|}{\sqrt{ا^٢ + ب^٢}}$

عن $س_١ = -١$ ، $ص_١ = ٠$ ، $ا = ٢$ ، $ب = ٣$ ، $جـ = -٥$ نحصل على :

$$ف = \frac{|٢\,(-١) + ٣ \times ٠ - ٥|}{\sqrt{٢^٢ + ٣^٢}} = \frac{|-٢ - ٥|}{\sqrt{٤ + ٩}} = \frac{|-٧|}{\sqrt{١٣}}$$

$$= \frac{٧}{\sqrt{١٣}} \times \frac{\sqrt{١٣}}{\sqrt{١٣}} = \frac{٧\sqrt{١٣}}{١٣}$$ وحدة طولية .

[١] احسب بعد النقطة هـ عن المستقيم ل في كل حالة من الحالات التالية :

أ) هـ (١ ، ١) ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: ٢ س + ٣ ص – ٥ = ٠   ب) هـ (٢ ، –١) ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: س – ص + ١ = ٠

جـ) هـ (٣ ، ٤) ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: ٢ س + ص – ٢ = ٠   ء) هـ (–٣ ، ٥) ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: ٢ س + ٣ ص – ٥ = ٠

هـ) هـ (٠ ، ٠) ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$: ٨ س + ٦ ص – ١ = ٠ .

[٢] أوجد طول العمود النازل من كل نقطة من النقاط (٠ ، ٠) ، (٠ ، ٤) ، (–٢ ، ٢) ، (١ ، ٣) على المستقيم ٣ ص = ٤ س + ٥ .

[٣] إذا كانت النقاط أ (–١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٥) ، جـ (٠ ، ٢) تمثل رؤوس مثلث . احسب ارتفاعاته.

[٤] أوجد مساحة :

أ) المثلث الذي رؤوسه النقاط (٤ ، ٤) ، (٨ ، –١٢) ، (١٢ ، ١٠) .

ب) متوازي الأضلاع الذي رؤوسه النقاط (٥ ، –٤) ، (–١ ، ٤) ، (–١١ ، ١٦) ، (–٥ ، ٨) .

جـ) شبه المنحرف الذي رؤوسه النقاط (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (–٢ ، ٣) ، (٣ ، –٢) .

[٥] أوجد المسافة العمودية بين المستقيمين المتوازيين التاليين :

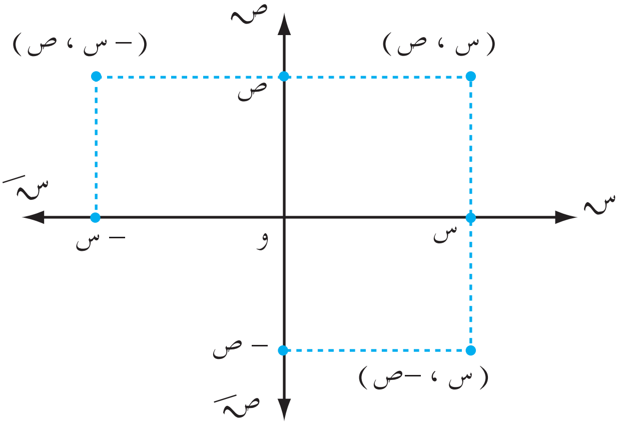
س + ٢ ص + ١٠ = ٠

س + ٢ ص + ٤ = ٠ .

سبق أن درست الانعكاس والانسحاب والدوران وكلها عبارة عن تحويلات هندسية حيث ان التحويل الهندسي تطبيق تقابل مجاله ومجاله المقابل مجموعة نقاط المستوى ، وفي هذه الوحدة نتناول الانعكاس والانسحاب تحليلياً .

تذكر أن :

– صورة النقطة (س ، ص) بالإنعكاس في محور السينات هي النقطة (س ، – ص) وبالإنعكاس في محور الصادات هي النقطة (– س ، ص) . انظر [الشكل (٨ – ١٨)] .



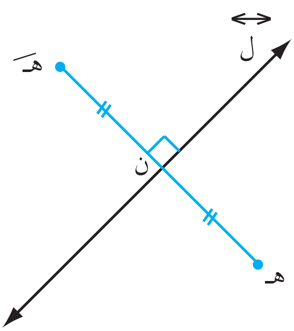
شكل (٨ – ١٨)

– الإنعكاس في المحور يحفظ الأطوال وقياس الزوايا .

– هـَ صورة هـ بالإنعكاس في المستقيم ل إذا كان :

١) $\overleftrightarrow{هـ هـَ} \perp \overleftrightarrow{ل}$

٢) $|هـ ن| = |ن هـَ|$. حيث أن ن هي نقطة تقاطع هـ هـَ مع $\overleftrightarrow{ل}$ انظر [شكل (٨–١٩)] .

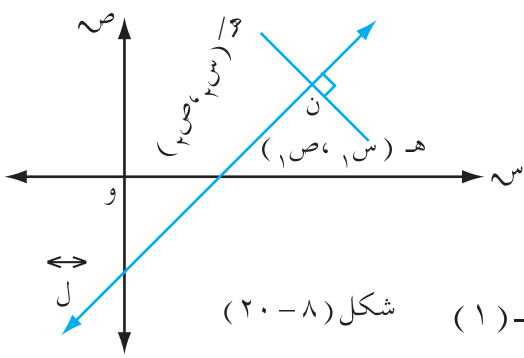


شكل (٨ – ١٩)

وعنـد معالجـة الانعكاس تحليلياً . نفرض أن محور الإنعكاس هو المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ الذي معادلته ا س + ب ص + جـ = ٠ والمطلوب إيجاد صورة هـ ($س_1$ ، $ص_1$) بالإنعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$ ، ولتكن هـَ ($س_2$ ، $ص_2$) .

أولاً – نوجد إحداثي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{هـ هـَ}$ ، وهي : ن $\left(\frac{س_1 + س_2}{٢} ، \frac{ص_1 + ص_2}{٢} \right)$.

ثانياً – النقطة ن تحقق معادلة المستقيم ل (محور الإنعكاس) لأنها واقعة عليه [شكل (٨–٢٠)]



شكل (٨ – ٢٠)

وبالتعويض فيها نحصل على :

$$ا \left(\frac{س_1 + س_2}{٢} \right) + ب \left(\frac{ص_1 + ص_2}{٢} \right) + جـ = ٠$$

أي : $ا س_1 + ا س_2 + ب ص_1 + ب ص_2 + ٢ جـ = ٠$

أو $ا س_2 + ب ص_2 = – ا س_1 – ب ص_1 – ٢ جـ$ ——— (١)

ثالثاً – بما أن : $\overleftrightarrow{هـ هـَ}$ ومحور الإنعكاس متعامدان ، إذن حاصل ضرب ميليهما يساوي –١ .

∵ ميل محور الإنعكاس $\overleftrightarrow{ل} = – \frac{ا}{ب}$ ، ميل $\overleftrightarrow{هـ هـَ} = \frac{ص_2 – ص_1}{س_2 – س_1}$.

أي $أ\,ص_2 - أ\,ص_1 = ب\,س_2 - ب\,س_1$

أو $أ\,ص_2 - ب\,س_2 = أ\,ص_1 - ب\,س_1$ —— (٢)

رابعاً : نحل المعادلتين (١) ، (٢) آنياً ، وذلك بضرب المعادلة (١) في $أ$ ، والمعادلة (٢) في $-ب$ وجمعهما

نحصل على : $س_2 = \dfrac{(ب^2 - أ^2)\,س_1 - ٢\,أ\,ب\,ص_1 - ٢\,أ\,جـ}{أ^2 + ب^2}$.

وبضرب المعادلة (١) في $ب$ والمعادلة (٢) في $أ$ وجمعهما نحصل على :

$$ص_2 = \frac{(أ^2 - ب^2)\,ص_1 - ٢\,أ\,ب\,س_1 - ٢\,ب\,جـ}{أ^2 + ب^2} .$$

وعليه فإن :

$\bar{هـ}$ ($س_2$ ، $ص_2$) هي صورة النقطة هـ ($س_1$ ، $ص_1$) بالإنعكاس في المستقيم ل : $أ\,س + ب\,ص + جـ = ٠$

حيث إن $س_2 = \dfrac{(ب^2 - أ^2)\,س_1 - ٢\,أ\,ب\,ص_1 - ٢\,أ\,جـ}{أ^2 + ب^2}$

$$ص_2 = \frac{(أ^2 - ب^2)\,ص_1 - ٢\,أ\,ب\,س_1 - ٢\,ب\,جـ}{أ^2 + ب^2}$$

ويمكن إيجاد إحداثي النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) بدلالة إحداثي صورتها ($س_2$ ، $ص_2$) باستبدال $ص_2$ بـ $ص_1$ ، $س_2$ بـ $س_1$ في القانونين أعلاه ، أي :

$$س_1 = \frac{(ب^2 - أ^2)\,س_2 - ٢\,أ\,ب\,ص_2 - ٢\,أ\,جـ}{أ^2 + ب^2}$$

$$ص_1 = \frac{(أ^2 - ب^2)\,ص_2 - ٢\,أ\,ب\,س_2 - ٢\,ب\,جـ}{أ^2 + ب^2}$$

مثال (٨ – ١٣) أوجد صورة النقطة هـ (٣ ، ٤) بالإنعكاس في المستقيم $س - ص = ١$.

الحــل

بالتعويض في القانون $س_2 = \dfrac{(ب^2 - أ^2)\,س_1 - ٢\,أ\,ب\,ص_1 - ٢\,أ\,جـ}{أ^2 + ب^2}$

$$ص_2 = \frac{(أ^2 - ب^2)\,ص_1 - ٢\,أ\,ب\,س_1 - ٢\,ب\,جـ}{أ^2 + ب^2}$$

عن $أ = ١$ ، $ب = -١$ ، $جـ = -١$ ، $س_1 = ٣$ ، $ص_1 = ٤$ نحصل على :

$$س_2 = \frac{(١ - ١)(٣) - (٢)(١)(-١)(٤) - (٢)(١)(-١)}{١ + ١} = \frac{صفر + ٨ + ٢}{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥ .$$

$$ص_2 = \frac{(١ - ١)(٤) - (٢)(١)(-١)(٣) - (٢)(-١)(-١)}{} = \frac{صفر + ٦ - ٢}{} = \frac{٤}{} = ٢ .$$

مثال (٨ − ١٤) أوجد إحداثي النقطة التي صورتها النقطة (٢ ، ٤) بالإنعكاس في المستقيم ص = س .

الحل

بالتعويض في القانون

$$\text{س}_١ = \frac{(\text{ب}^٢ - \text{أ}^٢)\,\text{س}_٢ - ٢\,\text{أ}\,\text{ب}\,\text{ص}_٢ - ٢\,\text{أ}\,\text{جـ}}{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}$$

$$\text{ص}_١ = \frac{(\text{أ}^٢ - \text{ب}^٢)\,\text{ص}_٢ - ٢\,\text{أ}\,\text{ب}\,\text{س}_٢ - ٢\,\text{ب}\,\text{جـ}}{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}$$

عن $\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = -١$ ، $\text{جـ} = ٠$ ، $\text{س}_٢ = ٢$ ، $\text{ص}_٢ = ٤$ نحصل على :

$$\text{س}_١ = \frac{(١ - ١)(٢) - (٢)(١)(-١)(٤) - (٢)(١)(٠)}{١ + ١} = \frac{\text{صفر} + ٨ - \text{صفر}}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤ .$$

$$\text{ص}_١ = \frac{(١ - ١)(٤) - (٢)(١)(-١)(٢) - (٢)(-١)(٠)}{١ + ١} = \frac{\text{صفر} + ٤ - \text{صفر}}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢ .$$

∴ النقطة (٤ ، ٢) هي النقطة التي صورتها (٢ ، ٤) بالإنعكاس في المستقيم ص = س .

مثال (٨ − ١٥) أوجد صورة المستقيم س − ص = ١ بالإنعكاس في المستقيم ٣ س − ص − ٥ = ٠

الحل

بما أن المستقيم يتحدد بنقطتين واقعتين عليه ، فإننا نختار أي نقطتين على المستقيم س − ص = ١ مثل (٠ ، −١) ، (١ ، ٠) (بوضع س = ٠ ، ص = ٠ على التوالي) ، ومن ثم نوجد صورتيهما بالإنعكاس في المستقيم ٣س − ص − ٥ = ٠ فإن . صورة النقطة (٠ ، −١) هي النقطة :

$$\left(\frac{(١ - ٩)(٠) - (٢)(٣)(-١)(-١) - (٢)(٣)(-٥)}{١ + ٩} ، \frac{(٩ - ١)(-١) - (٢)(٣)(-١)(٠) - (٢)(-١)(-٥)}{١ + ٩} \right)$$

$$= \left(\frac{\text{صفر} - ٦ + ٣٠}{١٠} ، \frac{-٨ - \text{صفر} - ١٠}{١٠} \right) = \left(\frac{٢٤}{١٠} ، \frac{-١٨}{١٠} \right) = \left(\frac{١٢}{٥} ، -\frac{٩}{٥} \right) .$$

وصورة النقطة (١ ، ٠) هي النقطة :

$$\left(\frac{(١ - ٩)(١) - (٢)(٣)(-١)(٠) - (٢)(٣)(-٥)}{١ + ٩} ، \frac{(٩ - ١)(٠) - (٢)(٣)(-١)(١) - (٢)(-١)(-٥)}{١ + ٩} \right)$$

$$= \left(\frac{-٨ - \text{صفر} + ٣٠}{١٠} ، \frac{\text{صفر} + ٦ - ١٠}{١٠} \right) = \left(\frac{٢٢}{١٠} ، \frac{-٤}{١٠} \right) = \left(\frac{١١}{٥} ، \frac{-٢}{٥} \right) .$$

وتكون معادلة المستقيم الواصل بين النقطتين $\left(\frac{١٢}{٥} ، \frac{-٩}{٥} \right)$ ، $\left(\frac{١١}{٥} ، \frac{-٢}{٥} \right)$ هي :

$\because \quad \dfrac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١} = \dfrac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} \qquad \therefore \quad \dfrac{\ldots}{\text{س} - \frac{١٢}{٥}} = \dfrac{\ldots}{\frac{١١}{٥} - \frac{١٢}{٥}}$

أي أن : $\dfrac{٥\,\text{ص} + ٩}{٥\,\text{س} - ١٢} = \dfrac{-٢ + ٩}{١١ - ١٢} = \dfrac{٧}{-١}$

٧ (٥س − ١٢) = − ٥ ص − ٩ .

٣٥ س − ٨٤ + ٥ ص + ٩ = ٠ $\Leftarrow$ ٣٥ س − ٧٥ + ٥ ص = ٠

٧ س + ص − ١٥ = ٠

وهي معادلة صورة المستقيم س − ص = ١ بالانعكاس في المستقيم ٣ س − ص − ٥ = ٠ .

مثال (٨ − ١٦) أوجـد معـادلة محـور الإنعـكاس إذا علمت أن صورة النقطة هـ(٢ ، ١) هي النقطة هـَ(١ ، ٢) .

الحـــل

بما أن محور الإنعكاس ينصف القطعة هـهـَ ، وعمودياً عليها .

إذن إحداثي منتصف القطعة هـهـَ هو ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$) ، وميل محور الإنعكاس يساوي سالب مقلوب ميل:

هـهـَ = − $\dfrac{١ - ٢}{٢ - ١}$ = − $\dfrac{-١}{١}$ = ١ .

وعليه فإن معادلة محور الإنعكاس هي : (ص − $\frac{٣}{٢}$) = ١ (س − $\frac{٣}{٢}$) أو ص − س = ٠ .

تمارين ومسائل (٨ : ٥)

[١] أوجد صورة كل نقطة من النقاط :

أ) (١ ، ٣) ، ب) (−٢ ، ٣) ، جـ) (٥ ، −٢) ، ء) (−١ ، −٣) .

بالإنعكاس في المستقيم س + ٢ ص − ١ = ٠ .

[٢] ما هي النقاط التي صورها بالإنعكاس في المستقيم ص = ١ هي :

أ) (٢ ، ٣) ، ب) (١ ، −٢) ، جـ) (−٢ ، −١) ، ء) (٠ ، ٥) .

[٣] أوجد صورة كل مستقيم من المستقيمات :

أ) س = ٠ ، ب) س = ص ، جـ) س − ص − ١ = ٠ ،

ء) ٣ س + ص −٦ = ٠

بالإنعكاس في المستقيم س + ٢ ص − ٣ = ٠

[٤] بيِّن جبرياً أن صورة النقطة (س ، ص) بالإنعكاس في محور السينات هي النقطة (س ، −ص) .

[٥] ما هو المستقيم الذي صورته ٢ س + ص −١ = ٠ بالانعكاس في المستقيم س + ٢ ص − ٣ = ٠ .

أ) هـ (١ ، ١) ، هـَ (٣ ، ١) . ب) هـ (٠ ، –١) ، هـَ (٢ ، ١) .
جـ) هـ (–١ ، ١) ، هـَ (٣ ، –١) .

[٧] أثبت أنّ صورة النقطة (س ، ص) بالإنعكاس في المستقيم ص = س هي النقطة (ص ، س) ، ومن ثم أوجد صورة النقطة (٢ ، ١) بالإنعكاس في المستقيم ص = س .

[٨] أثبت أن صورة النقطة (س، ص) بالإنعكاس في المستقيم ص = –س هي النقطة (– ص ، – س) .

[٩] ما هي صورة المستقيم ٢ س + ص – ٢ = ٠ بالإنعكاس في المستقيم .

أ) س = ٠ ، ب) ص = ٠ ،
جـ) س = ٢ ، ء) ص = –٣ ،
هـ) ص = س ، و) ص = – س ، ز) ص + ٢ س = ١ .

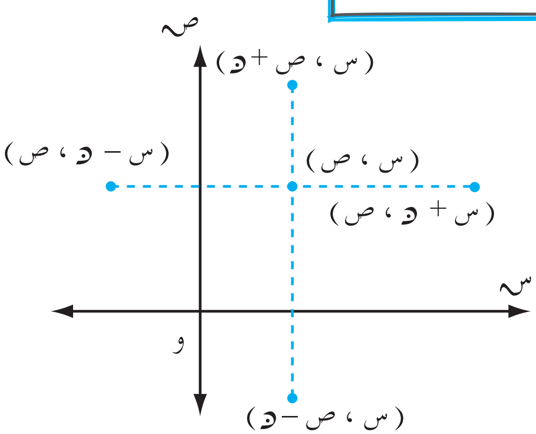
[١٠] أوجد صورة المثلث الذي رؤوسه النقاط (٣ ، –٢) ، (–١ ، ٠) ، (١ ، ٥) بالإنعكاس في المستقيم: ص + ٢ س + ١ = ٠ .

[١١] أوجد صورة المستطيل الذي رؤوسه النقاط (–٢ ، ٣) ، (١ ، ٤) ،(٢ ، ١) ، (–١ ، ٠) بالإنعكاس في المستقيم ص + س –١ = ٠ .

٨ : ٦ الانســحــاب تحـلـيـلـيــاً

تذكر أن :

– صورة النقطــة (س ، ص) تحـت تأثيـر انسحــاب باتجاه محور السينات وبمقدار د من الوحدات هي النقطـــة (س ± د ، ص) ، وباتجاه محور الصادات وبمقدار د من الوحدات هي النقطة (س ، ص ± د) وتكون إشارة د بحسـب اتجـاه حـركة الانسحاب في الاتجـاه الموجب أو السالب لأيّ من المحورين [شكل (٨ – ٢١)] .



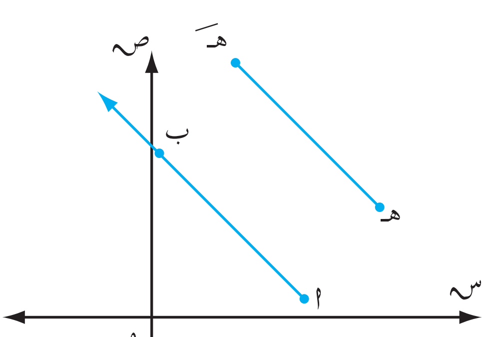
شكل (٨ – ٢١)

– الانسحاب يحافظ على الاطوال وقياس الزوايا .

– هـَ صــورة النقطة هـ بانسحــاب مقداره د وحــدة طولية اتجاهه $\overleftarrow{أب}$ إذا كان :

١) $\overleftarrow{هـهـَ}$ // $\overleftarrow{أب}$.

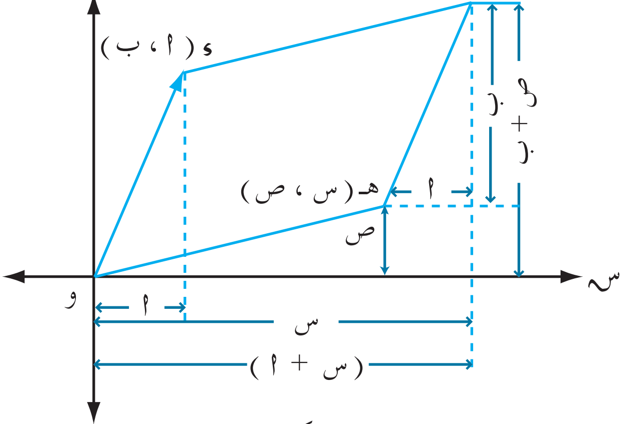
٢) | هـهـَ | = د [انظر شكل (٨–٢٢)] .



شكل (٨ – ٢٢)

وفي هذ البند سنعالج الانسحاب تحليلياً .

لنفرض أن هـ (س ،ص)نقطة في مستوى الإحداثيـات، والمطلوب إيجاد صورة هـ بإنسحاب في اتجاه $\overleftarrow{وء}$



شكل (٨ – ٢٣)

إذا أخذنا و نقطة الأصل ، فإنه يمكن تمثيل $\overrightarrow{\text{وء}}$ بالنقطة (ا ، ب) ، أي أن الانسحاب باتجاه $\overrightarrow{\text{وء}}$ وبمقدار | وء | هو عبارة عن انسحابين أحدهما باتجاه محور السينات بمقدار ا وحدة طولية والآخر باتجاه محور الصادات بمقدار ب وحدة طولية [شكل(٨–٢٤)]، وبالتالي فإن صورة النقطة هـ (س ، ص) هي النقطة هـَ(س$_١$ ، ص$_١$)حيث س$_١$ = س + ا ، ص$_١$ = ص + ب وعليه فإن :

صورة هـ (س ، ص) بانسحاب (ا ، ب) هي هـَ (س + ا ، ص + ب) .
والنقطة هـ بدلالة صورتها هـَ(س$_١$ ، ص$_١$) بانسحاب (ا ، ب) هي :
هـ (س$_١$ – ا ، ص$_١$ – ب) .

مثال (٨ – ١٧) أوجد صورة النقطة (٣ ، ٤) بانسحاب (٢ ، ١) .

الحل

باستخدام القانون أعلاه فإن صورة النقطة (٣ ، ٤) هي النقطة هـَ(٣ + ٢ ، ٤ + ١) = (٥ ، ٥) .

مثال (٨ – ١٨) أوجد النقطة التي صورتها (٧ ، –١) بانسحاب (٢ ، ١) .

الحل

باستخدام القانون أعلاه فإن النقطة التي صورتها (٧ ، –١) هي (٧ – ٢ ، –١ – ١) = (٥ ، –٢) .

مثال (٨ – ١٩) أوجد صورة المستقيم س + ٢ ص – ٥ = ٠ بانسحاب (٢ ، ١) .

الحل

لنأخذ أي نقطتين واقعتين على المستقيم س + ٢ ص – ٥ = ٠ ولتكن (١ ، ٢) ، (٥ ، ٠) وبالتالي فإن صورتيهما واقعتان على صورة المستقيم المعطى س + ٢ ص – ٥ = ٠ .

بما أن صورة (١ ، ٢) بانسحاب (٢, ١) هي (٣ ، ٣) ، وصورة (٥ ، ٠) بانسحاب (٢ ، ١) هي (٧ ، ١).

إذن معادلة المستقيم الواصل بين النقطتين (٣ ، ٣) ، (٧ ، ١) هي :

$$\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٣} = \frac{١ - ٣}{٧ - ٣} = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$$

٢ ص – ٦ = – س + ٣

أو س + ٢ ص – ٩ = ٠

وهي معادلة صورة المستقيم س + ٢ ص – ٥ = ٠ بانسحاب (٢ ، ١) .

مثال (٨ – ٢٠) أوجد الانسحاب إذا علمت أن صورة النقطة هـ (١ ، ٢) هي النقطة هـَ (–٢ ، ٥) .

الحل ليكن الانسحاب (أ ، ب) إذن (–٢ ، ٥) = (١ + أ ، ٢ + ب) . ومنه ينتج أن:

–٢ = ١ + أ ⟸ أ = –٣

٥ = ٢ + ب ⟸ ب = ٣

وعليه فإن الانسحاب هو (–٣ ، ٣) .

تمارين ومسائل (٨ : ٦)

[١] أوجد صورة كلّ من النقاط التالية بانسحاب (١ ، ٢) :

أ) (٥ ، –١) ب) (–١ ، ١) . جـ) (٠ ، ٢) ء) (–٣ ، –٤) .

[٢] أوجد النقاط التي صورها بانسحاب (٣ ، –١) هي :

أ) (٥ ، ٥) . ب) (–١ ، ٧) . جـ) (٥ ، –١) . ء) (–٢ ، –٣) .

[٣] أوجد الانسحاب إذا علمت أن صورة النقطة هـ هي هـَ في الحالات التالية :

أ) هـ (٢ ، ٣) ، هـَ (٤ ، ١) . ب) هـ (–١ ، ١) ، هـَ (١ ، ٣) .

جـ) هـ (–٢ ، –١) ، هـَ (٣ ، –١) . ء) هـ (–١ ، ٣) ، هـَ (–١ ، –١) .

[٤] أوجد صورة كلّ من المستقيمات التالية بانسحاب (–١ ، ٢) :

أ) س = ٠ . ب) ص = ٠ . جـ) س = أ .

ء) ص = ب . هـ) ص = س . و) ص = – س .

ز) ٢ س + ٣ ص – ٢ = ٠ .

[٥] أوجد المستقيمات التي صورها بانسحاب (–٢ ، –٣) هي :

أ) ص – ٢ س – ٢ = ٠ . ب) ص = س .

جـ) ص – س = ٢ . ء) ٢ ص = س + ٢ .

[٦] أوجد صورة المثلث الذي رؤوسه النقاط (١ ، ٣) ، (٧ ، ٥) ، (٢ ، ٠) بانسحاب (٣ ، –٢) .

[٧] إذا كانت صورة النقطة (٦ ، ٢) هي النقطة (٢ ، ٧) ، وصورة النقطة (–١ ، ٥) هي هـَ بالانسحاب. أوجد الانسحاب وإحداثي النقطة هـَ .

[٨] إذا كانت صورة النقطة (٩ ، ١) هي النقطة (٢ ، –٣) ، وصورة النقطة هـ هي (–٥ ، ٦) بالانسحاب.

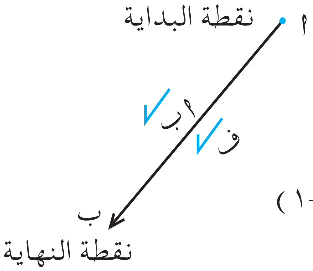
٩ : ١ المتجهـــــات

سبق وأن درست بعض الكميات الفيزيائية منها : الكتلة – درجة الحرارة – الإزاحة – السرعة – العجلة – القوة ، نجد أن بعض الكميات مثل الكتلة ودرجة الحرارة تتعين تعييناً تاماً بذكر مقدارها العددي فقط، وهذه الكميات تسمى كميات عددية بينما بعض الكميات، مثل الإزاحة، والسرعة، والعجلة، والقوة تتعين تعييناً تاماً بذكر مقدارها واتجاهها ومثل هذه الكميات تسمى كميات متجهة، أو تسمى متجهات .

تعريف (٩ : ١)

المتجه هو كمية لها مقدار وإتجاه .

ويرمز للمتجة بالرمز $\overleftarrow{\text{ف}}$ أو $\overleftarrow{\text{س}}$ ونمثله هندسياً بقطعة مستقيمة لها نقطة بداية ولتكن ﺃ ونقطة نهاية ولتكن ب فنكون قد حدّدنا اتجاهاً للقطعة المستقيمة ونرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{ﺃ ب}}$ (يدل السهم على الاتجاه) . [شكل (٩ – ١)] .



شكل (٩–١)

فيكون طول القطعة المستقيمة ممثلاً لمقدار المتجه $\overleftarrow{\text{ف}}$ واتجاه القطعة المستقيمة ممثلاً لاتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{ف}}$.

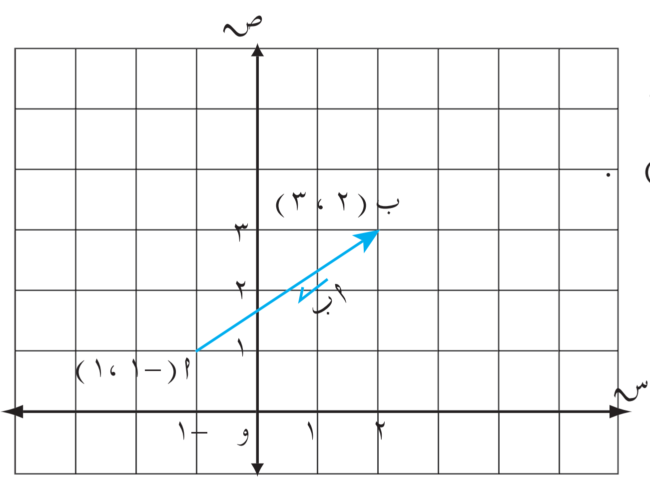
وقد تعرفنا في الهندسة التحليلية كيف نرسم قطعة مستقيمة في المستوى والآن سنعرف كيف نرسم متجهاً معلوماً نقطتا بدايته ونهايته في مستوى الاحداثيات .

مثال (٩ – ١) ارسم المتجه $\overleftarrow{\text{ﺃ ب}}$ في المستوى الإحداثي حيث ﺃ (–١ ، ١) ، ب (٢ ، ٣) .

الحل

١– نمثل النقطتين ﺃ ، ب في المستوى .

٢ – نرسم سهماً بدايته النقطة ﺃ ونهايته النقطة ب [شكل (٩ – ٢)] .



شكل (٩–٢)

المتجه القياسي :

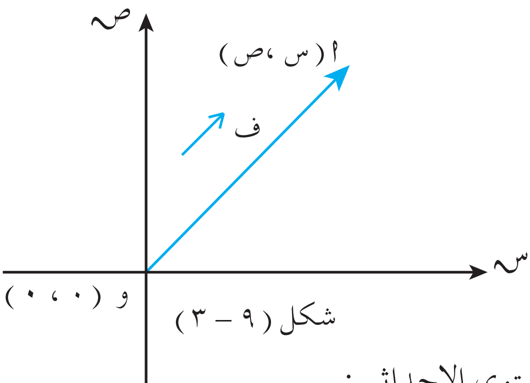
المتجه $\overleftarrow{\text{و أ}}$ ممثل $\overleftarrow{\text{ف}}$ كما في [الشكل (٩ – ٣)] يسمى بالمتجه القياسي (متجه الموضع) .

تعريف (٩ : ٢)

> **المتجّه القياسي هو متجّه مرسوم في المستوى الإحداثي بحيث تكون بدايته مبدأ تقاطع الإحداثيات و (٠ ، ٠) ونهايته أي نقطة أ (س ، ص) في المستوى ويمثله الزوج المرتب (س، ص) .**

ويكتب المتجه القياسي بدلالة النقطة أ (س ، ص)

كما في الشكل (٩–٣) .



شكل (٩ – ٣)

مثال (٩ – ٢) ارسم المتجهات القياسية التالية في المستوى الإحداثي :

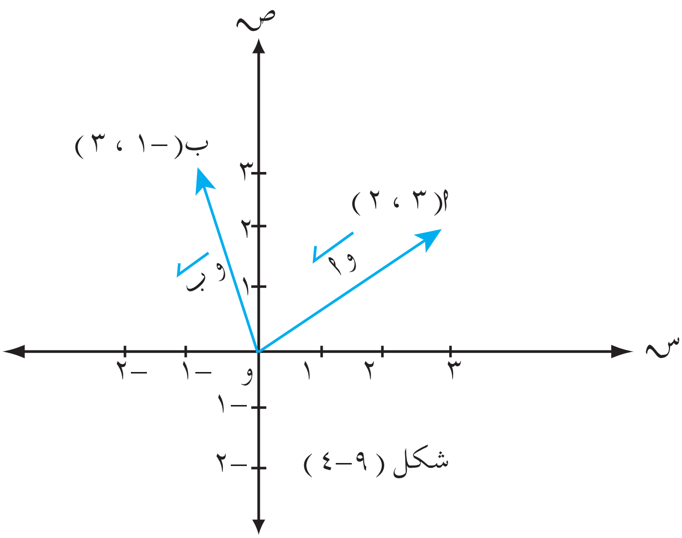
١) $\overleftarrow{\text{و أ}}$ = (٣ ، ٢) .

٢) $\overleftarrow{\text{و ب}}$ = (–١ ، ٣) .

الحــل

١ – نمثل النقطة أ (٣ ، ٢) في المستوى الإحداثي ، ثم نرسم سهماً بدايته و (٠ ، ٠) ونهايته النقطة أ (٣ ، ٢) .

٢ – لتمثيل $\overleftarrow{\text{و ب}}$ نتبع الخطوات السابقة نفسها [شكل (٩ – ٤)] .



شكل (٩–٤)

تكافؤ القطع الموجهة :

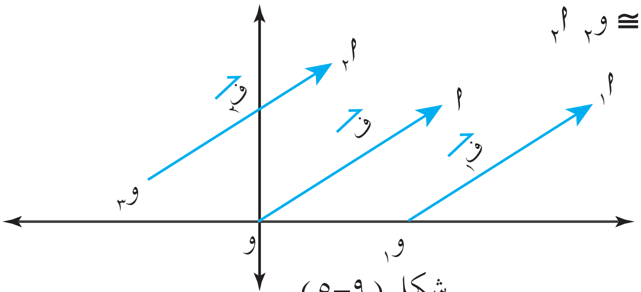
تعريف (٩ : ٣)

> **تكون القطعتان الموجهتان متكافئتين إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه بمعنى أن لهما متجه الموضع نفسه .**

من الشكل (٩–٤) المتجه $\text{و}_1\text{أ}_1$ يكافئ المتجه $\text{و}_2\text{أ}_2$ لأن لهما نفس متجه الموضع ف

ونقول أن المتجهات المذكورة متساوية (متكافئة)

ونكتب رمزياً : $\overleftarrow{\text{ف}} \cong \overleftarrow{\text{و أ}} \cong \overleftarrow{\text{ف}_1} \cong \overleftarrow{\text{ف}_1\text{أ}_1} \cong \overleftarrow{\text{ف}_2} \cong \overleftarrow{\text{و}_2\text{أ}_2}$



شكل (٩–٥)

تساوي المتجهات :

ليكن $\overleftarrow{\text{ف}_1} = (\text{س}_1 \text{ ، } \text{ص}_1)$ ، $\overleftarrow{\text{ف}_2} = (\text{س}_2 \text{ ، } \text{ص}_2)$ متجهان في المستوى الأحداثي

فإن : $\overleftarrow{\text{ف}_1} = \overleftarrow{\text{ف}_2} \Leftrightarrow \text{س}_1 = \text{س}_2 \wedge \text{ص}_1 = \text{ص}_2$.

جمع المتجهات وطرحها :

ليكن $\overleftarrow{\text{ف}_1} = (\text{س}_1 \text{ ، } \text{ص}_1)$ ، $\text{ف}_2 = (\text{س}_2 \text{ ، } \text{ص}_2)$ متجهان في المستوى الأحداثي

فإن : $\overleftarrow{\text{ف}_1} \pm \overleftarrow{\text{ف}_2} = (\text{س}_1 \text{ ، } \text{ص}_1) \pm (\text{ص}_2 \text{ ، } \text{ص}_2)$.

$= (\text{س}_1 \pm \text{س}_2 \text{ ، } \text{ص}_1 \pm \text{ص}_2)$.

ضرب متجهة في عدد حقيقي (عدد قياسي) :

ليكن $\overleftarrow{\text{ف}} = (\text{س} \text{ ، } \text{ص})$ ، ك عدد حقيقي

فإن : $(\text{ك } \overleftarrow{\text{ف}}) = \text{ك} (\text{س} \text{ ، } \text{ص}) = (\text{ك س} \text{ ، } \text{ك ص})$.

خواص ضرب متجه بعدد حقيقي :

١) $\text{ك} (\overleftarrow{\text{ف}_1} + \overleftarrow{\text{ف}_2}) = \text{ك} \overleftarrow{\text{ف}_1} + \text{ك} \overleftarrow{\text{ف}_2}$.

٢) $(\text{ك}_1 + \text{ك}_2) \overleftarrow{\text{ف}} = \text{ك}_1 \overleftarrow{\text{ف}} + \text{ك}_2 \overleftarrow{\text{ف}}$.

٣) $\text{ك}_1 (\text{ك}_2 \overleftarrow{\text{ف}}) = (\text{ك}_1 \text{ك}_2) \cdot \overleftarrow{\text{ف}}$.

مثال (٩ – ٣) أوجد ناتج ما يلي :

١) (٥ ، ٤) + (٣ ، ٢) . ٢) (٢ ، ٧) – (–٥ ، ٦) . ٣) ٧ × (٢ ، –٣) .

الحـــل

١) (٥ ، ٤) + (٣ ، ٢) = (٥ + ٣ ، ٤ + ٢) = (٨ ، ٦) .

٢) (٢ ، ٧) – (–٥ ، ٦) = (٢ – (–٥) ، ٧ – ٦) = (٢ + ٥ ، ١) = (٧ ، ١) .

٣) ٧ × (٢ ، –٣) = (٧ × ٢ ، ٧ × –٣) = (١٤ ، –٢١)

تمثيل متجّه $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ بمتجّه قياسي .

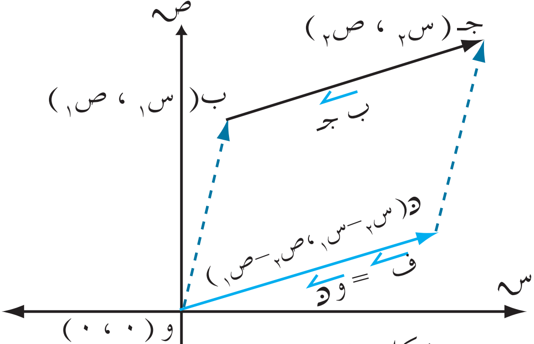
إذا كان $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ متجهاً في المستوى الإحداثي

حيث ب ($س_١$ ، $ص_١$) ، جـ ($س_٢$ ، $ص_٢$) فإن :

المتجه القياسي لهذا المتجه $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ هو المتجه القياسي $\overleftarrow{\text{و د}}$

يمثل بالزوج المرتب ($س_٢ - س_١$ ، $ص_٢ - ص_١$)

انظر الشكل (٩–٥) .



شكل (٩ – ٥)

فيكون :

$\overleftarrow{\text{ب جـ}} = \overleftarrow{\text{و د}} = (س_٢ - س_١ \text{ ، } ص_٢ - ص_١)$.

ويمكن كتابة ذلك بالشكل $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = ($س_٢$ ، $ص_٢$) − ($س_١$ ، $ص_١$) ⟸ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = جـ − ب .

مثال (٩ – ٤)

إذا كانت أ (٢ ، ٣) ، ب (٥ ، ٤) ، جـ (−١ ، ٢) ثلاث نقاط في المستوى .

فأوجد :

١) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، وماذا نستنتج ؟ ٢) $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$. ٣) $\overleftarrow{\text{و ب}}$.

الحــل

١) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = ب − أ = (٥ ، ٤) − (٢ ، ٣) = (٥ − ٢ ، ٤ − ٣) ⟸ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = (٣ ، ١) .

$\overleftarrow{\text{ب أ}}$ = أ − ب = (٢ ، ٣) − (٥ ، ٤) = (٢ − ٥ ، ٣ − ٤) ⟸ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ = (−٣ ، −١) .

نستنتج أن : $\overleftarrow{\text{أ ب}} \neq \overleftarrow{\text{ب أ}}$ ويُسميا متجهين متعاكسين .

٢) $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = جـ − ب = (−١ −٥ ، ٢ −٤) = (−٦ ، −٢) .

٣) ∵ $\overleftarrow{\text{و ب}}$ متجه قياسي ⟸ $\overleftarrow{\text{و ب}}$ = (٥ ، ٤) .

لاحظ أنه : كل متجه $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ في المستوى يُمثل بمتجه قياسي وحيد $\overleftarrow{\text{و د}}$ = (س ، ص) ، وبالتالي نقول أنه كل متجه قياسي $\overleftarrow{\text{و د}}$ = (س ، ص) في مستوى الإحداثيات يقابل زوجا مرتبا وحيداً من الأعداد الحقيقية هو د (س ، ص) والعكس صحيح فكل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية د (س ، ص) يحدِّد متجهاً قياسياً وحيداً $\overleftarrow{\text{و د}}$ حيث د (س ، ص) .

تطابق متجهين :

تعرف أن شرط تطابق (تساوي) متجهين $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ ، وهو عندما يكونا متوازيين ومن اتجاه واحد ولهما نفس الطول ، وبشكل مكافئ .

$\overleftarrow{\text{ب جـ}} = \overleftarrow{\text{ء هـ}}$ ⟺ جـ − ب = هـ − ء .

إذا كانت ب $(٢ ، -١)$ ، أ $(س ، ص)$. فأوجد إحداثي النقطة أ ليكون $\overleftarrow{\text{أب}} = (٧ ، ٥)$.

الحل

$\because \overleftarrow{\text{أب}} = \text{ب} - \text{أ} \Leftarrow (٧ ، ٥) = (٢ ، -١) - (س ، ص) \Leftarrow (٧ ، ٥) = (٢ - س ، -١ - ص)$

$\Leftarrow ٧ = ٢ - س$ ، $٥ = -١ - ص$

$\Leftarrow س = -٥$ ، $ص = -٦$ $\Leftarrow$ أ $(-٥ ، -٦)$.

طول المتجه وميله :

تعريف (٩ : ٤)

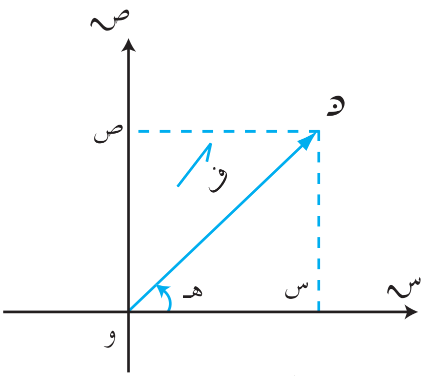
لكل متجه $\overleftarrow{\text{ف}} = (\tilde{س} ، \tilde{ص})$ طولاً يرمز له $|\overleftarrow{\text{ف}}|$

ويعطى بالعلاقة :

$$|\overleftarrow{\text{ف}}| = |\overleftarrow{\text{و د}}| = \sqrt{س^٢ + ص^٢} \, .$$

وميله يعطى بالعلاقة :

ميل $\overleftarrow{\text{و د}}$ = ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ ، حيث هـ هي قياس الزاوية التي يصنعها المتجه مع محور السينات الموجب .



شكل (٩ – ٦)

مثال (٩ – ٦)

أوجد طول ، وميل المتجه $\overleftarrow{\text{ف}} = (٢ ، ٢\sqrt{٣})$

الحل

$|\overleftarrow{\text{ف}}| = \sqrt{(٢)^٢ + (٢\sqrt{٣})^٢} = \sqrt{٤ + ١٢} = \sqrt{١٦} = ٤$.

وميل المتجه $\overleftarrow{\text{ف}}$ = ظا هـ = $\frac{ص}{س} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{٣}$.

مثال (٩ – ٧) لتكن أ $(٠ ، ٧)$ ، ب $(٢\sqrt{٣} ، ٩)$ فأوجد

١) طول المتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$. ٢) ميل المتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$.

٣) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$ مع محور السينات الموجب .

الحل

أولاً نوجد : $\overleftarrow{\text{أب}} = \text{ب} - \text{أ} \Leftarrow \overleftarrow{\text{أب}} = (٢\sqrt{٣} - ٠ ، ٩ - ٧) \Leftarrow \overleftarrow{\text{أب}} = (٢\sqrt{٣} ، ٢)$

$\Leftarrow س = ٢\sqrt{٣}$ ، $ص = ٢$.

١) $|\overleftarrow{\text{أب}}| = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}} \Leftarrow |\overleftarrow{\text{أب}}| = \sqrt{(٢\sqrt{٣}\,)^{٢} + (٢)^{٢}} = \sqrt{١٢ + ٤} = \sqrt{١٦} = ٤$

٢) ميل المتجه $\overleftarrow{\text{أب}} = \dfrac{\text{ص}}{\text{س}} = \dfrac{٢}{٢\sqrt{٣}} = \dfrac{١}{\sqrt{٣}}$.

٣) $\because$ ظاهـ $= \dfrac{\text{ص}}{\text{س}} \Leftarrow$ ظاهـ $= \dfrac{١}{\sqrt{٣}} \Leftarrow$ هـ $= ٣٠^{\circ}$.

مثال (٩ – ٨)

إذا كانت ب (– ٣ ، ٤) ، جـ(– ٢ ، ك) ، فأوجد قيمة ك التي تجعل $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع المحور السيني الموجب .

الحل

نوجد $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = جـ – ب $\Leftarrow \overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = (–٢ – (–٣) ، ك – ٤) = (– ٢ + ٣ ، ك – ٤)

$\Leftarrow \overleftarrow{\text{ب جـ}}$ = (١ ، ك – ٤) $\Leftarrow$ س = ١ ، ص = ك – ٤ ، هـ = ١٣٥° .

، $\because$ ظاهـ $= \dfrac{\text{ص}}{\text{س}} \Leftarrow$ ظا $١٣٥^{\circ} = \dfrac{\text{ك} - ٤}{١}$.

$\Leftarrow$ ظا (π – ٤٥°) = ك – ٤ $\Leftarrow$ – ظا ٤٥° = ك – ٤ $\Leftarrow$ –١ = ك – ٤ $\Leftarrow$ ك = ٣ .

مثال (٩ – ٩)

إذا كان جـ(١ ، ١) ، ء (–٢ ، ٣) ، فأوجد $|\overleftarrow{\text{جـ ء}}|$ ، $|\overleftarrow{\text{ء جـ}}|$ ، ماذا تلاحظ؟

الحل

$\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ = ء – جـ = (–٣ ، ٢) ، $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ = جـ – ء = (٣ ، –٢)

$\Leftarrow |\overleftarrow{\text{جـ ء}}| = \sqrt{(-٣)^{٢} + (٢)^{٢}} = \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣}$ ،

$|\overleftarrow{\text{ء جـ}}| = \sqrt{(٣)^{٢} + (-٢)^{٢}} = \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣}$.

نستنتج أن $|\overleftarrow{\text{جـ ء}}| = |\overleftarrow{\text{ء جـ}}|$.

[١] أكمل ما يأتي : ا) المتجه وممثله لهما نفس .... ، ....

ب) المتجهان $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ا}}$ متساويان في ..... ومتعاكسان في ....

جـ) نقول أن $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ = $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ إذا وفقط إذا كان ب – ا = ...

ء) إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}}$ = (٢ ، ١) فإن | $\overleftarrow{\text{ف}}$ | = ... وميل $\overleftarrow{\text{ف}}$ = ...

هـ) إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}}_{١}$ = (٢ ك ، ٣) ، $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$ = (١٢ ، ٣) ، فإن قيمة ك التي تجعل $\overleftarrow{\text{ف}}_{١}$ = $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$ تساوي ....

[٢] ارسم المتجهات التالية في المستوى الإحداثي :

ا) $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ حيث ا (٧ ، ٠) ، ب (–٢ ، ٥) . ب) $\overleftarrow{\text{و د}}$ = (–٣ ، ٧) .

جـ) $\overleftarrow{\text{ف}}$ = (٤ ، ٠) .

[٣] إذا كانت ا (٢ ، ٧) ، ب (٤ ، ٩) ، جـ (١ ، ٣) ، ء (–١ ، ١) اربع نقاط في المستوى الإحداثي والمطلوب :

ا) أوجد $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء ب}}$ ، ثم أوجد أطوالها .

ب) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ مع المحور س الموجب ، وكذلك أوجد ميله .

جـ) أثبت أن $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ≅ $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$.

[٤] إذا كانت ا (٢ ، ١) ، ب (٥ ، ك) ، فأوجد قيم ك في جميع الحالات الآتية :

ا) $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ = (٣ ، ١٥) . ب) | $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ | = ٥ .

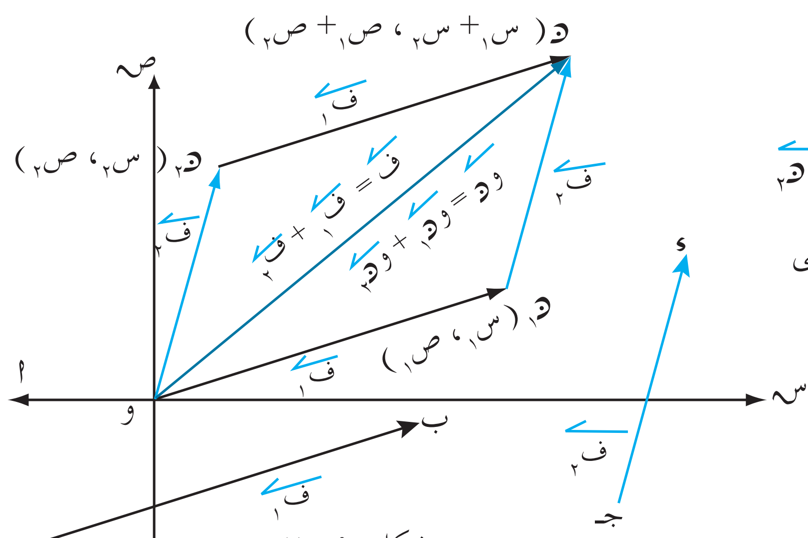
جـ) ميل $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ = $\frac{١}{٣}$. ء) قياس زاوية $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني ٤٥° .

٩ : ٢ تمثيل العمليات على المتجهات هندسيا

أولاً – جمع المتجهات هندسياً :

في [الشكل (٩ – ٧)] $\overleftarrow{\text{و د}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{و د}}_{٢}$ متجهان ممثلان للمتجهين $\overleftarrow{\text{ف}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$ على الترتيب فإن :

$\overleftarrow{\text{و د}}_{١}$ + $\overleftarrow{\text{و د}}_{٢}$ = $\overleftarrow{\text{و د}}$.



مجموع المتجهين $\overleftarrow{\text{ف}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$ هو المتجه $\overleftarrow{\text{ف}}$ الذي يمثله حاصل جمع المتجهين $\overleftarrow{\text{و د}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{و د}}_{٢}$ الممثلين لـ $\overleftarrow{\text{ف}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$ فيكون : $\overleftarrow{\text{ف}} = \overleftarrow{\text{ف}}_{١} + \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} = \overleftarrow{\text{و د}_{١}} + \overleftarrow{\text{و د}_{٢}} = \overleftarrow{\text{و د}}$.

لاحظ أن :

١) المحصلة $\overleftarrow{\text{و د}}$ تمثل قطر متوازي الأضلاع و د١ د د٢ ، ولذلك تسمى هذه القاعدة قاعدة متوازي الأضلاع .

٢) من الشكل (٩ – ٧) نجد أن :

$$\boxed{\overleftarrow{\text{ف}}_{١} + \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} = \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} + \overleftarrow{\text{ف}}_{١} = \overleftarrow{\text{ف}}}$$

أي أن عملية جمع المتجهات إبدالية .

٣) من الشكل (٩ –٧) لإيجاد $\overleftarrow{\text{ف}}_{١} + \overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$ نكتفي برسم ضلعين ، وقطر من متوازي الأضلاع ولنأخذ المثلث و د١ د في الشكل (٩–٧)] .

فيكون : $\boxed{\overleftarrow{\text{ف}} = \overleftarrow{\text{ف}}_{١} + \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} = \overleftarrow{\text{و د}_{١}} + \overleftarrow{\text{د}_{١}\text{د}} = \overleftarrow{\text{و د}}}$.

وسنحصل على نفس النتيجة عندما نأخذ المثلث و د٢ د في نفس الشكل

فيكون : $\boxed{\overleftarrow{\text{ف}} = \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} + \overleftarrow{\text{ف}}_{١} = \overleftarrow{\text{و د}_{٢}} + \overleftarrow{\text{د}_{٢}\text{د}} = \overleftarrow{\text{و د}}}$.

كلٌ من القاعدتين تسمى قاعدة المثلث .

خواص عملية جمع المتجهات :

١) عملية الجمع ثنائية على مجموعة المتجهات في المستوى .

٢) عملية الجمع إبدالية لأن : $\overleftarrow{\text{ف}}_{١} + \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} = \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} + \overleftarrow{\text{ف}}_{١}$.

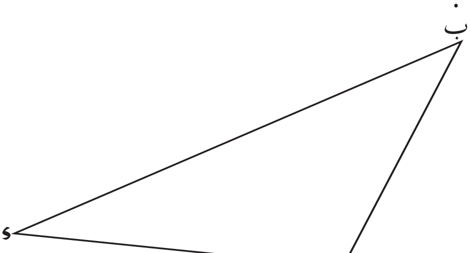
٣) عملية الجمع تجمية لأن : $(\overleftarrow{\text{ف}}_{١} + \overleftarrow{\text{ف}}_{٢}) + \overleftarrow{\text{ف}}_{٣} = \overleftarrow{\text{ف}}_{١} + (\overleftarrow{\text{ف}}_{٢} + \overleftarrow{\text{ف}}_{٣})$.

٤) العنصر المحايد الجمعي هو المتجه الصفري $\overleftarrow{٠}$ لأن $\overleftarrow{\text{ف}} + \overleftarrow{٠} = \overleftarrow{٠} + \overleftarrow{\text{ف}} = \overleftarrow{\text{ف}}$.

٥) لكل متجه $\overleftarrow{\text{ف}}$ نظير جمعي هو ($-\overleftarrow{\text{ف}}$) فإذا كان $\overleftarrow{\text{ف}} = \overleftarrow{\text{أ ب}}$ فإن نظير المتجه $\overleftarrow{\text{ف}}$ هو $(-\overleftarrow{\text{ف}}) = - (\overleftarrow{\text{أ ب}}) = \overleftarrow{\text{ب أ}}$ ،

ونجد : $\overleftarrow{\text{ف}} + (-\overleftarrow{\text{ف}}) = \overleftarrow{٠} \Leftarrow \overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب أ}} = \overleftarrow{٠}$.

مثال (٩– ١٠) إذا كان ب جـ ء مثلث [شكل (٩–٨)] .



أثبت أن : $\overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ء}} + \overleftarrow{\text{ء ب}} = \overleftarrow{٠}$

الحـــل الطرف الأيمن = $(\overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ء}}) + \overleftarrow{\text{ء ب}}$

$= \overleftarrow{\text{ب ء}} + \overleftarrow{\text{ء ب}}$

ثانياً : طرح المتجهات هندسياً :

تعريف (٩ : ٦)

ناتج طرح متجه $\overleftarrow{\text{ف}}_٢$ من المتجه $\overleftarrow{\text{ف}}_١$ هو عبارة عن حاصل جمع المتجه $\overleftarrow{\text{ف}}_١$ مع نظير $\overleftarrow{\text{ف}}_٢$
فيكون : $\overleftarrow{\text{ف}}_١ - \overleftarrow{\text{ف}}_٢ = \overleftarrow{\text{ف}}_١ + (- \overleftarrow{\text{ف}}_٢)$.

ليكن $\overleftarrow{\text{ف}}_١ = \overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_٢ = \overleftarrow{\text{أ جـ}}$ [شكل (٩ – ٩)]

فإن $\overleftarrow{\text{ف}}_١ - \overleftarrow{\text{ف}}_٢ = \overleftarrow{\text{ف}}_١ + (-\overleftarrow{\text{ف}}_٢)$

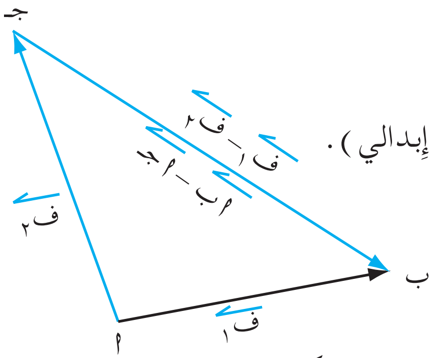
$\Leftarrow$ $\overleftarrow{\text{أ ب}} - \overleftarrow{\text{أ جـ}} = \overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{جـ أ}} = \overleftarrow{\text{جـ أ}} + \overleftarrow{\text{أ ب}} = \overleftarrow{\text{جـ ب}}$. (الجمع إبدالي) .

$\Leftarrow$ $\boxed{\overleftarrow{\text{أ ب}} - \overleftarrow{\text{أ جـ}} = \overleftarrow{\text{جـ ب}}}$

ويمكن الوصول إلى النتيجة نفسها عن طريق تطبيق

قاعدة المثلث . فيكون : $\overleftarrow{\text{أ ب}} = \overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ب}}$

وبإضافة نظير $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ إلى الطرفين ينتج : $\overleftarrow{\text{أ ب}} - \overleftarrow{\text{أ جـ}} = \overleftarrow{\text{جـ ب}}$.



شكل (٩ – ٩)

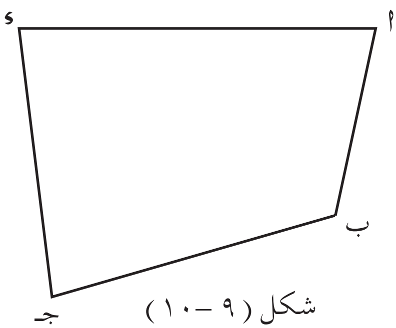
مثال (٩ – ١١)

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ء أربع نقاط في المستوى [الشكل (٩–١٠)]

أوجد ما يلي :

١) $\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ء}}$

٢) $\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ء}} + \overleftarrow{\text{ء أ}}$



شكل (٩ – ١٠)

الحـــل

١) $\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ء}} = (\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}) + \overleftarrow{\text{جـ ء}}$.

$= \overleftarrow{\text{أ جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ء}} = \overleftarrow{\text{أ ء}}$.

٢) $(\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ ء}}) + \overleftarrow{\text{ء أ}} = \overleftarrow{\text{أ ء}} + \overleftarrow{\text{ء أ}} = \overleftarrow{\text{٠}}$.

مثال (٩ – ١٢)

أ ب جـ مثلث ، ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ [شكل (٩–١١)]

الحـــل

اثبت أن : $\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{أ جـ}} = ٢ \ \overleftarrow{\text{أ ء}}$.

نكمل رسم متوازي الأضلاع أب هـ جـ [شكل (٩–١١)] فيكون :

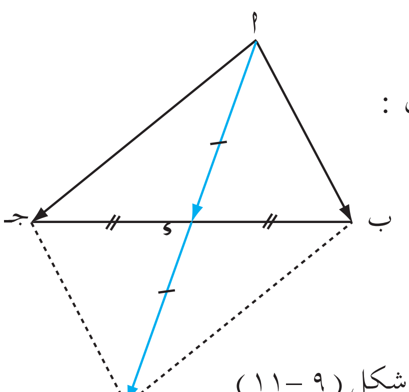
$\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{أ جـ}} = \overleftarrow{\text{أ هـ}}$ (قاعدة متوازي الأضلاع) .

، ∵ القطران في متوازي الأضلاع ينصف كلاً منهما الأخر .

∴ $\overleftarrow{\text{أ ء}} = \overleftarrow{\text{ء هـ}}$

∴ $\overleftarrow{\text{أ هـ}} = ٢ \ \overleftarrow{\text{أ ء}}$.

∴ $\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{أ جـ}} = ٢ \ \overleftarrow{\text{أ ء}}$.



شكل (٩ – ١١)

∵ $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بء}} = \overleftarrow{\text{أء}}$ ——— (١) ∵ $\overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{جـء}} = \overleftarrow{\text{أء}}$ ——— (٢)

بجمع (١)،(٢) ينتج أن: $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أجـ}} + (\overleftarrow{\text{بء}} + \overleftarrow{\text{جـء}}) = ٢\,\overleftarrow{\text{أء}}$.

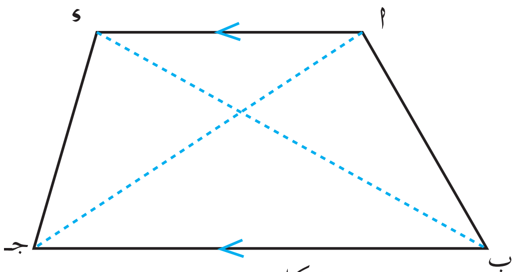
، ∵ $\overleftarrow{\text{بء}} + \overleftarrow{\text{جـء}} = \overleftarrow{\text{بء}} + \overleftarrow{\text{ءب}} = \overleftarrow{٠}$

∴ $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أجـ}} = ٢\,\overleftarrow{\text{أء}}$.

مثال (٩ – ١٣)

أ ب جـ ء شبه منحرف [شكل (٩ – ١٢)] فيه $\overleftarrow{\text{بجـ}} = ٢\,\overleftarrow{\text{أء}}$.

أثبت أن: $\overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{بء}} = ٣\,\overleftarrow{\text{أء}}$.



شكل (٩ – ١٢)

الحل

∵ $\overleftarrow{\text{أجـ}} = \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بجـ}}$ ——— (١)

، ∵ $\overleftarrow{\text{بء}} = \overleftarrow{\text{بأ}} + \overleftarrow{\text{أء}}$ ——— (٢)

بالجمع ينتج أن:

$\overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{بء}} = \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بأ}} + \overleftarrow{\text{بجـ}} + \overleftarrow{\text{أء}}$.

⇐ $\overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{بء}} = \overleftarrow{٠} + ٢\,\overleftarrow{\text{أء}} + \overleftarrow{\text{أء}}$ لأن $\overleftarrow{\text{بجـ}} = ٢\,\overleftarrow{\text{أء}}$

⇐ $\overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{بء}} = ٣\,\overleftarrow{\text{أء}}$.

تمارين ومسائل (٩ : ٢)

[١] أي العبارات التالية صائبة، وأيها خطأ مع تصويب الخطأ أينما وجد:

١ – إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}}_1 = (٥، –٢)$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_2 = (–١، ٤)$ فإن $\overleftarrow{\text{ف}}_1 + \overleftarrow{\text{ف}}_2 = (٦، ٢)$.

٢ – إذا كان ك (١، ٢) = (٣، –١) + (–١، ٥) فإن قيمة ك = ٤ .

٣ – إذا كانت أ، ب، جـ ثلاث نقاط في المستوى فإن $\overleftarrow{\text{جـأ}} + \overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{بجـ}}$.

٤ – إذا كان ك $\overleftarrow{\text{ف}} + \overleftarrow{\text{ف}} = \overleftarrow{٠}$ فإن قيمة ك = ١ .

٥ – إذا كان ء منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ فإن: $\overleftarrow{\text{أء}} + \overleftarrow{\text{بء}} = ٢\,\overleftarrow{\text{أء}}$.

[٢] إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}}_1 = (٢، –٢)$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_2 = (٠، ٤)$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_3 = (\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢})$. فأوجد ناتج ما يأتي:

١) $٢\,\overleftarrow{\text{ف}}_1 - ٥\,\overleftarrow{\text{ف}}_2$ ، ٢) $\overleftarrow{\text{ف}}_1 + ٣(\overleftarrow{\text{ف}}_2 - ٤\,\overleftarrow{\text{ف}}_3)$ ، ٣) $|\overleftarrow{\text{ف}}_2 + ٣\,\overleftarrow{\text{ف}}_1|$.

[٣] إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}}_1 = (٧، ١٢)$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_2 = (–١، ٤)$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_3 = (٩، ٤)$. فأوجد قيمة ك التي تحقق المعادلة: $\overleftarrow{\text{ف}}_1 + \text{ك}\,\overleftarrow{\text{ف}}_2 = \overleftarrow{\text{ف}}_3$.

[٤] إذا كانت أ(٢، ٤) ، ب(٥، ٧) ، جـ(٠، –٢) ، ء(١، –١) ، $\overleftarrow{\text{ف}} = ٢\,\overleftarrow{\text{أب}} - ٤\,\overleftarrow{\text{جـء}}$

المطلوب: ١ – أوجد مركبتي $\overleftarrow{\text{ف}}$ ، ثم أوجد طوله وميله. ٢ – أثبت أن: $\overleftarrow{\text{أب}} \cong ٣\,\text{جـء}$.

كل من الحالات التالية :

١) $\overleftarrow{\text{أء}} = (٣ ، ١)$ ، ٢) $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بجـ}} = ٢\,\overleftarrow{\text{جـء}}$ ، ٣) $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{جـء}}$.

[٦] أ ب جـ مثلث ، ء $\in \overline{\text{بجـ}}$ بحيث كان $\overleftarrow{\text{بء}} = ٣\,\overleftarrow{\text{ءجـ}}$ فأثبت أن :

١) $\overleftarrow{\text{بأ}} + \overleftarrow{\text{أجـ}} = ٤\,\overleftarrow{\text{ءجـ}}$ ، ٢) $\overleftarrow{\text{ءأ}} + \overleftarrow{\text{أب}} = ٣\,\overleftarrow{\text{ءجـ}}$.

[٧] أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{بجـ}} \,//\, \overline{\text{أء}}$ ، $|\text{بجـ}| = ٣\,|\text{أء}|$.أثبت أن : $\overleftarrow{\text{أجـ}} + \overleftarrow{\text{بء}} = ٤\,\overleftarrow{\text{أء}}$.

[٨] إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ خمس نقاط في المستوى فأكمل ما يأتي :

١) $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بجـ}} + \overleftarrow{\text{جـء}} + \overleftarrow{\text{ءهـ}} = ...$ ، ٢) $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{بجـ}} + \overleftarrow{\text{جـء}} + \overleftarrow{\text{ءهـ}} + \overleftarrow{\text{هـأ}} = ...$

٩ : ٣ تــوازي وتعامــد متجهــين

في ضوء معرفتك لميل الخط المستقيم سنستنتج شرطي توازي وتعامد متجهين :

فإذا كان $\overleftarrow{\text{ف}_{١}} = \overleftarrow{\text{و د}_{١}} = (\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١})$ ، $\overleftarrow{\text{ف}_{٢}} = \overleftarrow{\text{و د}_{٢}} = (\text{س}_{٢} ، \text{ص}_{٢})$ فإنه .

أولاً : يتوازي المتجهان $\overleftarrow{\text{ف}_{١}}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}_{٢}}$ إذا وفقط إذا كان :

$$\text{ميل } \overleftarrow{\text{و د}_{١}} = \text{ميل } \overleftarrow{\text{و د}_{٢}} \Leftarrow \frac{\text{ص}_{١}}{\text{س}_{١}} = \frac{\text{ص}_{٢}}{\text{س}_{٢}}$$

$$\Leftarrow \text{س}_{١}\text{ص}_{٢} = \text{س}_{٢}\text{ص}_{١} \Leftarrow \text{س}_{١}\text{ص}_{٢} - \text{س}_{٢}\text{ص}_{١} = ٠ \ .$$

$$\boxed{\therefore \overleftarrow{\text{ف}_{١}} \,//\, \overleftarrow{\text{ف}_{٢}} \Leftrightarrow \text{س}_{١}\text{ص}_{٢} - \text{س}_{٢}\text{ص}_{١} = ٠ \ .}$$

$$\because \frac{\text{ص}_{١}}{\text{س}_{١}} = \frac{\text{ص}_{٢}}{\text{س}_{٢}} \Leftarrow \frac{\text{س}_{٢}}{\text{س}_{١}} = \frac{\text{ص}_{٢}}{\text{ص}_{١}} = \text{ك} \Leftarrow \frac{\text{س}_{٢}}{\text{س}_{١}} = \text{ك} \Leftarrow \text{س}_{٢} = \text{ك}\,\text{س}_{١}$$

$$\frac{\text{ص}_{٢}}{\text{ص}_{١}} = \text{ك} \Leftarrow \text{ص}_{٢} = \text{ك}\,\text{ص}_{١}$$

$$\because \overleftarrow{\text{و د}_{٢}} = (\text{س}_{٢} ، \text{ص}_{٢}) \ .$$

$$\therefore \overleftarrow{\text{و د}_{٢}} = (\text{ك}\,\text{س}_{١} ، \text{ك}\,\text{ص}_{١}) = \text{ك}\,(\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١}) = \text{ك}\,\overleftarrow{\text{و د}_{١}} \Leftarrow \overleftarrow{\text{ف}_{٢}} = \text{ك}\,\overleftarrow{\text{ف}_{١}} \ .$$

$$\boxed{\therefore \overleftarrow{\text{ف}_{١}} \,//\, \overleftarrow{\text{ف}_{٢}} \Leftrightarrow \overleftarrow{\text{ف}_{٢}} = \text{ك}\,\overleftarrow{\text{ف}_{١}} \ .}$$

ثانياً – يتعامد المتجهان $\overleftarrow{\text{ف}_{١}}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}_{٢}}$ إذا وفقط إذا كان :

$$\text{ميل } \overleftarrow{\text{و د}_{١}} \times \text{ميل } \overleftarrow{\text{و د}_{٢}} = -١ \Leftarrow \frac{\text{ص}_{١}}{\text{س}_{١}} \times \frac{\text{ص}_{٢}}{\text{س}_{٢}} = -١ \Leftarrow \text{ص}_{١}\text{ص}_{٢} = -\text{س}_{١}\text{س}_{٢}$$

$$\Leftarrow \text{س}_{١}\text{س}_{٢} + \text{ص}_{١}\text{ص}_{٢} = ٠ \ .$$

نستنتج مما سبق شرط التعامد التالي :

$$\overleftarrow{ف}_{١} \perp \overleftarrow{ف}_{٢} \Leftrightarrow س_{١} س_{٢} + ص_{١} ص_{٢} = ٠ \,.$$

مثال (٩ – ١٤) إذا كان $\overleftarrow{ف}_{١} = (٢ ، -١)$ ، $\overleftarrow{ف}_{٢} = (-٦ ، ٣)$ ، $\overleftarrow{ف}_{٣} = (١ ، ٢)$:

أثبت أن :

١) $\overleftarrow{ف}_{١} \,//\, \overleftarrow{ف}_{٢}$. ٢) $\overleftarrow{ف}_{٢} \perp \overleftarrow{ف}_{٣}$. ٣) ما علاقة $\overleftarrow{ف}_{١}$ بـ $\overleftarrow{ف}_{٣}$.

الحــل

١) $\because \overleftarrow{ف}_{١} = (٢ ، -١) \Leftarrow س_{١} = ٢$ ، $ص_{١} = -١$.

$\because \overleftarrow{ف}_{٢} = (-٦ ، ٣) \Leftarrow س_{٢} = -٦$ ، $ص_{٢} = ٣$.

$\because س_{١} ص_{٢} - س_{٢} ص_{١} = ٢ \times ٣ - (-٦) \times (-١) = ٦ - ٦ =$ صفر .

$\therefore \overleftarrow{ف}_{١} \,//\, \overleftarrow{ف}_{٢}$

حل آخر :

١) $\because \overleftarrow{ف}_{٢} = (-٦ ، ٣)$ $\therefore \overleftarrow{ف}_{٢} = -٣ (٢ ، -١)$

$\therefore \overleftarrow{ف}_{٢} = -٣ \, \overleftarrow{ف}_{١}$ $\therefore \overleftarrow{ف}_{٢} \,//\, \overleftarrow{ف}_{١}$ لاحظ $ك = -٣$.

٢) $\overleftarrow{ف}_{٢} = (-٦ ، ٣)$ $\therefore س_{١} = -٦$ ، $ص_{١} = ٣$.

$\overleftarrow{ف}_{٣} = (١ ، ٢)$ $\therefore س_{٢} = ١$ ، $ص_{٢} = ٢$.

، $\because س_{١} س_{٢} + ص_{١} ص_{٢} = -٦ \times ١ + ٣ \times ٢ = -٦ + ٦ =$ صفر .

$\therefore \overleftarrow{ف}_{٢} \perp \overleftarrow{ف}_{٣}$.

٣) $\because \overleftarrow{ف}_{١} \,//\, \overleftarrow{ف}_{٢} \wedge \overleftarrow{ف}_{٢} \perp \overleftarrow{ف}_{٣}$ $\therefore \overleftarrow{ف}_{١} \perp \overleftarrow{ف}_{٣}$.

مثال (٩ – ١٥) لتكن أ (١ ، -٤) ، ب (٧ ، ٢) ، جـ (٣ ، ٦) ، ء (-٣ ، ٠) أربع نقاط في المستوى . فأثبت أن الشكل أ ب جـ ء مستطيل .

الحــل

نأخذ ضلعين متقابلين ونثبت أنهما متوازيان ومتساويان في الطول ، ثم نثبت أن إِحدى الزوايا قائمة .

– لنأخذ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ء جـ}$.

$\overleftarrow{أ ب} = ب - أ = (٦ ، ٦)$ ، $\overleftarrow{ء جـ} = جـ - ء = (٦ ، ٦)$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءجـ}} = (٦ ، ٦)$ ، ∴ أ ب // ء جـ ∧ | أ ب | = | ءجـ | .

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \parallel \overrightarrow{\text{ءجـ}}$ ∧ | أ ب | = | ءجـ | .

∴ الشكل أ ب جـ ء متوازي اضلاع ـــــ (١) .

– لنأخذ ∡ أ ب جـ .

$\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٦ ، ٦) ، $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ = جـ – ب = (–٤ ، ٤) .

∴ س$_١$ س$_٢$ + ص$_١$ ص$_٢$ = ٦ × –٤ + ٦ × ٤ = –٢٤ + ٢٤ = صفر .

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \perp \overrightarrow{\text{بجـ}}$

∴ ق (∡ أ ب جـ) = °٩٠ ـــــ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

الشكل أ ب جـ ء مستطيل .

تمارين ومسائل (٩ : ٣)

[١] نفرض أن المتجهات المعطاة في كل مما يأتي غير صفرية فأكمل ما يلي :

١ – إذا كان $\overrightarrow{\text{ف}}_١$ = ٥ $\overrightarrow{\text{ف}}_٢$ فإن المتجهين $\overrightarrow{\text{ف}}_١$ ، $\overrightarrow{\text{ف}}_٢$ . . . . .

٢ – إذا كان $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (س ، ص) ، $\overrightarrow{\text{جـء}}$ = (– ص ، س) فإن المتجهين . . . . . .

٣ – إذا كان ميل المتجه $\overrightarrow{\text{ف}}_١$ = ميل المتجه $\overrightarrow{\text{ف}}_٢$ فإن المتجهين . . . .

٤ – إذا كان $\overrightarrow{\text{و د}}_١$ = (–٢ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{و د}}_٢$ = (٣ ، ص) فإنه يكون $\overrightarrow{\text{و د}}_١ \perp \overrightarrow{\text{و د}}_٢$ عندما تكون قيمة ص = ... ، $\overrightarrow{\text{و د}}_١ \parallel \overrightarrow{\text{و د}}_٢$ إذا كانت قيمة ص = ...

[٢] إذا كانت أ (١٠ ، ٤) ، ب (٣ ، ١) ، جـ (–٢ ، ٣) ، ء (٠ ، ٨) . أثبت أنه :

١) $\overrightarrow{\text{أء}} \parallel \overrightarrow{\text{بجـ}}$.   ٢) $\overrightarrow{\text{بجـ}} \perp \overrightarrow{\text{ءجـ}}$.

[٣] إذا كانت أ (٢ ، ٦) ، ب (٤ ، ٤) ، جـ (٢ ، ٢) ، ء (٠ ، ٠) ، فأثبت أن الشكل أ ب جـ ء مربع ، ثم أوجد مساحته .

[٤] إذا كانت أ (٢ ، ٢) ، ب (٤ ، –١) ، جـ (٢ ، –٣) ، ء (٠ ، ٠) ، فأثبت أن الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع .

[٥] أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ، فإذا كانت هـ ، و منتصفى $\overline{\text{أء}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$ على الترتيب ، فأثبت أن : $\overrightarrow{\text{بأ}} + \overrightarrow{\text{جـء}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{و هـ}}$.

متجه الوحدة

المتجهـات ذات اطوال مختلفـة ومنهـا متجه يسمـى متجـه الوحدة وهو أي متجه طوله يساوى وحدة الأطوال .

أي إذا كان $|\overleftarrow{ف}| = ١$ فإن $\overleftarrow{ف}$ يسمى متجه وحدة ، ولكل متجه $\overleftarrow{ف}$ متجه وحدة له نفس اتجاه $\overleftarrow{ف}$ يرمز له بالرمز $\overleftarrow{ف}^*$ ، ويعطى بالقاعدة التالية :

$$\boxed{\overleftarrow{ف}^* = \frac{١}{|\overleftarrow{ف}|} \times \overleftarrow{ف} \ .}$$

مثال (٩ – ١٦) بين أياً من المتجهات التالية متجه وحدة وإذا لم يكن . فأوجد له متجه الوحدة باتجاهه .

١) $\overleftarrow{ف}_١ = \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، - \frac{١}{\sqrt{٢}} \right)$.

٢) $\overleftarrow{ف}_٢ = (٣ ، ٤)$.

٣) $\overleftarrow{اب} = (٠ ، ٢)$.

٤) $\overleftarrow{جـ ء} = (١ ، ٠)$.

الحـــل

١) $\overleftarrow{ف}_١ = \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، - \frac{١}{\sqrt{٢}} \right) \therefore |\overleftarrow{ف}_١| = \sqrt{\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^٢ + \left(-\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^٢} = \sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}} = \sqrt{١} = ١$

$\therefore$ $\overleftarrow{ف}_١$ متجه وحدة .

٢) $\overleftarrow{ف}_٢ = (٣ ، ٤)$

$\therefore |\overleftarrow{ف}_٢| = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥ \Leftarrow$ $\overleftarrow{ف}_٢$ لايمثل متجه وحدة

نوجد متجه الوحدة للمتجه $\overleftarrow{ف}_٢$.

$\therefore \overleftarrow{ف}_٢^* = \frac{١}{|\overleftarrow{ف}_٢|} \times \overleftarrow{ف}_٢ = \frac{١}{٥} \times (٣ ، ٤) \Leftarrow \overleftarrow{ف}^* = \left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥} \right)$.

٣) $\overleftarrow{اب} = (٠ ، ٢)$ $\therefore |\overleftarrow{اب}| = \sqrt{(٠)^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{٤} = ٢$.

$\therefore$ $\overleftarrow{اب}$ ليس متجه وحدة .

$\therefore \overleftarrow{اب} = \frac{١}{|\overleftarrow{اب}|} \times \overleftarrow{اب} = \frac{١}{٢} \times (٠ ، ٢) \Leftarrow \overleftarrow{اب}^* = (٠ ، ١)$.

٤) $\overleftarrow{جـ ء} = (١ ، ٠) \Leftarrow |\overleftarrow{جـ ء}| = \sqrt{(١)^٢ + (٠)^٢} = \sqrt{١} = ١ \Leftarrow$ $\overleftarrow{جـ ء}$ متجه وحده.

متجها الوحدة الأساسيان هما المتجهان $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ حيث :

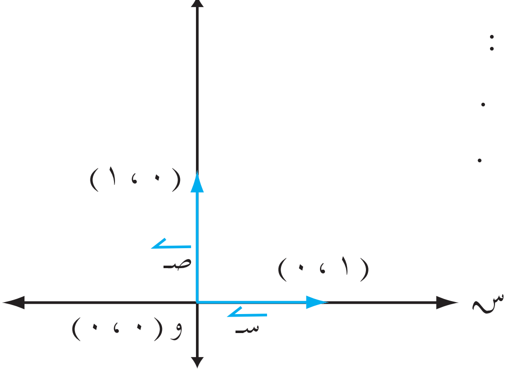
$\overleftarrow{\text{س}}$ = (١ ، ٠) متجه الوحدة باتجاه المحور السيني الموجب .

$\overleftarrow{\text{ص}}$ = (٠ ، ١) متجه الوحدة باتجاه المحور الصادي الموجب .

[شكل (٩ – ١٣)]

لاحظ أن المحاور الإحداثية متعامدة .

∴ $\overleftarrow{\text{س}} \perp \overleftarrow{\text{ص}}$ ، أو استخدم شرط التعامد في إثبات أن $\overleftarrow{\text{س}} \perp \overleftarrow{\text{ص}}$.



شكل (٩ – ١٣)

التعبير عن متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين :

إذا كان لدينا المتجه القياسي $\overleftarrow{\text{ف}}$ = (أ ، ب) ، فيمكن كتابته بدلالة متجهي الوحدة الاساسيين ، وذلك عن طريق تحليل المتجه $\overleftarrow{\text{ف}}$ إلى حاصل جمع متجهين قياسيين ، واقعين على المحاور الإحداثية [شكل (٩ – ١٤)].

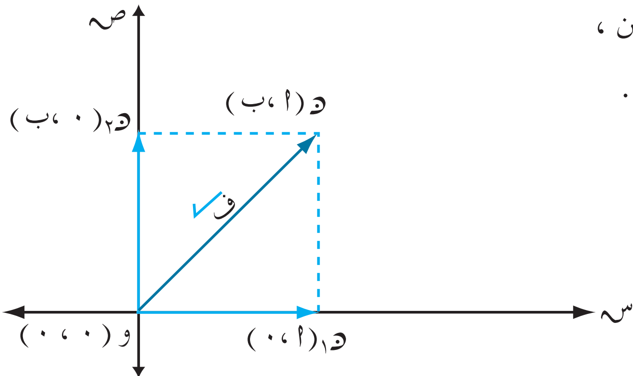
فيكون $\overleftarrow{\text{ف}}$ = (أ ، ب) = $\overleftarrow{\text{و د}_1}$ + $\overleftarrow{\text{و د}_2}$.

⇐ $\overleftarrow{\text{ف}}$ = (أ ، ب) = (أ ، ٠) + (٠ ، ب)

⇐ $\overleftarrow{\text{ف}}$ = أ (١ ، ٠) + ب (٠ ، ١) .

⇐ $\overleftarrow{\text{ف}}$ = أ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ب $\overleftarrow{\text{ص}}$.

⇐ $\boxed{\overleftarrow{\text{ف}} = (\text{أ} ، \text{ب}) = \text{أ}\,\overleftarrow{\text{س}} + \text{ب}\,\overleftarrow{\text{ص}}}$.



شكل (٩ – ١٤)

مثال (٩ – ١٧)

عبِّر عن المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين : $\overleftarrow{\text{ف}}_1$ = (٣ ، ١٢) ، $\overleftarrow{\text{ف}}_2$ = (٠ ، –٥) ، $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ ($\frac{٣}{٤}$ ، ٠) .

الحـــل

∵ $\overleftarrow{\text{ف}}_1$ = (٣ ، ١٢) ∴ $\overleftarrow{\text{ف}}_1$ = ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ١٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$.

، ∵ $\overleftarrow{\text{ف}}_2$ = (٠ ، –٥) ∴ $\overleftarrow{\text{ف}}_2$ = –٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$.

، ∵ $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ = ($\frac{٣}{٤}$ ، ٠) ∴ $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ = $\frac{٣}{٤}$ $\overleftarrow{\text{س}}$.

مثال (٩ – ١٨)

إذا كانت أ(١ ، ٢) ، ب (٢ ، –٤) ، $\overleftarrow{\text{ف}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ – ٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$. فأوجد ناتج ما يلي بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين .

١) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + $\overleftarrow{\text{ف}}$ ، ٢) ٣ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ – ٢ $\overleftarrow{\text{ف}}$.

أب = ب − أ = (١ ، −٦) = س − ٦ ص .

١) أب + ف = (س − ٦ ص) + (٤ س − ٥ ص) = (س + ٤ س) − ٦ ص − ٥ ص

= ٥ س − ١١ ص .

٢) ٣ أب −٢ ف = ٣ (س − ٦ ص) −٢ (٤ س − ٥ ص) .

= ٣ س − ١٨ ص − ٨ س + ١٠ ص = −٥ س − ٨ ص .

تمارين ومسائل (٩ : ٤)

[١] بيّن أياً من المتجهات التالية هو متجه وحدة : أب = − س + ص ، ف = ($\frac{٣}{٥}$ ، − $\frac{٤}{٥}$) ،
و جـ = − س ، و ب = (١ ، ١) .

[٢] إذا كانت أ (٢ ، −١) ، ب (٥ ، ٥) ، جـ (١ ، ٣) ، ء (٠ ، ٧) ، ف = ٤ س − ص .
فأوجد ناتج ما يلي بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين :

١) أب + جـ ء ، ٢) ٣ أب − ٢ جـ ء + ف ،

٣) و أ + و ب + و جـ + و ء + ف .

[٣] أوجد متجه الوحدة باتجاه المتجهات التالية : ف$_١$ = (٢ ، ٣) ، ف$_٢$ = س + ص ، ب جـ = ٤ ص ،
و أ = (−٦ ، ٨) .

[٤] إذا كان ف$_١$ = أ س + ب ص ، ف$_٢$ = ٣ س − ٤ ص . فأوجد قيمتي أ ، ب اللتين تحققان المعادلة التالية : ف$_١$ + ف$_٢$ = ٥ س − ٣ ص .

[٥] عبِّر عن المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين : ف$_١$ = (١٢ ، ٧) ، ف$_٢$ = ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$) ،
أب = (٦ ، ٠) ، و م = (٠ ، −٥) .

٩ : ٥ الضرب الداخلي لمتجهين

هناك نوعان من ضرب المتجهات نتناول منها في هذا البند النوع الأول ويسمى بالضرب الداخلي لمتجهين كما يسمى بالضرب العددي لمتجهين .

تعريف (٩ : ٦)

حاصل الضرب الداخلي لمتجهين ف$_١$ ، ف$_٢$ هو عدد حقيقي يرمز له بالرمز ف$_١$ • ف$_٢$ ويعطى بالعلاقة : ف$_١$ • ف$_٢$ = | ف$_١$ | × | ف$_٢$ | جتاهـ ، ٠ ≤ هـ ≤ π .

حيث هـ قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين ف$_١$ ، ف$_٢$ ،

إذا كان $|\overleftarrow{ف}_{١}| = ٣$ ، $|\overleftarrow{ف}_{٢}| = ٢$. فأوجد حاصل الضرب الداخلي $\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢}$

عندما يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما كالتالي :

١) هـ = ٦٠° ، ٢) هـ = ٠° ، ٣) هـ = ٩٠° .

الحــل

١) عندما هـ = ٦٠° فإن $\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = |\overleftarrow{ف}_{١}| \times |\overleftarrow{ف}_{٢}|$ جتا هـ

$\Leftarrow \overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = ٣ \times ٢ \times$ جتا $٦٠° = ٣ \times ٢ \times \frac{١}{٢} = ٣$.

٢) عندما هـ = ٠° فإن $\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = ٣ \times ٢ \times$ جتا $٠° = ٣ \times ٢ \times ١ = ٦$.

٣) عندما هـ = ٩٠° فإن $\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = ٣ \times ٢ \times$ جتا $٩٠° = ٣ \times ٢ \times ٠ = ٠$

نتـائـج :

١) يتعامد متجهان غير صفريين $\overleftarrow{ف}_{١}$ ، $\overleftarrow{ف}_{٢}$ إذا كان حاصل ضربهما الداخلي يساوي صفراً أي أن :

$$\boxed{\overleftarrow{ف}_{١} \perp \overleftarrow{ف}_{٢} \Leftrightarrow \overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = ٠}$$

٢) يتوازي $\overleftarrow{ف}_{١}$ ، $\overleftarrow{ف}_{٢}$ إذا كان : $\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = \pm |\overleftarrow{ف}_{١}| \bullet |\overleftarrow{ف}_{٢}|$.

أي أن $$\boxed{\overleftarrow{ف}_{١} \parallel \overleftarrow{ف}_{٢} \Leftrightarrow \frac{\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢}}{|\overleftarrow{ف}_{١}| \bullet |\overleftarrow{ف}_{٢}|} = \pm ١}$$.

مع ملاحظة أنه إذا كان الناتج + ١ فإن هـ = ٠° ، والمتجهان لهما نفس الاتجاه ،

وإذا كان الناتج – ١ فإن هـ = π ، والمتجهان متعاكسان .

٣) حاصل الضرب الداخلي لمتجه في نفسه يساوى مربع طوله أي أن : $\overleftarrow{ف} \bullet \overleftarrow{ف} = |\overleftarrow{ف}|^{٢}$.

الإثبات : $\because$ هـ = ٠° $\therefore \overleftarrow{ف} \bullet \overleftarrow{ف} = |\overleftarrow{ف}| \times |\overleftarrow{ف}|$ جتا $٠° = |\overleftarrow{ف}|^{٢} \times ١ = |\overleftarrow{ف}|^{٢}$.

٤) $\overleftarrow{س} \cdot \overleftarrow{س} = \overleftarrow{ص} \cdot \overleftarrow{ص} = ١$ ، $\overleftarrow{س} \cdot \overleftarrow{ص} = \overleftarrow{ص} \cdot \overleftarrow{س} = ٠$.

٥) إذا كان $\overleftarrow{ف}_{١} = (س_{١} ، ص_{١})$ ، $\overleftarrow{ف}_{٢} = (س_{٢} ، ص_{٢})$ فإنه يمكن إيجاد علاقة تكافئ العلاقة السابقة في إيجاد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\overleftarrow{ف}_{١}$ ، $\overleftarrow{ف}_{٢}$ ، وهذه العلاقة هي :

$$\boxed{\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = س_{١} س_{٢} + ص_{١} ص_{٢}}$$.

الاثبات : $\because \overleftarrow{ف}_{١} = س_{١} \overleftarrow{س} + ص_{١} \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ف}_{٢} = س_{٢} \overleftarrow{س} + ص_{٢} \overleftarrow{ص}$.

$\therefore \overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = (س_{١} \overleftarrow{س} + ص_{١} \overleftarrow{ص}) \bullet (س_{٢} \overleftarrow{س} + ص_{٢} \overleftarrow{ص})$

$= س_{١} س_{٢} \overleftarrow{س} \bullet \overleftarrow{س} + س_{١} ص_{٢} \overleftarrow{س} \bullet \overleftarrow{ص} + ص_{١} س_{٢} \overleftarrow{ص} \bullet \overleftarrow{س} + ص_{١} ص_{٢} \overleftarrow{ص} \bullet \overleftarrow{ص}$

$= س_{١} س_{٢} |\overleftarrow{س}|^{٢} + س_{١} ص_{٢} \times ٠ + ص_{١} س_{٢} \times ٠ + ص_{١} ص_{٢} |\overleftarrow{ص}|^{٢}$.

∴ $\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = س_{١} س_{٢} + ص_{١} ص_{٢}$.

مثال (٩ – ٢٠) إذا كان $\overleftarrow{ف}_{١} = (٢ ، ٥)$ ، $\overleftarrow{ف}_{٢} = (٣ ، -٤)$. فأوجد حاصل الضرب الداخلي $\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢}$ ، $\overleftarrow{ف}_{٢} \bullet \overleftarrow{ف}_{١}$. وماذا تستنتج ؟

الحل

$\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = ٢ \times ٣ + ٥ \times -٤ = ٦ - ٢٠ = -١٤$ ،

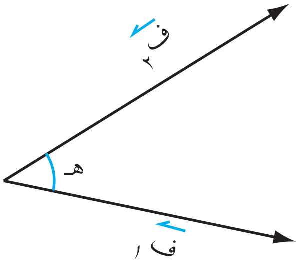
$\overleftarrow{ف}_{٢} \bullet \overleftarrow{ف}_{١} = ٣ \times ٢ + -٤ \times ٥ = ٦ - ٢٠ = -١٤$

نجد أن : $\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = \overleftarrow{ف}_{٢} \bullet \overleftarrow{ف}_{١}$. الضرب الداخلي إبدالي .

٦) نستطيع تحديد قياس الزاوية هـ المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{ف}_{١}$ ، $\overleftarrow{ف}_{٢}$.

[شكل (٩ – ١٥)] عن طريق العلاقة التالية :

$$جتا\ هـ = \frac{\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢}}{|\overleftarrow{ف}_{١}| \bullet |\overleftarrow{ف}_{٢}|} \quad ، \quad ٠ \le هـ \le \pi .$$



شكل (٩ – ١٥)

مع ملاحظة أنه إذا كان :

١) $\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} > ٠$ فإن الزاوية المحدَّدة بالمتجهين هي زاوية حادة .

٢) $\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} < ٠$ فإن الزاوية المحدَّدة بالمتجهين هي زاوية منفرجة .

مثال (٩ – ٢١) إذا كان $\overleftarrow{ف}_{١} = (٣ ، ٠)$ ، $\overleftarrow{ف}_{٢} = (٥ ، ٥)$. فأوجد قياس الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{ف}_{١}$ ، $\overleftarrow{ف}_{٢}$.

الحل

∵ $\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢} = ٣ \times ٥ + ٠ \times ٥ = ١٥$ ، $|\overleftarrow{ف}_{١}| = ٣$ ، $|\overleftarrow{ف}_{٢}| = ٥\sqrt{٢}$.

، ∵ $جتا\ هـ = \frac{\overleftarrow{ف}_{١} \bullet \overleftarrow{ف}_{٢}}{|\overleftarrow{ف}_{١}| \bullet |\overleftarrow{ف}_{٢}|} = \frac{١٥}{٣ \times ٥\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$.

∴ $هـ = ٤٥^{\circ}$.

مثال (٩ – ٢٢) إذا كانت النقاط أ(١ ، ٢) ، ب (-٢ ، ٦) ، جـ(٢ ، ٩) هي رؤوس المثلث أ ب جـ . فأحسب قياس زواياه الداخله .

الحل

∵ $جتا\ أ = \frac{\overleftarrow{أب} \bullet \overleftarrow{أجـ}}{|\overleftarrow{أب}| \bullet |\overleftarrow{أجـ}|}$

$\because \overleftarrow{\text{أجـ}} = \text{جـ} - \text{أ} = (١ ، ٧) \Leftarrow |\overleftarrow{\text{أجـ}}| = ٥ \sqrt{٢}$.

، $\because \overleftarrow{\text{أب}} \bullet \overleftarrow{\text{أجـ}} = -٣ \times ١ + ٤ \times ٧ = -٣ + ٢٨ = ٢٥$.

$\therefore \text{جتا أ} = \frac{٢٥}{٥ \times ٥\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \Leftarrow \text{ق}(\measuredangle \text{أ}) = ٤٥^\circ$.

، $\because \text{جتا ب} = \frac{\overleftarrow{\text{ب أ}} \bullet \overleftarrow{\text{ب جـ}}}{|\overleftarrow{\text{ب أ}}| \bullet |\overleftarrow{\text{ب جـ}}|}$.

، $\because \overleftarrow{\text{ب أ}} = \text{أ} - \text{ب} = (٣ ، -٤) \Leftarrow |\overleftarrow{\text{ب أ}}| = ٥$.

، $\because \overleftarrow{\text{ب جـ}} = \text{جـ} - \text{ب} = (٤ ، ٣) \Leftarrow |\overleftarrow{\text{ب جـ}}| = ٥$.

، $\because \overleftarrow{\text{ب أ}} \bullet \overleftarrow{\text{ب جـ}} = ٣ \times ٤ + (-٤) \times ٣ = ١٢ - ١٢ = ٠$.

$\therefore \overleftarrow{\text{ب أ}} \perp \overleftarrow{\text{ب جـ}} \Leftarrow \text{ق}(\measuredangle \text{ب}) = ٩٠^\circ \Leftarrow \text{ق}(\measuredangle \text{جـ}) = ٤٥^\circ$.

مثال (٩ − ٢٣)

إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}}_١ = (\text{س} ، \sqrt{٣})$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_٢ = (٢ ، -٢\sqrt{٣})$. فأوجد قيمة س إذا علمت أن قياس الزاوية المحددة بالمتجهين $\overleftarrow{\text{ف}}_١$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_٢$ تساوي ٦٠° .

الحل

$\because \overleftarrow{\text{ف}}_١ \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_٢ = ٢\text{س} - ٦$ ، $|\overleftarrow{\text{ف}}_١| = \sqrt{\text{س}^٢ + ٣}$ ، $|\overleftarrow{\text{ف}}_٢| = ٤$.

، $\because \text{هـ} = ٦٠^\circ$ نعوض في العلاقة $\overleftarrow{\text{ف}}_١ \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_٢ = |\overleftarrow{\text{ف}}_١| \bullet |\overleftarrow{\text{ف}}_٢|$ جتاهـ .

$\Leftarrow ٢\text{س} - ٦ = \sqrt{\text{س}^٢ + ٣} \times ٤ \times \text{جتا } ٦٠^\circ \Leftarrow ٢(\text{س} - ٣) = \sqrt{\text{س}^٢ + ٣} \times ٤ \times \frac{١}{٢}$.

$\Leftarrow (\text{س} - ٣) = \sqrt{\text{س}^٢ + ٣}$ بتربيع الطرفين

$\Leftarrow \text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩ = \text{س}^٢ + ٣ \Leftarrow -٦\text{س} = -٦ \Leftarrow \boxed{\text{س} = ١}$

مثال (٩ − ٢٤)

إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}}_١$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_٢$ متجهين وكان $|\overleftarrow{\text{ف}}_١| = ٤$ ، $|\overleftarrow{\text{ف}}_٢| = \sqrt{٣}$ ، وقياس الزاوية بينهما ٣٠° المطلوب :

١ − أوجد $\overleftarrow{\text{ف}}_١ \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_٢$. ٢ − أوجد $|\overleftarrow{\text{أ}}|$ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{ف}}_١ - \overleftarrow{\text{ف}}_٢$.

الحل

١ − $\because \overleftarrow{\text{ف}}_١ \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_٢ = |\overleftarrow{\text{ف}}_١| \times |\overleftarrow{\text{ف}}_٢| \text{ جتا } ٣٠^\circ$.

$\Leftarrow \overleftarrow{\text{ف}}_١ \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_٢ = ٤ \times \sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \Leftarrow \overleftarrow{\text{ف}}_١ \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_٢ = ٦$

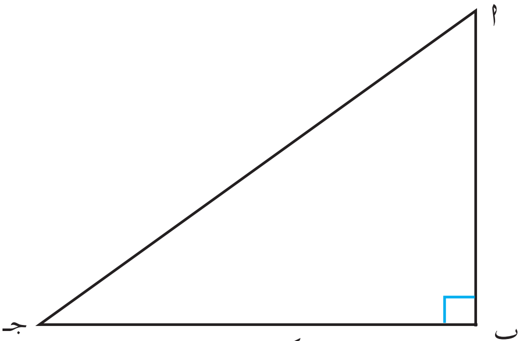
$\Leftarrow \overleftarrow{\text{أ}} \bullet \overleftarrow{\text{أ}} = (\overleftarrow{\text{ف}}_{١} - \overleftarrow{\text{ف}}_{٢})\,(\overleftarrow{\text{ف}}_{١} - \overleftarrow{\text{ف}}_{٢})$

$\Leftarrow |\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢} = \overleftarrow{\text{ف}}_{١} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{١} - \overleftarrow{\text{ف}}_{١} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} - \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{١} + \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$

$\Leftarrow |\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢} = |\overleftarrow{\text{ف}}_{١}|^{٢} - ٢\,\overleftarrow{\text{ف}}_{١} \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_{٢} + |\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}|^{٢}$.

$\Leftarrow |\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢} = (٤)^{٢} - ٢ \times ٦ + (\sqrt{٣})^{٢} = ١٦ - ١٢ + ٣ \Leftarrow |\overleftarrow{\text{أ}}|^{٢} = ٧ \Leftarrow |\overleftarrow{\text{أ}}| = \sqrt{٧}$.

مثال (٩ – ٢٥) أثبت مبرهنة فيثاغورث باستخدام المتجهات .



شكل (٩ – ١٦)

الحـــل ليكن المثلث أ ب جـ قائم في ب

[شكل (٩ – ١٦)] المطلوب : إثبات أن :

$|\text{أ جـ}|^{٢} = |\text{أ ب}|^{٢} + |\text{ب جـ}|^{٢}$.

الإثبات : ∵ $\overleftarrow{\text{أ جـ}} = \overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}$ بتربيع الطرفين .

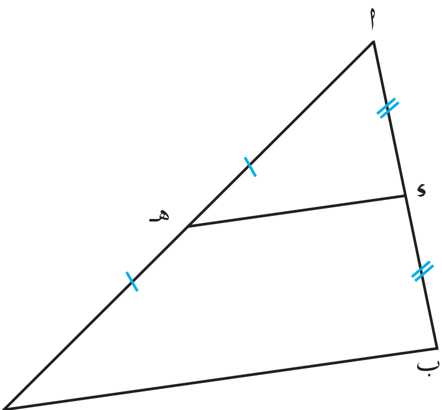
$\Leftarrow (\overleftarrow{\text{أ جـ}})^{٢} = (\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}})^{٢}$

$\Leftarrow |\overleftarrow{\text{أ جـ}}|^{٢} = |\overleftarrow{\text{أ ب}}|^{٢} + ٢\,\overleftarrow{\text{أ ب}} \bullet \overleftarrow{\text{ب جـ}} + |\overleftarrow{\text{ب جـ}}|^{٢}$

$\Leftarrow |\overleftarrow{\text{أ جـ}}|^{٢} = |\overleftarrow{\text{أ ب}}|^{٢} + ٢ \times ٠ + |\overleftarrow{\text{ب جـ}}|^{٢}$ (لأن $\overleftarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftarrow{\text{ب جـ}}$)

$\Leftarrow |\text{أ جـ}|^{٢} = |\text{أ ب}|^{٢} + |\text{ب جـ}|^{٢}$.

مثال (٩ – ٢٦) أثبت أن المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث ويساوي نصفه.



شكل (٩ – ١٧)

المعطيات : أ ب جـ مثلــث [شكل (٩ – ١٧)] ،

ء ، هـ منتصفي $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ على الترتيب .

المطلوب : إثبات ان : $\overline{\text{ء هـ}} \,/\!/\, \overline{\text{ب جـ}}$ ، $|\text{ء هـ}| = \frac{١}{٢}|\text{ب جـ}|$.

البرهان : ∵ $\overleftarrow{\text{ء هـ}} = \overleftarrow{\text{ء أ}} + \overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ــــ (١) ،

$\overleftarrow{\text{ب جـ}} = \overleftarrow{\text{ب أ}} + \overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ــــ (٢) بجمع (١) ، (٢) ينتج :

$\overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{ء هـ}} = \overleftarrow{\text{ء أ}} + \overleftarrow{\text{ب أ}} + \overleftarrow{\text{أ هـ}} + \overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ،

∵ $\overleftarrow{\text{ب أ}} = ٢\,\overleftarrow{\text{ء أ}}$ ، ∵ $\overleftarrow{\text{أ جـ}} = ٢\,\overleftarrow{\text{أ هـ}}$.

∴ $\overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{ء هـ}} = \overleftarrow{\text{ء أ}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ء أ}} + \overleftarrow{\text{أ هـ}} + ٢\,\overleftarrow{\text{أ هـ}}$.

∴ $\overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{ء هـ}} = ٣\,\overleftarrow{\text{ء أ}} + ٣\,\overleftarrow{\text{أ هـ}} = ٣\,(\overleftarrow{\text{ء أ}} + \overleftarrow{\text{أ هـ}})$ ، ∵ $\overleftarrow{\text{ء أ}} + \overleftarrow{\text{أ هـ}} = \overleftarrow{\text{ء هـ}}$

∴ $\overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{ء هـ}} = ٢\,\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ ، ∴ $\overleftarrow{\text{ب جـ}} = ٢\,\overleftarrow{\text{ء هـ}}$.

∴ $\overleftarrow{\text{ب جـ}} \,//\, \overleftarrow{\text{ء هـ}}$ ، $|\overleftarrow{\text{ب جـ}}| = ٢\,|\overleftarrow{\text{ء هـ}}|$

∴ $\overline{\text{ب جـ}} \,//\, \overline{\text{ء هـ}}$ ، $|\text{ب جـ}| = ٢\,|\text{ء هـ}|$ ∴ $|\text{ء هـ}| = \frac{١}{٢}\,|\text{ب جـ}|$.

تمارين ومسائل (٩ : ٥)

[١] أكمل ما يلي :

١ – إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}} = (\,٥ ، ١٢\,)$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_٢ = (\,-١١ ، ٤\,)$ فإن $\overleftarrow{\text{ف}}_١ \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_٢ = \ldots\ldots$

٢ – إذا كان $\overleftarrow{\text{أ ب}} \bullet \overleftarrow{\text{جـ ء}} = ٠$ فإن المتجهان .....

٣ – إذا كان $\overleftarrow{\text{ف}}_١ \,//\, \overleftarrow{\text{ف}}_٢$ فإن $\overleftarrow{\text{ف}}_١ \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_٢ = \ldots\ldots$

٤ – حاصل ضرب المتجه $\overleftarrow{\text{ف}}$ في نفسه يساوى .....

[٢] أوجد حاصل الضرب الداخلي $\overleftarrow{\text{ف}}_١ \bullet \overleftarrow{\text{ف}}_٢$ في كل من الحالات التالية :

١) $\overleftarrow{\text{ف}}_١ = (\,١ ، -١\,)$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_٢ = ٩\,\overleftarrow{\text{س}} + ١٣\,\overleftarrow{\text{ص}}$.

٢) $\overleftarrow{\text{ف}}_١ = (\,\sqrt{٣} ، ٢\,)$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_٢ = \overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}$.

٣) $\overleftarrow{\text{ف}}_١ = \overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_٢ = \overleftarrow{\text{جـ ء}}$ حيث أ (-١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٥) ، جـ (-٤ ، ٩) ، ء (٧ ، ١١)

٤) $\overleftarrow{\text{ف}}_١ = (\,-\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\,)$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_٢ = \sqrt{٢}\,\overleftarrow{\text{س}} - \sqrt{٦}\,\overleftarrow{\text{ص}}$.

٥) $\overleftarrow{\text{ف}}_١ = -٣\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_٢ = ٥\,\overleftarrow{\text{س}}$.

[٣] أوجد جيب تمام الزاوية المحدَّدة بالمتجهين $\overleftarrow{\text{ف}}_١$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_٢$ ، ثم استنتج قياسها حيث :

$\overleftarrow{\text{ف}}_١ = \overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}_٢ = ٥\,\overleftarrow{\text{س}}$.

[٤] أثبت أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، ثم أوجد قياس زاويتي أ ، جـ الداخلتين . إذا علمت أن :

أ (٤ ، ٢) ، ب (٢ ، ٠) ، جـ (-١ ، ٣) .

[٥] إذا كان $|\overleftarrow{\text{ف}}| = |\overleftarrow{\text{ص}}|$ وقياس الزاوية المحددة بالمتجهين $\overleftarrow{\text{ف}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ تساوي ٦٠° . فأوجد $\overleftarrow{\text{ف}}$.

[٦] أثبت أن $(\overleftarrow{\text{ف}}_١ - \overleftarrow{\text{ف}}_٢) \bullet (\overleftarrow{\text{ف}}_١ + \overleftarrow{\text{ف}}_٢) = |\overleftarrow{\text{ف}}_١|^٢ - |\overleftarrow{\text{ف}}_٢|^٢$.

[٧] أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ أثبت أن :

١) $|\text{أ ب}|^٢ = |\text{أ ء}| \times |\text{أ جـ}|$ ، ٢) $|\text{ب ء}|^٢ = |\text{أ ء}| \times |\text{ء جـ}|$.

١٠ : ١ الرمز (مجـ) مدلوله وخواصه

تعرفت في الصف التاسع على الرمز **مجـ** لدلالة على المجموع ويعبر عنه في بعض الكتب العربية والأجنبية بالرمز **Σ** وهو حرف أغريقي يقرأ سجماء .

فمثلاً :

$\overset{٥}{\underset{\text{ر}=١}{\text{مجـ}}}\ \text{ر} = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥$ وهذا يعني مجموع حالة المتغير (ر) من ر = ١ إلى ر = ٥ .

وكذلك $\overset{٩}{\underset{\text{ر}=٤}{\text{مجـ}}}\ \text{ر} = ٤ + ٥ + ٧ + ٨ + ٩$ ، $\overset{٢٨}{\underset{\text{ر}=١٢}{\text{مجـ}}}\ \text{ر} = ١٢ + ١٣ + ١٤ + \dots + ٢٨$

$\overset{\text{د}}{\underset{\text{ر}=١}{\text{مجـ}}}\ \text{ر} = ١ + ٢ + ٣ + \dots + \text{د}$ ، $\overset{\text{د}}{\underset{\text{ر}=٠}{\text{مجـ}}}\ \text{ر}^٢ = (٠)^٢ + (١)^٢ + (٢)^٢ + \dots + (\text{د})^٢$

$\overset{\text{د}}{\underset{\text{ر}=١}{\text{مجـ}}}\ \text{س}_{\text{ر}} = \text{س}_١ + \text{س}_٢ + \text{س}_٣ + \dots + \text{س}_{\text{د}}$.

مثال (١٠ – ١) عبر عن كل مما يأتي باستخدام الرمز مجـ .

أ) $١ + ٢ + ٣ + \dots + ١٢$.

ب) $\text{ل}_١ + \text{ل}_٢ + \text{ل}_٣ + \dots + \text{ل}_{(\text{د}-١)}$.

جـ) $٥ \times ٣^٢ + ٥ \times ٤^٢ + ٥ \times ٥^٢ + \dots + ٥ \times \text{د}^٢$.

ء) $١ \times ٣ + ٣ \times ٥ + ٥ \times ٧ + \dots + (٢\text{د} - ١)(٢\text{د} + ١)$.

الحـــل

أ) $١ + ٢ + ٣ + \dots + ١٢ = \overset{١٢}{\underset{\text{ر}=١}{\text{مجـ}}}\ \text{ر}$.

ب) $\text{ل}_١ + \text{ل}_٢ + \text{ل}_٣ + \dots + \text{ل}_{\text{د}-١} = \overset{\text{د}-١}{\underset{\text{ر}=١}{\text{مجـ}}}\ \text{ل}_{\text{ر}}$.

جـ) $٥ \times ٣^٢ + ٥ \times ٤^٢ + ٥ \times ٥^٢ + \dots + ٥ \times \text{د}^٢ = \overset{\text{د}}{\underset{\text{ر}=٣}{\text{مجـ}}}\ ٥\,\text{ر}^٢$.

ء) $١ \times ٣ + ٣ \times ٥ + ٥ \times ٧ + \dots + (٢\text{د} - ١)(٢\text{د} + ١) = \overset{\text{د}}{\underset{\text{ر}=١}{\text{مجـ}}}\ (٢\text{ر} - ١)(٢\text{ر} + ١)$.

١ – $\underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} (\text{س}_{\text{ر}} + \text{ص}_{\text{ر}}) = (\text{س}_١ + \text{ص}_١) + (\text{س}_٢ + \text{ص}_٢) + (\text{س}_٣ + \text{ص}_٣) + \ldots + (\text{س}_{\text{ن}} + \text{ص}_{\text{ن}})$.

$= (\text{س}_١ + \text{س}_٢ + \text{س}_٣ + \ldots + \text{س}_{\text{ن}}) + (\text{ص}_١ + \text{ص}_٢ + \text{ص}_٣ + \ldots + \text{ص}_{\text{ن}})$

$= \underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{س}_{\text{ر}} + \underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ص}_{\text{ر}}$.

$$\underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} (\text{س}_{\text{ر}} + \text{ص}_{\text{ر}}) = \underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{س}_{\text{ر}} + \underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ص}_{\text{ر}} \text{ ، } \text{ن} \in \text{ص}^{+}$$

٢ – $\underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{أ س}_{\text{ر}} = \text{أ س}_١ + \text{أ س}_٢ + \text{أ س}_٣ + \ldots + \text{أ س}_{\text{ن}}$

$= \text{أ} (\text{س}_١ + \text{س}_٢ + \text{س}_٣ + \ldots + \text{س}_{\text{ن}}) = \text{أ} \underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{س}_{\text{ر}}$.

$$\underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{أ س}_{\text{ر}} = \text{أ} \underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{س}_{\text{ر}} \text{ ، } \text{ن} \in \text{ص}^{+} \text{ ، } \text{أ} \in \text{ح}$$

٣ – $\underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ل} = \text{ل} + \text{ل} + \text{ل} + \ldots + \text{ل}$ (إلى ن من الحدود) $= \text{ن ل}$

$$\underset{\text{ر}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}} \text{ل} = \text{ن ل} \text{ ، } \text{ن} \in \text{ص}^{+} \text{ ، } \text{ل} \in \text{ح}$$

مثال (١٠ – ٢) أوجد قيمة كل مما يلي :

أ) $\underset{\text{ر}=٣}{\overset{٦}{\text{مجـ}}} (\text{ر} + ٤)$. ب) $\underset{\text{ر}=٠}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} ٢^{\text{ر}}$. جـ) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٨}{\text{مجـ}}} ٥$.

الحـــل

أ) $\underset{\text{ر}=٣}{\overset{٦}{\text{مجـ}}} (\text{ر} + ٤) = (٣ + ٤) + (٤ + ٤) + (٥ + ٤) + (٦ + ٤) = ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ = ٣٤$.

ب) $\underset{\text{ر}=٠}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} ٢^{\text{ر}} = ٢^٠ + ٢^١ + ٢^٢ + ٢^٣ = ١ + ٢ + ٤ + ٨ = ١٥$.

جـ) $\underset{\text{ر}=١}{\overset{٨}{\text{مجـ}}} ٥ = ٨ \times ٥ = ٤٠$.

مثال (...) عبر عن كل مما يأتي باستخدام خواص الرمز مجـ .

أ) $(ل_١ + م_١) + (ل_٢ + م_٢) + (ل_٣ + م_٣) + \dots + (ل_ن + م_ن)$.

ب) $ل_١ م_١ + ل_٢ م_٢ + ل_٣ م_٣ + \dots + ل_{ن-١} \times م_{ن-١}$.

جـ) $(س_١^٣ - ص_١) + (س_٢^٣ - ص_٢) + (س_٣^٣ - ص_٣) + \dots + (س_ن^٣ - ص_ن)$.

الحــل

أ) $(ل_١ + م_١) + (ل_٢ + م_٢) + (ل_٣ + م_٣) + \dots + (ل_ن + م_ن)$

$$\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} (ل_ر + م_ر) = \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ل_ر + \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} م_ر \ .$$

ب) $ل_١ م_١ + ل_٢ م_٢ + ل_٣ م_٣ + \dots + ل_{ن-١} \times م_{ن-١} = \underset{ر=١}{\overset{ن-١}{\text{مجـ}}} ل_ر م_ر$

جـ) $(س_١^٣ - ص_١) + (س_٢^٣ - ص_٢) + (س_٣^٣ - ص_٣) + \dots + (س_ن^٣ - ص_ن)$

$$= \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} (س_ر^٣ + ص_ر) = \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} س_ر^٣ - \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ص_ر \ .$$

مثال (١٠ - ٤) لتكن $س_١ = ٣١$ ، $س_٢ = ٢٧$ ، $س_٣ = ٣٥$ ،

$ع_١ = ٥$ ، $ع_٢ = ٧$ ، $ع_٣ = ٨$ ،

استعن بالقيم السابقة في إِيجاد قيمة ما يلي :

أ) $\underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} س_ر$. ب) $\underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} (س_ر + ع_ر)$. جـ) $\underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} (ع_ر + ٢)^٢$.

الحــل

أ) $\underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} س_ر = س_١ + س_٢ + س_٣ = ٣١ + ٢٧ + ٣٥ = ٩٣$.

ب) $\underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} (س_ر + ع_ر) = \underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} س_ر + \underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} ع_ر = ٩٣ + ٢٠ = ١١٣$.

جـ) $\underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} (ع_ر + ٢)^٢ = (٥ + ٢)^٢ + (٧ + ٢)^٢ + (٨ + ٢)^٢ = ٤٩ + ٨١ + ١٠٠ = ٢٣٠$.

[١] اكتب المقادير التالية باستخدام الرمز مجـ :

أ) $١ + ٢ + ٣ + \ldots + ٣٠$. ب) $١ + ٢ + ٣ + \ldots + ن$.

جـ) $٥ + ٦ + ٧ + \ldots + ١٢$. ء) $(٥ + ٣)^{٢} + (٦ + ٣)^{٢} + (٧ + ٣)^{٢}$.

هـ) $أ\,س_{١} + أ\,س_{٢} + أ\,س_{٣} + \ldots + أ\,س_{ن}$. و) $ع_{١}^{٢} + ع_{٢}^{٢} + ع_{٣}^{٢} + \ldots + ع_{ن}^{٢}$.

ح) $٠ + ٢ + ٤ + ٦ + \ldots + ٢ن$. ط) $٢ + ٦ + ١٠ + ١٤ + \ldots + ٢(٢ن - ١)$.

[٢] اكتب ما يلي بدون استخدام الرمز مجـ :

أ) $\underset{ر=١}{\overset{٥}{\text{مجـ}}}\ ر$. ب) $\underset{ر=٥}{\overset{٨}{\text{مجـ}}}\ ص_{ر}$. جـ) $\underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}}\ س_{ر}\,ص_{ر}$.

ء) $\underset{ر=١}{\overset{٦}{\text{مجـ}}}\ ٧$. هـ) $\underset{ر=١}{\overset{٥}{\text{مجـ}}}\ أ$. و) $\underset{ر=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}\ \frac{١}{٤}$.

ح) $\underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}}\ (س_{ر}^{٢}\,ع_{ر}^{٢})$. ط) $\underset{ر=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}\ (س_{ر} + ٤أ)$. ي) $\frac{١}{أ}\underset{ر=١}{\overset{٥}{\text{مجـ}}}\ س_{ر} + \underset{ر=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}\ ٢$.

[٣] لتكن $س_{١} = ٥$ ، $س_{٢} = ٦$ ، $س_{٣} = ١٢$ ، $س_{٤} = ١٥$ ،

$ع_{١} = ٢$ ، $ع_{٢} = ٣$ ، $ع_{٣} = ٧$ ، $ع_{٤} = ٨$ ،

استعن بالقيم السابقة في إِيجاد قيمة ما يلي :

أ) $\underset{ر=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}\ (س_{ر} + ع_{ر} + ٣)$. ب) $\underset{ر=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}\ ع_{ر}^{٢}$.

جـ) $\underset{ر=١}{\overset{٢}{\text{مجـ}}}\ (س_{ر} + ٥)^{٢}$. ء) $\underset{ر=١}{\overset{٢}{\text{مجـ}}}\ (ع_{ر} - ٢)^{٢}$.

هـ) $\underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}}\ س_{ر}\,ع_{ر}$. و) $\underset{ر=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}}\ (س_{ر} - ٣ع_{ر})^{٢}$.

١٠ : ٢ مقاييس النزعة المركزية

تعد مقاييس النزعة المركزية في طليعة المقاييس الوصفية الهامة وهي مقاييس لتحديد موضع أو موقع أو مكان تمركز القيم حول قيمة معينة لذلك سميت بمقاييس النزعة المركزية ، وبوجه عام ما هي إِلاَّ محاولة لتلخيص البيانات الإِحصائية عن غيرها ، ومن مقاييس النزعة المركزية نذكر :

– المنوال وهو القيمة التي تظهر تكرارها أكثر من غيرها بين القيم ، وهو أقل أهمية من المقياسين السابقين .

أولاً : المتوسط الحسابي ($\overline{\text{س}}$) :

المتوسط الحسابي لمجموعة (ن) من القيم س_1 ، س_2 ، س_3 ، ... ، $\text{س}_{\text{ن}}$ يساوى مجموع هذه القيم مقسوماً على عددها ، أي أن :

$$\overline{\text{س}} = \frac{\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 + \dots + \text{س}_{\text{ن}}}{\text{ن}}$$

وهذا يكافئ التعبير :

$$\boxed{\overline{\text{س}} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}}{\text{ن}}}$$

حيث $\overline{\text{س}}$ المتوسط الحسابي ، ن عدد القيم ، $\text{س}_{\text{ر}}$ القيم المختلفة ، ر دليل رقم القيم ، وفي حالة البيانات التي نظمت في جداول تكرارية (البيانات المبوبة) يكون المتوسط الحسابي :

$$\boxed{\overline{\text{س}} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \text{ك}_{\text{ر}} \times \text{س}_{\text{ر}}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \text{ك}_{\text{ر}}}}$$

حيث $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \text{ك}_{\text{ر}}$ هو مجموع التكرارات ، $\text{ك}_{\text{ر}}$ تكرار الفئات ، $\text{س}_{\text{ر}}$ مركز الفئة .

ثانياً : الوسيط :

الوسيط لمجموعة من القيم مرتبة تصاعدياً أو تنازلياً هو العدد الأوسط منها ويحدد ذلك في حالتين :

١ – إذا كان عدد القيم ن فردية فهناك وسيط واحد رتبته هي $\frac{\text{ن} + 1}{2}$.

٢ – إذا كان عدد القيم ن زوجياً فهناك وسيطين رتبتاهما هي $\frac{\text{ن}}{2}$ ، $\frac{\text{ن}}{2} + 1$ ويكون الوسيط هو المتوسط الحسابي لهذين الوسيطين ، وفي حالة الجداول التكرارية يكون الوسيط و :

أ) في حالة التكرار المتجمع الصاعد :

$$\boxed{\textbf{الوسيط} \ (\text{و}) = \text{أ} + \frac{\frac{\text{ن}}{2} - \text{ك}_1}{\text{ك}_2} \times \text{ل}}$$

حيث أ = الحد الأدنى للفئة الوسيطية ، ن التكرار الكلي .

ك_1 = التكرار المتجمع التصاعدي للفئة السابقة للفئة الوسيطية .

ك_2 = تكرار الفئة الوسيطية ، ل = طول الفئة .

ب) في حالة التكرار المتجمع النازل :

$$\boxed{\textbf{الوسيط} \ (\text{و}) = \text{ب} - \frac{\frac{\text{ن}}{2} - \text{ك}_3}{\text{ك}} \times \text{ل}}$$

حيث ب = الحد الأعلى للفئة الوسيطية .

$ن$ = التكرار الكلي ، $ك_3$ = التكرار المتجمع التنازلي للفئة اللاحقة للفئة الوسيطية ، $ك_2$ تكرار الفئة الوسيطية ، ل = طول الفئة الوسيطية .

ثالثاً : المنوال :

المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً في التوزيع وفي حالة الجداول التكرارية يكون المنوال هو مركز الفئة المنوالية (المناظرة الأكثر تكرار) .

مثال (١٠ – ٥) فيما يلي درجات ١٠ طلاب في مادة اللغة العربية (الدرجة العظمى ٣٠)

١٥ ، ١٢ ، ١٩ ، ٢٥ ، ١٨ ، ٢٧ ، ١٨ ، ٢٢ ، ٢١ ، ١٨ .

أوجد كلاًّ من المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لهذه الدرجات .

الحل

المتوسط الحسابي : $\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{10} س_ر}{ن} = \frac{١٥ + ١٢ + ١٩ + ... + ١٨}{١٠} = \frac{١٩٥}{١٠} = ١٩{,}٥$

ولإيجاد الوسيط نرتب درجات الطلبة تصاعدياً كما يلي :

١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٨ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢٧ حيث إن عدد القيم زوجية فيكون رتب العددين الأوسطين هي $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢} + ١$ أي أن رتب هذين العددين هي ٥ ، ٦ ، وبالتالي ، فإن العددين هما ١٨ ، ١٩ .

$\therefore$ الوسيط $= \frac{١٨ + ١٩}{٢} = \frac{٣٧}{٢} = ١٨{,}٥$.

المنوال = ١٨ وهي الدرجة الأكثر تكراراً .

مثال (١٠ – ٦) أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لبيانات الجدول التكراري التالي والتي تمثل أعمار ٣٠ مريضاً زاروا طبيب العيون .

الفئة العمرية	١٢ – ٢٠	٢١ – ٢٩	٣٠ – ٣٨	٣٩ – ٤٧	٤٨ – ٥٦	٥٧ – ٦٥
التكرار	٤	٢	٣	٧	٩	٥

نكوِّن الجدول التالي :

الفئات	مركز الفئة $س_ر$	التكرارات $ك_ر$	مركز الفئة × التكرارات $س_ر × ك_ر$	التكرار المتجمع الصاعد
١٢ – ٢٠	$\frac{١٢ + ٢٠}{٢} = ١٦$	٤	٦٤	٤
٢١ – ٢٩	٢٥	٢	٥٠	٦
٣٠ – ٣٨	٣٤	٣	١٠٢	$\boxed{٩} \to ك_١$
				$\boxed{\frac{د}{٢} = ١٥}$
أ $\to \boxed{٣٩}$ – ٤٧	٤٣	$\boxed{٧} \to ك_٢$	٣٠١	١٦
٤٨ – ٥٦	٥٢	٩	٤٦٨	٢٥
٥٧ – ٦٥	٦١	٥	٣٠٥	٣٠
المجموع		٣٠	١٢٩٠	

المتوسط الحسابي $\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{٦} س_ر × ك_ر}{\sum_{ر=١}^{٦} ك_ر} = \frac{١٢٩٠}{٣٠} = ٤٣$.

ولإيجاد الوسيط في الجدول التكراري نحدد أولاً رتبة الوسيط (و) $= \frac{د}{٢} = \frac{٣٠}{٢} = ١٥$.

$ك_١ = ٩$ التكرار المتجمع الصاعد والسابق للفئة الوسيط .

$ك_٢ = ٧$ التكرار للفئة الوسيطية. الفئة التي تناظر $ك_٢$ هي (٣٩ – ٤٧) فتكون : أ = ٣٩ ، ل = ٩ .

∴ الوسيط (و) $= أ + \frac{\frac{د}{٢} - ك_١}{ك_٢} × ل = ٣٩ + \frac{١٥ - ٩}{٧} × ٩$

$= ٣٩ + \frac{٦}{٧} × ٩ = ٣٩ + \frac{٥٤}{٧} = ٤٦{,}٧$.

المنوال = مركز الفئة المناظرة الأكثر تكراراً ، وهي (٤٨ – ٥٦) .

∴ المنوال $= \frac{٤٨ + ٥٦}{٢} = \frac{١٠٤}{٢} = ٥٢$.

تمارين ومسائل (١٠ : ٢)

[١] أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لكل مما يأتي :

أ) ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٢ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣١ ، ٣٢ .   ب) ٣ ، ٤٢ ، ٤٠ ، ٤٢ ، ٤٤ ، ٤١ .

جـ) ٦٠ ، ٥٥ ، ٥٢ ، ٦٢ ، ٥٥ ، ٦٠ ، ٦٣ ، ٥٧

[٢] أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال للتوزيع التالي :

المشاهدة	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
التكرار	٤	٣	٩	٥	٢	١

[٣] جدول التكرار التالي يبين أطوال ١٠٠ طالب مقاسة بالسنتميترات .

أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لأطوال هؤلاء الطلبة .

الفئة	التكرار
١٤١ – ١٤٥	٥
١٤٦ – ١٥٠	٢٠
١٥١ – ١٥٥	٤٢
١٥٦ – ١٦٠	٢٥
١٦١ – ١٦٥	٨
المجموع	١٠٠

[٤] حصل (٣٠) طالباً على الدرجات التالية في الاختبار لمادة الرياضيات (الدرجة العظمى ١٥ درجة) وكان توزيع الدرجات على النحو التالي :

١١	١٢	٦	٦	١٣	١٢	١٢	٩	١٠	١١
٩	٩	١٠	٦	١١	١١	١٠	١٠	٨	١٣
٨	٧	٦	٦	٧	٧	١١	٦	١٣	١١

أ) كوّن جدول توزيع تكراري لدرجات الطلبة .

ب) أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لتوزيع درجات هؤلاء الطلبة .

١٠ : ٣ مقاييس التشتت

رغم أهمية مقاييس النزعة المركزية (المتوسط والوسيط والمنوال) لإعطاء وصفٍ أو مؤشرٍ للظواهر أو البيانات من خلال نقطة واحدة تتمركز عليها القيم تعبر عن تلك المشاهدات أو المفردات ضمن مجموعة من البيانات ، إلاّ أن هذه المقاييس وحدها قد لاتكفي فمثلاً إذا كان لدينا مجموعتان من القيم :

قيم المجموعة الأولى هي ٢٣ ، ٦٠ ، ١٠١ ، ٦٠

قيم المجموعة الثانية هي ٥٧ ، ٦٠ ، ٦٦ ، ٦٠

نلاحظ أن المجموعتين لهما المتوسط الحسابي نفسه وهو (٦١) ، وكذلك لهما الوسيط نفسه وهو (٦٠) ولهما منوال واحد هو (٦٠) .

وعلى الرغم من ذلك فلانستطيع القول بأن المجموعتين متكافئتان فقيم المجموعة الأولى متباعدة بينما قيم

مقاييس أخرى تسمى مقاييس التشتت ، والتشتت هو تباعد أو تبعثر القيم في التوزيع عن بعضها البعض ، وكلما تباعدت القيم عن بعضها يكون التوزيع أكثر تشتتاً ، وكلما تقاربت من بعضها يكون التوزيع أقل تشتتاً .

ومن أهم مقاييس التشتت المدى والانحراف المتوسط والتباين والانحراف المعياري وفيما يلي نقدم تعريفاً وامثله لكل من هذه المقاييس .

أولاً – المدى :

تعريف (١٠ : ١)

المدى هو الفرق بين أعلى قيمة وأدنى قيمة في التوزيع ويعطي بالعلاقة :

المدى = أعلى قيمة – أصغرى قيمة .

وفي حالة الجداول التكرارية يكون :

المدى هو الفرق بين الحد الأعلى لأخر فئة والحد الأدنى لأول فئة في التوزيع أي أن :

المدى = الحد الأعلى لأخر فئة – الحد الأدنى لأول فئة .

مثال (١٠ – ٧) اكتب المدى لكل مما يلي :

أ) ٤ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ .

ب) ٢ ، ٤ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٩ .

الحــل

أ) المدى = ١٠ – ٤ = ٦ .

ب) المدى = ١٩ – ٢ = ١٧ .

مثال (١٠ – ٨) الجدول التالي يمثل أعمار ٥٤ طالباً لأقرب سنة :

فئة الأعمار	٦ – ٨	٩ – ١١	١٢ – ١٤	١٥ – ١٧
التــكــرار	١٢	١٧	١٥	١٠

أوجد المدى لأعمار الطلبة الموضحة في الجدول اعلاه .

الحــل

الحد الأعلى للفئة الأخيرة = ١٧,٥

الحد الأدنى للفئة الأولى = ٥,٥

∴ المدى = ١٧,٥ – ٥,٥ = ١٢ .

يعطي حساب المدى فكرة سريعة عن تقارب أو تباعد القيم إلاّ أنه يتأثر بالقيم المتطرفة لذلك فهو أقل مقاييس التشتت دقه وكفاءة ، وبالتالي أقلها ثباتاً وصدقاً .

التشتت هي الانحراف المتوسط والتباين والانحراف المعياري ، وهي أهم مقاييس التشتت وأكثرها دقة لأنها تتعامل مع كل قيمة من قيم المشاهدات .

ثانياً – الانحراف المتوسط :

هو مقايس يستدل منه على الشكل الذي تتوزع به المشاهدات حول متوسطها الحسابي وفي الحقيقة أن هذا المقياس يستخدم لقياس التباين ونحن عند دراستنا للإحصاء قد نحتاج أحياناً إلى أجراء بعض التحويلات الخطية على العلامات الخام والتعبير عنها بصورة أخرى والعلامة الانحرافية هي بعد العلامة الخام عن المتوسط الحسابي للتوزيع ويرمز لها بالرمز ($ح_ر$) أي أن $ح_ر = س_ر - \bar{س}$ والعلامات الانحرافية ($ح_ر$) قد تكون موجبة أو سالبة أو صفر ويكون المجموع الجبري لها يساوي صفراً دائماً .

ويتم حساب الانحرافات المتوسطة بأخذ القيم المطلقة لكل مشاهدة (أو مركز الفئة) عن متوسطها الحسابي أي أن $|ح_ر| = |س_ر - \bar{س}|$ لكل مشاهدة ثم بعد ذلك نوجد المتوسط الحسابي لهذه الانحرافات المطلقة فيكون هذا المتوسط الناتج لكل الانحرافات هو متوسط انحرافات المشاهدات عن متوسطها الحسابي ويرمز لها بالرمز ($\bar{ح}_ر$)

أي أن :
$$\bar{ح}_ر = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} |س_ر - \bar{س}|}{ن} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} |ح_ر|}{ن} .$$

حيث $ن$ = عدد المشاهدات ، $\bar{س}$ المتوسط الحسابي للمشاهدات وكلما صغرت قيمة هذا المتوسط كلَّما اقتربت المشاهدات من متوسطها الحسابي وكلَّما كبرت كلَّما ابتعدت عنه أي أن هذا المتوسط (متوسط الانحرافات) يعتبر بمثابة دليل أو مؤشر على قرب أو بعد المشاهدات عن متوسطها الحسابي .

مثال (١٠ – ٩) أوجد متوسط انحرافات البيانات التالية :

١٥ ، ٣١ ، ٢٨ ، ٤٣ ، ٢٢ ، ٥٠ ، ١٩ ، ٣٧ ، ٢٥ ، ١٧ .

الحـــل

أولاً : نحسب المتوسط الحسابي لهذه البيانات .

$$\bar{س} = \frac{١٥ + ٣١ + ٢٨ + ٤٣ + ٢٢ + ٥٠ + ١٩ + ٣٧ + ٢٥ + ١٧}{١٠} = \frac{٢٨٨}{١٠} = ٢٨٫٨ .$$

ثانياً : نوجد الانحرافات المطلقة لكل قيمة من القيم عن متوسطها الحسابي :

$|ح_١| = |١٥ - ٢٨٫٨| = ١٣٫٨$ ، $|ح_٢| = |٣١ - ٢٨٫٨| = ٢٫٢$ ،

$|ح_٣| = |٢٨ - ٢٨٫٨| = ٠٫٨$ ، ... وهكذا حتى $|ح_{١٠}| = |١٧ - ٢٨٫٨| = ١١٫٨$.

$$\therefore \quad \overline{\text{ح}} = \frac{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{10} |\text{ح}_{\text{ر}}|}{10} = \frac{13{,}8 + 2{,}2 + 0{,}8 + 14{,}2 + 6{,}8 + 21{,}2 + 9{,}8 + 8{,}2 + 3{,}8 + 1{,}8}{10}$$

$$= \frac{92{,}6}{10} = 9{,}26 \; .$$

وفي حالة التوزيعات التكرارية نحسب متوسط الانحراف بالعلاقة :

$$\overline{\text{س}} = \frac{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{ر}} \times \text{س}_{\text{ر}}}{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{ر}}} \; .$$

حيث $\text{س}_{\text{ر}}$ مركز الفئة ، $\text{ك}_{\text{ر}}$ تكرار الفئة ، ثم نحسب الانحراف المتوسط من العلاقة :

$$- \quad \frac{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{ر}} |\text{ح}_{\text{ر}}|}{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{ر}}}$$

مثال (١٠-١٠) الجدول التالي يمثل توزيع أعمار ٣٠ معلماً بالسنوات أكمل الجدول ، ثم احسب انحراف المتوسط لأعمار هؤلاء المعلمين :

العمر بالسنة	التكرار ك	مركز الفئة $\text{س}_{\text{ر}}$	$\text{س}_{\text{ر}} \times \text{ك}_{\text{ر}}$	$|\text{ح}|$	$\text{ك}_{\text{ر}} \times |\text{ح}|$
٢٥ – ٢٧	١				
٢٨ – ٣٠	٣				
٣٠ – ٣٣	٤				
٣٤ – ٣٦	٧				
٣٧ – ٣٩	٥				
٤٠ – ٤٢	٤				
٤٣ – ٤٥	٣				
٤٦ – ٤٨	٢				
٤٩ – ٥١	١				
المجموع	٣٠				

	ك	$س_ر$	$ك_ر \times س_ر$	$\lvert ح \rvert$	$ك_ر \lvert ح \rvert$
٢٥ – ٢٧	١	٢٦	٢٦	١١	١١
٢٨ – ٣٠	٣	٢٩	٨٧	٨	٢٤
٣١ – ٣٣	٤	٣٢	١٢٨	٥	٢٠
٣٤ – ٣٦	٧	٣٥	٢٤٥	٢	١٤
٣٧ – ٣٩	٥	٣٨	١٩٠	١	٥
٤٠ – ٤٢	٤	٤١	١٦٤	٤	١٦
٤٣ – ٤٥	٣	٤٢	١٢٦	٥	١٥
٤٦ – ٤٨	٢	٤٧	٩٤	١٠	٢٠
٤٩ – ٥١	١	٥٠	٥٠	١٣	١٣
المجموع	٣٠		١١١٠		١٣٨

انحراف المتوسط $\bar{ح} = \dfrac{\sum_{ر=١}^{٩} ك_ر \times \lvert ح_ر \rvert}{\sum_{ر=١}^{٩} ك_ر} = \dfrac{١٣٨}{٣٠} = ٤{,}٦$.

التباين والانحراف المعياري :

تعريف (١٠ : ٢)

يعرف التباين بأنه مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي مقسوم على عدد القيم ناقص واحد ويرمز له بالرمز ($ع^٢$) .

ويعبر عنه رمزياً بالصورة :

$$ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢}{ن - ١} .$$

حيث $ع^٢$ التباين ، س القيم المختلفة ، $\bar{س}$ المتوسط الحسابي ، ن عدد القيم .

أما الانحراف المعياري فهو الجذر التربيعي للتباين .

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{ع^٢} = ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س - \bar{س})^٢}{ن - ١}}$$

وفي حالة البيانات المنظمة في جداول تكرار نجد أن التباين هو : $ع^٢ = \dfrac{\sum_{ر=١}^{ن} (س - \bar{س})^٢ \times ك_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ك - ١}$

حيث ك هو التكرار .

أوجد التباين والانحراف المعياري للقيم التالي : ١٢ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٧ ، ١٨ .

الحل

لحساب التباين نوجد أولاً الوسط الحسابي للقيم $\overline{\text{س}} = \dfrac{١٢ + ١٣ + ١٥ + ١٧ + ١٨}{٥} = \dfrac{٧٥}{٥} = ١٥$.

ثم نكوّن الجدول التالي :

قيمة س	س − $\overline{\text{س}}$	$(\text{س} - \overline{\text{س}})^{٢}$
١٢	−٣	٩
١٣	−٢	٤
١٥	٠	٠
١٧	٢	٤
١٩	٤	١٦
	مجـ $(\text{س} - \overline{\text{س}})^{٢}$	٣٣

$$\text{التباين} = \frac{\text{مجـ}(\text{س} - \overline{\text{س}})^{٢}}{\text{ن} - ١} = \frac{٣٣}{٤} = ٨{,}٢٥ .$$

$$\therefore \text{الانحراف المعياري} = \sqrt{٨{,}٢٥} \approx ٢{,}٨٧$$

مثال (١٠−١٢) الجدول التكراري التالي يمثل درجات ٢٠ طالباً في اختبار لمادة الرياضيات (الدرجة العظمى ١٠ درجات) .

الدرجة	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
التكرار	١	٤	٣	٣	٥	٣	١

أوجد التباين والانحراف المعياري لدرجات هؤلاء الطلبة

الحل

لحساب التباين والانحراف المعياري نكوّن الجدول التالي :

الدرجة س	التكرار ك	س × ك	(س − $\overline{\text{س}}$)	$(\text{س} - \overline{\text{س}})^{٢}$	$(\text{س} - \overline{\text{س}})^{٢} \times$ ك
٣	١	٣	−٣	٩	٩
٤	٤	١٦	−٢	٤	١٦
٥	٣	١٥	−١	١	٣
٦	٣	١٨	٠	٠	٠
٧	٥	٣٥	١	١	٥
٨	٣	٢٤	٢	٤	١٢
٩	١	٩	٣	٩	٩
المجموع	٢٠	١٢٠		٢٨	٥٤

$$\text{المتوسط الحسابي } \overline{\text{س}} = \frac{\text{مجـ}_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} \times \text{ك}_{\text{ر}}}{\text{مجـ ك}_{\text{ر}}} = \frac{١٢٠}{٢٠} = ٦$$

$$\text{التباين } \text{ع}^{٢} = \frac{\text{مجـ}(\text{س} - \overline{\text{س}})^{٢} \times \text{ك}_{\text{ر}}}{\text{مجـ ك}_{\text{ر}} - ١} = \frac{٥٤}{١٩} = ٢{,}٨$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\text{ع}^{٢}} = \sqrt{٢{,}٨} \approx ١{,}٧ .$$

المعياري لدرجة هؤلاء الطلبة .

الفئة	(٣ – ٥)	(٦ – ٨)	(٩ – ١١)	(١٢ – ١٤)	(١٥ – ١٧)	(١٨ – ٢٠)
التكرار	١	٣	٦	١٠	٨	٢

حيث إن المتوسط الحسابي لدرجات هؤلاء الطلبة هو ١٢,٥ .

الحل

نكوّن الجدول التالي :

الفئة	مركز الفئة س	التكرار ك	س × ك	(س – $\overline{س}$)	(س – $\overline{س}$)^٢	(س – $\overline{س}$)^٢ × ك
٣ – ٥	٤	١	٤	–٨,٥	٧٢,٢٥	٧٢,٢٥
٦ – ٨	٧	٣	٢١	–٥,٥	٣٠,٢٥	٩٠,٧٥
٩ – ١١	٩	٦	٥٤	–٣,٥	١٢,٢٥	٧٣,٥٠
١٢ – ١٤	١٣	١٠	١٣٠	٠,٥	٠,٢٥	٢,٥٠
١٥ – ١٧	١٦	٨	١٢٨	٣,٥	١٢,٢٥	٩٨,٠٠
١٨ – ٢٠	١٩	٢	٣٨	٦,٥	٤٢,٢٥	٨٤,٥٠
المجموع		٣٠	٣٧٥		١٦٩,٥	٤٢١,٥٠

$$\text{التباين } ع^٢ = \frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^٢ \times ك}{\text{مجـ } ك - ١} = \frac{٤٢١,٥٠}{٢٩} = ١٤,٥ \; .$$

$$\therefore \text{الانحراف المعياري} = \sqrt{ع^٢} \approx ٣,٨ \; .$$

تمارين ومسائل (١٠ : ٣)

[١] أوجد المدى والتباين والانحراف المعياري للقيم التالية :

أ) ٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٣ . ب) ٢٢ ، ١٨ ، ٢٥ ، ١٩ ، ٦ .

جـ) ٤ ، ٦ ، ٦ ، ٧ ، ٧ ، ٦ . ء) ٥٢ ، ٥٦ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٢ .

[٢] أضف العدد ٣ إلى كل من الأعداد الآتية : ٣ ، ٦ ، ٢ ، ١ ، ٧ ، ٥ أثبت أن هذه الإضافة لاتؤثر على قيمة التباين .

[٣] احسب الانحراف المتوسط لكل من القياسات التالية :

أ) ٦٥ ، ٦٣ ، ٦٢ ، ٦٧ . ب) ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٩ .

[٤] الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري لوزن ٣٠ طفلاً لأقرب كيلوجرام .

الدرجة	٢ – ٤	٥ – ٧	٨ – ١٠	١١ – ١٣
التكرار	٥	٨	١٢	٥

أوجد ﺃ) المدى . ب) الانحراف المتوسط .

جـ) التباين والانحراف المعياري لأوزان الأطفال .

[٥] أوجد المدى والتباين والانحراف المعياري لدرجات ١٢٠ طالباً موزعة كما يلي :

الدرجة	٢٥	٢٧	٣١	٣٣	٣٨	٤٠	٤٢	٤٥	٤٦	٥٠
التكرار	٥	١٠	١٢	١٥	١٩	١٥	١١	٨	٦	٢

[٦] البيانات التالية درجات ٦٠ طالب في مادة العلوم (الدرجة العظمى ٣٠ درجة) .

١٢ ، ١٩ ، ١٦ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢٥ ، ٢٠ ، ١٨ ، ٢٠ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ١٩

٢٥ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ٢٢ ، ٢٧ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٧ ، ١١ ، ١٨ ، ٢٢ ، ١٨ ، ١٩

٢٠ ، ٢٠ ، ٢٦ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ١٢ ، ١٠ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٥ ، ٢٨ ، ١٦ ، ١٥ ، ١٧

٢٢ ، ١٦ ، ٢١ ، ٢٥ ، ٢٩ ، ٢٤ ، ١٩ ، ١٧ ، ١٣ ، ١٢ ، ٢٨ ، ١٦ ، ١٧ ، ٢٧

١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ .

كوّن جدولاً تكرارياً لدرجات الطلبة بالفئات بحيث يكون طول الفئة = ٥ ، ثم أوجد المدى والتباين لدرجات هؤلاء الطلبة .