الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات 8 ب

للصف الثامن من مرحلة التعليم الأساسي

الجزء الثاني

فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش

د. أمة الآله علي حمد الحوري — د. محمد عبدالرب محمد بشر
د. ردمان محمد سعيد — د. علي شاهر نعمان القرشي
د. منصور علي صالح عطاء — د. محمد رشاد الكوري
أ. مريم عبدالجبار سلمان — د.عبدالله سلطان عبدالغني الصلاحي
د. محمد علي مرشد — أ. سالمين محمد باسلوم
أ. يحيى بكار مصفر — أ. ذا النون سعيد طه
أ. عبدالباري طه حيدر — أ. مصطفى عبد الواحد العبسي
أ. عبده أحمد سيف — أ. جميلة إبراهيم احمد
د. علي عبدالواحد — أ. أحمد سالم باحويرث

الإخراج الفني

الصف الطباعي والتصميم / جلال سلطان علي إبراهيم.
إدخال تعديلات / علي عبدالله السلفي.

أشرف على التصميم / حامد عبد العالم الشيباني

١٤٣٥هـ – ٢٠١٤م

النشيد الوطني

ردّدي أيتها الدنيا نشيدي ردّديه وأعيدي وأعيدي
واذكري في فرحتي كل شهيدِ وامنحيه حُللاً مِنْ ضوءِ عيدي

ردّدي أيتها الدنيا نشيدي
ردّدي أيتها الدنيا نشيدي

وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي أنت عهدٌ عالقٌ في كل ذمّة
رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُهُ من كل شمس اُخْلُدِي خافِقَةً في كل قِمَّة
أمتي .. أمتي .. اِمنحيني البأس يا مصدر بأسي واذخُريني لكِ يا أكرمَ أمة

عشتُ إيماني وحبّي أمميًا
ومسيري فوق دربي عربيا
وسيبقى نبضُ قلبي يمنيا
لن ترى الدنيا على أرضي وصيا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

د. عبدالله عبده الحامدي.	أ/ علي حسين الحيمي.
د/ صالح ناصر الصوفي.	د/ أحمد علي المعمري.
أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.	أ.د/ صالح عوض عرم.
أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.	د/ إبراهيم محمد الحوثي.
د/ عبدالله علي أبو حورية.	د/ شكيب محمد باجرش.
د/ عبدالله لملس.	أ.د/ داوود عبدالملك الحدابي.
أ/ منصور علي مقبل.	أ/ محمد هادي طواف.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.	أ.د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
أ.د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.	أ/ محمد عبدالله زبارة.
أ.د/ محمد حاتم المخلافي.	أ/ عبدالله علي إسماعيل.

د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

قررت اللجنة العليا للمناهج طباعة هذا الكتاب .

بسم الله الرحمن الرحيم

تقـــديـــم :

في إطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية.

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات.

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها: الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبمايتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي.

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها.

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدروسة لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية.

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول
وزير التربية والتعليم
رئيس اللجنة العليا للمناهج

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمــة

الحمد لله رب العالمين،والصلاة والسلام على خاتم النبيين ، وآله وصحبه أجمعين .

لقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المناهج التعليمية لمرحلة التعليم الأساسي وفق أسس علمية وتربوية . وبعد كتاب الصف السابع يأتي كتاب الصف الثامن لمواكبة هذا التطوير .

وفي هذا الكتاب يجد أبناؤنا الطلبه مادة الرياضيات معروضة لهم باساليب وقوالب جديدة تساعدهم على سرعة الفهم والاستيعاب ، وتسهل لهم التعامل مع المادة وتحفزهم على حبها ، كما تنمي فيهم القدرات التفكيرية وتوسع ثقافتهم العلمية .

إن الكتاب غني بالشرح والأمثلة إلى جانب الأنشطة والتدريبات لكل درس، والتمارين العامة لكل وحدة دراسية ، ولذا على أبنائنا الطلبة بذل أقصى جهودهم والاستفادة من توجيهات المدرسين ، والدراسة المتمعنة للمادة المقدمة وتتبعها بدقة وحل أكبر قد ر من التمارين والمسائل ، وهذا من شأنه ترسيخ المعرفة الرياضية في أذهانهم وإِكسابهم المهارات الكافية للأستمرار في التعلم .

وفي هذا الكتاب نقـدم لأبنائنا الطلبة مادة الرياضيات بأسلوب واضح سهل يتناسب ومستويات الطلبة وقدراتهم وبدقة علمية مع مراعاة جوانبها التربوية، ولذا تضمنت وحدا ت الكتاب تعاريف رياضية دقيقة ولكنها مبسطة ، واحتوت على برهنة رياضية ولكنها متدرجة . وترابطت المواضيع في بناء منطقي متسلسل يساعد أبنائنا على التقدم الراسخ في تعلم المادة كما تم تقديم المادة بلغة مبسطة شيقة ومدعومة بالأشكال والتوضيحات الكافية ترغيباً لهم في المادة ، وعلى طريق تحقيق الطموح العلمي المنشود .

والله وراء القصد وهو ولي التوفيق ،،،

المؤلفــون

المحتويات

الموضوع		الصفحة

الوحدة السادسة : النسبة والتناسب

٦–١	مراجعة	٧
٦–٢	خواص التناسب	١٠
٦–٣	تقسيم قطعة مستقيمة معلومة بنسبة معلومة	١٧
٦–٤	مبرهنة طاليس	٢٣
٦–٥	نتيجة على مبرهنة طاليس	٣١
٦–٦	المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية مثلث	٣٦
٦–٧	التشابه	٤٤
٦–٨	تشابه المثلثات	٥١
٦–٩	تمارين عامة ومسائل	٦٢
٦–١٠	اختبار الوحدة	

الوحدة السابعة : الهندسة

٧–١	العلاقات بين أضلاع المثلث وزواياه	٦٥
٧–٢	القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث	٧٠
٧–٣	القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر	٧٤
٧–٤	الضلع المقابل للزاوية ٣٠° في المثلث القائم	٧٧
٧–٥	متوسطات المثلث	٧٩
٧–٦	ارتفاعات المثلث	٨٣

تابع المحتويات

الموضوع		الصفحة
٧–٧	تكافؤ المثلثات	٨٧
٧–٨	تكافؤ متوازي الأضلاع	٩٤
٧–٩	تمارين ومسائل عامة	٩٨
٧–١٠	اختبار الوحدة	١٠١
الوحدة الثامنة : القيـــاس		
٨–١	الهرم	١٠٣
٨–٢	المخروط	١٠٥
٨–٣	حجم الكرة ومساحة سطحها	١٠٩
٨–٤	تمارين عامة ومسائل	١١٣
٨–٥	اختبار الوحدة	١١٤
الوحدة التاسعة : الإحصــاء		
٩–١	قراءة الجداول والأشكال البيانية	١١٥
٩–٢	جدولة البيانات	١٢١
٩–٣	تمثيل البيانات الإحصائية	١٢٤
٩–٤	تمارين عامة	١٣٢
٩–٥	اختبار الوحدة	١٣٥

الوحدة السادسة
النسبة والتناسب

٦ : ١ مراجعة

درست سابقاً النسبة والتناسب وعرفت أن النسبة هي مقارنة بين كميتين من نوع واحد .

تذكر :

نسبة ا إلى ب هي $\frac{ا}{ب}$ (أو ا : ب) حيث ب ≠ ٠ ، ويسمى ا مقدم النسبة ، يسمى ب تالي النسبة .

في الشكل (٦ – ١) :

نسبة طول $\overline{اب}$ إلى طول $\overline{جـ ء}$

هي $\frac{٤}{٦}$ وتعلم أن : $\frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ لذلك

شكل (٦ – ١)

نقول أن الأعداد ٤ ، ٦، ٢ ، ٣، بهذا الترتيب متناسبة، ويسمى تساوي نسبتين تناسباً .

وبصورة عامة :

إذا كانت النسبتان $\frac{ا}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ء}$ متساويتين فإننا نكتب ذلك على النحو التالي :

$\frac{ا}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ (أو ا : ب = جـ : ء) ونسمي هذا تناسباً . نسمى ا ، ء طرفي التناسب ، ونسمي ب ، جـ وسطي التناسب وتسمى الكميات ا ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة .

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ فإن أ × ء = ب × جـ

وكذلك إذا كان أ × ء = ب فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$

أي أن حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين وتسمى هذه القاعدة (قاعدة الضرب التبادلي) .

مثال (١)

بيّن أياً من أزواج النسب التالية يشكل تناسباً :

أ) $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{١١}{١٢}$ ، ب) $\frac{٠,٥}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$.

الحــل :

بتطبيق قاعدة الضرب التبادلي :

أ) ٥ × ١٢ = ٦٠ ، ٦ × ١١ = ٦٦

∵ ٥ × ١٢ ≠ ٦ × ١١ ∴ $\frac{٥}{٦} \neq \frac{١١}{١٢}$.

إذن $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{١١}{١٢}$ لاتشكلان تناسباً .

ب) ٠,٥ × ٤ = ٢ ، ٢ × ١ = ٢

∵ ٠,٥ × ٤ = ٢ × ١ ∴ $\frac{٠,٥}{٢} = \frac{١}{٤}$ ،

إذن $\frac{٠,٥}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ تشكلان تناسباً .

مثال (٢)

إذا كان $\frac{س}{س + ٣} = \frac{٤}{٥}$ ، فأوجد قيمة س .

الحل :

من التناسب نجد : ٥ س = ٤ (س + ٣)

٥ س = ٤س + ١٢

٥ س − ٤س = ١٢

∴ س = ١٢

التحقق من الجواب :

$$\frac{١٢}{١٢ + ٣} = \frac{١٢}{١٥}$$

∴ $\frac{١٢}{١٥}$ = $\frac{٤}{٥}$ (لأن ١٢ × ٥ = ١٥ × ٤) .

تماريـن ومسائـل

[١] بيّن أياً من أزواج النسب التالية يكون تناسباً ؟

أ) $\frac{١٠}{٩}$ ، $\frac{٦}{٥}$ ، ب) $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{٠,٧٥}{٢}$ ،

جـ) $\frac{٠,٢}{١,٤}$ ، $\frac{١}{٧}$.

[٢] أوجد قيمة ل التي تجعل كل نسبتين تشكلان تناسباً في كل مما يأتي :

أ) ل : ٨ ، ٣٥ : ٢٨ ، ب) $\frac{٨}{ل + ٣}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ،

جـ) $\frac{٢ل}{ل - ١}$ ، $\frac{١}{٢}$.

[٣] احسب قيمة س في كل مما يلي :

أ) $\frac{س - ١}{٣} = -٤$ ، ب) $\frac{٢ + ٥ س}{٣٣} = \frac{٢}{٣}$ ،

جـ) $\frac{س}{س + ٥} = \frac{٧}{١٢}$.

[٤] إذا أضيف س إلى كل من مقدم وتالي النسبة $\frac{٤}{٧}$ كان الناتج $\frac{٥}{٨}$
أوجد قيمة س .

٦ : ٢ خـــواص التناســـب

هناك مجموعة من الخواص التي تساعدنا على حل تمارين ومسائل التناسب، سندرس في هذا البند أهم هذه الخواص .

ملحوظة : نشترط في جميع النسب أن تالي كل من هذه النسب لايساوى صفراً .

خاصية (١) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ ، فإن $\frac{ب}{أ} = \frac{ء}{جـ}$

وعليـــه إذا كان : $\frac{٢}{٥} = \frac{٦}{١٥}$ ، يكون $\frac{٥}{٢} = \frac{١٥}{٦}$.

خاصية (٢) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ ، فإن $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{ء}$

وعليه إذا كان $\frac{٣}{٧} = \frac{١٢}{٢٨}$ ، فإن $\frac{٣}{١٢} = \frac{٧}{٢٨}$.

خاصية (٣)

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ ، فإن $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{جـ + ء}{ء}$

فمثلاً إذا كان $\frac{١}{٤} = \frac{٥}{٢٠}$ فإن $\frac{١ + ٤}{٤} = \frac{٥ + ٢٠}{٢٠}$ ،

أي أن $\frac{٥}{٤} = \frac{٢٥}{٢٠}$.

مثال (١)

إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٥}{٤}$ ، وكان س + ص = ١٨ فأوجد كلاً من س ، ص

الحـل :

$\because \frac{س}{ص} = \frac{٥}{٤}$

$\therefore \frac{س + ص}{ص} = \frac{٥ + ٤}{٤} = \frac{٩}{٤}$

، $\because$ س + ص = ١٨

$\therefore \frac{١٨}{ص} = \frac{٩}{٤}$

٩ ص = ٧٢ ومنه $\boxed{ص = ٨}$

$\because$ س = ١٨ − ص

$\therefore$ س = ١٨ − ٨ ومنه $\boxed{س = ١٠}$

التحقق : تحقق من صحة الحل بنفسك

خاصية (٤) إذا كان $\frac{ا}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ ، فإن $\frac{ا - ب}{ب} = \frac{جـ - ء}{ء}$

فمثلاً إذا كان : $\frac{٩}{٧} = \frac{٢٧}{٢١}$ ، فإن $\frac{٩ - ٧}{٧} = \frac{٢٧ - ٢١}{٢١}$ ؛

أي أن : $\frac{٢}{٧} = \frac{٦}{٢١}$.

مثال (٢)

إذا كانت نسبة طول $\overline{اب}$ إلى طول $\overline{جـء}$ هي ٧ : ٦ ، وكان $|اب| - |جـء| = ١,٥$ سم فأوجد كلاً من : $|اب|$ ، $|جـء|$.

الحل :

$\because \frac{|اب|}{|جـء|} = \frac{٧}{٦}$

$\therefore \frac{|اب| - |جـء|}{|جـء|} = \frac{٧ - ٦}{٦}$ [خاصية (٤)] .

$\therefore \frac{١,٥}{|جـء|} = \frac{١}{٦}$ ومنه $|جـء| = ٩$ سم

$\because |اب| - |جـء| = ١,٥$

$\therefore |اب| - ٩ = ١,٥$ ومنه $|اب| = ١٠,٥$ سم

خاصية (٥)

إذا كان $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \text{ك}$ ، فإن $\frac{\text{ا} + \text{جـ}}{\text{ب} + \text{ء}} = \frac{\text{ا} - \text{جـ}}{\text{ب} - \text{ء}} = \text{ك}$

وعليـــــه إذا كان $\frac{١}{٥} = \frac{٢}{١٠}$ ، فإن $\frac{١ + ٢}{٥ + ١٠} = \frac{١ - ٢}{٥ - ١٠}$ ؛

أي أن $\frac{٣}{١٥} = \frac{-١}{-٥}$ ومنه $\frac{١}{٥} = \frac{٢}{١٠} = \frac{٣}{١٥} = \frac{-١}{-٥}$.

مثال (٣)

إذا كان $\frac{٢\text{ا} + ٩}{٤\text{ب} - ٧} = \frac{\text{ا}}{\text{ب} + ٢} = ٣$ فأوجد كلاً من ا ، ب .

الحـــل : باستخدام خاصية (٥) نجد :

$$\frac{٢\text{ا} + ٩ - \text{ا}}{(٤\text{ب} - ٧) - (\text{ب} + ٢)} = \frac{\text{ا}}{\text{ب} + ٢} = ٣$$

$$\frac{\text{ا} + ٩}{٣\text{ب} - ٩} = \frac{\text{ا}}{\text{ب} + ٢} = ٣$$

أي أن $$\frac{\text{ا} + ٩ - \text{ا}}{(٣\text{ب} - ٩) - (\text{ب} + ٢)} = ٣$$

$$\frac{٩}{٢\text{ب} - ١١} = ٣$$

$$٦\text{ب} - ٣٣ = ٩$$

$$٦\text{ب} = ٤٢$$

$$\boxed{\text{ب} = ٧}$$

وبالتعويض عن قيمة ب في التناسب : $\frac{أ}{ب + ٢} = ٣$ نجد :

$$\frac{أ}{٧ + ٢} = ٣$$

$\therefore$ $\boxed{أ = ٢٧}$

خاصية (٦) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء} = \frac{هـ}{و} = ك$ ، فإن $\frac{أ + جـ + هـ}{ب + ء + و} = ك$

مثال (٤)

أوجد قيمتي : س وَ ص ، حيث أن : $\frac{س}{٢ ص} = \frac{٣ س}{٨ - ٢ ص} = \frac{٥}{٢}$.

الحـــل :

$\because$ $\frac{س}{٢ ص} = \frac{٣ س}{٨ - ٢ ص} = \frac{٥}{٢}$ ،

$\therefore$ $\frac{س + ٣ س + ٥}{٢ ص + ٨ - ٢ ص + ٢} = \frac{٥}{٢}$ (خاصية ٦) ،

ومنه $\frac{٤ س + ٥}{١٠} = \frac{٥}{٢}$ ،

$٢ (٤ س + ٥) = ٥ \times ١٠$

$٨ س + ١٠ = ٥٠$

$٨ س = ٤٠$

$\therefore$ $\boxed{س = ٥}$

، ∵ $\frac{\text{س}}{\text{٢ ص}} = \frac{\text{٥}}{\text{٢}}$ ∴ $\frac{\text{٥}}{\text{٢ ص}} = \frac{\text{٥}}{\text{٢}}$

∴ ١٠ ص = ١٠ ومنه $\boxed{\text{ص} = ١}$

تدريب تحقق من صحة الحل .

مثال (٥)

أوجد قياس زاويتين متكاملتين ، إذا كانت النسبة بين قياسيهما ٣ : ٦ .

الحل :

∵ $\frac{\text{قياس الزاوية الصغرى}}{\text{قياس الزاوية الكبرى}} = \frac{٣}{٦}$

فإذا فرضنا أن قياس الزاوية الصغرى = س درجة

، قياس الزاوية الكبرى = ص درجة

فإن $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٦}$ ، $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص}} = \frac{٩}{٦}$ [خاصية (٣)]

، ∵ س + ص = ١٨٠° (معطى)

∴ $\frac{١٨٠°}{\text{ص}} = \frac{٩}{٦}$ ومنه ص = $\frac{٦ \times ١٨٠°}{٩}$ = ١٢٠°

أي أن قياس الزاوية الكبرى = ١٢٠°

، ∵ س = ١٨٠° – ص (لماذا؟)

س = ١٨٠° – ١٢٠° = ٦٠°

أي أن قياس الزاوية الصغرى = ٦٠°

تدريب تحقق من صحة الحل .

تمارين ومسائل

[١] إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{ل}$ ، فأكمل الفراغات :

أ) $\frac{ص}{س} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ ، ب) $\frac{ل}{ص} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ ،

جـ) $\frac{س - ص}{ص} = \frac{\boxed{} - \boxed{}}{\boxed{}}$.

[٢] استخدم خواص التناسب لإيجاد قيمتي ا وَ ب في كل مما يلي :

أ) $\frac{ا}{ب} = \frac{١}{٢}$ ، ا + ب = ١٢ .

ب) $\frac{ا}{ب} = \frac{٧}{٣}$ ، ا – ب = ٢٠ .

جـ) $\frac{ا}{ب} + ١ = \frac{٤}{٣}$ ، ا – ب = ١٤ .

د) $\frac{٢ ا}{٣ ب} = \frac{٢}{٥}$ ، ٢ ا + ٣ ب = ٦٣ .

[٣] إذا كان : $\frac{ا}{ب} = \frac{١٦ - ا}{ب} = \frac{٤}{٥}$ ؛ فأوجد قيمة كل من ا وَ ب .

[٤] إذا كان : $\frac{س}{٤ ص} = \frac{س - ١٥}{ص + ١} = \frac{٣}{٤}$ ؛ فأوجد قيمة كل من س وَ ص.

[٥] إذا كان $\frac{ا}{ب} = \frac{٥}{٦}$ ، $\frac{جـ}{ب} = \frac{١}{٣}$ ، وكان : ا + ب + جـ = ١٠٤٠ ؛

فأوجد قيمة كل من ا ، ب ، جـ .

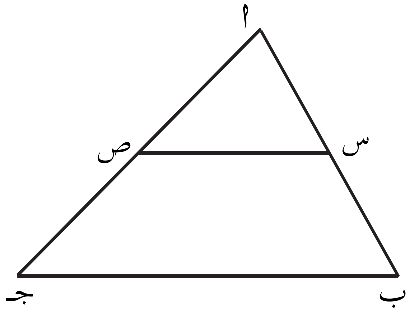
[٦] في الشكل (٦ – ٢)

شكل (٦ – ٢)

|أ ب| = ٢٢ سم ، $\frac{|\text{أ جـ}|}{|\text{جـ ب}|} = \frac{٢}{٩}$ ،

أوجد كل من |أ جـ| ، |جـ ب| .

[٧] في الشكل (٦ – ٣)



شكل (٦ – ٣)

|أ ب| = ٨ سم ، |ب س| = ٤ سم ،

|جـ ص| = ٥ سم .

فإذا كان : $\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{ب س}|} = \frac{|\text{أ جـ}|}{|\text{ص جـ}|}$ ؛

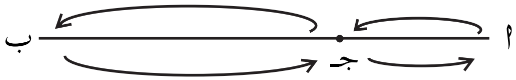
فأوجد |أ ص| .

[٨] يزن ٣,٥ أمتار من سلك نحاس نصف كيلوجرام . كم يزن ٤,٩ أمتار من سلك النحاس نفسه ؟

[٩] إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$ ، فأثبت أن : ١) $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ} + \text{ء}}{\text{ء}}$. ٢) $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ} - \text{ء}}{\text{ء}}$

٦ : ٣ تقسيم قطعة مستقيمة بنسبة معلومة

أولاً : التقسيم من الداخل :



شكل (٦ – ٤)

في الشكل (٦ – ٤)

جـ نقطة على $\overline{\text{أ ب}}$ ، نقول أن النقطة

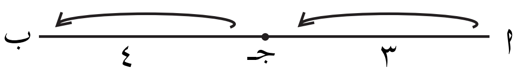
جـ تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الداخل بنسبة |أ جـ| : |جـ ب| من جهة أ ، أو بنسبة |ب جـ| : |جـ أ| من جهة ب .

مثال (١)

جـ نقطة على $\overline{\text{أ ب}}$ شكل(٦ – ٥)، تقسمها من الداخل بنسبة ٣ : ٤ ، من جهة أ فإذا كان $|\text{أ ب}| = ١٤$سم، احسب كل من $|\text{جـ ب}|$، $|\text{جـ أ}|$.

الحـــل : $\because$ جـ تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٤

$$\therefore \quad \frac{|\text{أ جـ}|}{|\text{جـ ب}|} = \frac{٣}{٤}$$



شكل (٦ – ٥)

$$\frac{|\text{أ جـ}| + |\text{جـ ب}|}{|\text{جـ ب}|} = \frac{٣ + ٤}{٤} = \frac{٧}{٤}$$

$$\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{جـ ب}|} = \frac{٧}{٤} \quad (\text{لأن } |\text{أ ب}| = |\text{أ جـ}| + |\text{جـ ب}|)\text{ ،}$$

ومنه $\dfrac{١٤}{|\text{جـ ب}|} = \dfrac{٧}{٤}$

$٧ \, |\text{جـ ب}| = ٥٦ \qquad \therefore \; |\text{جـ ب}| = ٨$سم

، $\because \; |\text{جـ أ}| = |\text{أ ب}| - |\text{جـ ب}|$.

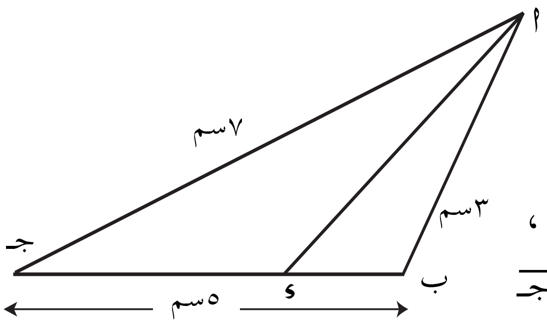
$\therefore \; |\text{جـ أ}| = ١٤ - ٨$ ، $\therefore \; |\text{جـ أ}| = ٦$سم

مثال (٢)

فـــي الشكل (٦ – ٦)

$|\text{أ ب}| = ٣$سم ، $|\text{أ جـ}| = ٧$سم ،

$|\text{ب جـ}| = ٥$سم، ء نقطة على $\overline{\text{ب جـ}}$



شكل (٦ – ٦)

بحيث كان : $\dfrac{|\text{ب ء}|}{|\text{ء جـ}|} = \dfrac{|\text{ب أ}|}{|\text{أ جـ}|}$

أوجد كلاً من : $|\text{ب ء}|$ ، $|\text{ء جـ}|$.

الحل :

$\because \quad \dfrac{|\text{ب ء}|}{|\text{ء جـ}|} = \dfrac{|\text{ب أ}|}{|\text{أ جـ}|} = \dfrac{٣}{٧}$

$\therefore \quad \dfrac{|\text{ب ء}| + |\text{ء جـ}|}{|\text{ء جـ}|} = \dfrac{٣ + ٧}{٧} = \dfrac{١٠}{٧}$

$\dfrac{|\text{ب جـ}|}{|\text{ء جـ}|} = \dfrac{١٠}{٧}$ (لأن : $|\text{ب ء}| + |\text{ء جـ}| = |\text{ب جـ}|$)

$\dfrac{٥}{|\text{ء جـ}|} = \dfrac{١٠}{٧}$

$١٠ \; |\text{ء جـ}| = ٣٥ \qquad \therefore \; |\text{ء جـ}| = ٣{,}٥$ سم

، $\because \; |\text{ب ء}| = |\text{ب جـ}| - |\text{ء جـ}|$.

$|\text{ب ء}| = ٥ - ٣{,}٥$

$|\text{ب ء}| = ١{,}٥$ سم

ثانياً : التقسيم من الخارج :

شكل (٦ – ٧)

فــي الشكل (٦ – ٧)

جـ نقطة واقعة على امتداد $\overline{\text{أ ب}}$.

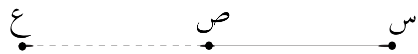
نقول أن النقطة جـ تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الخارج بنسبة $|\text{أ جـ}|:|\text{جـ ب}|$ من جهه أ ،

أو بنسبة |ب جـ| : |جـ ا| من جهة ب .

مثال (٣)

في الشكل (٦ – ٨) : ع نقطة واقعة على امتداد $\overline{\text{س ص}}$ ، وتقسمها من الخارج بنسبة ٣ : ٢ من جهة س ، فإذا كان |س ص| = ١٠سم ، أوجد |ع ص| ، |س ع|.

الحـــل :



شكل (٦ – ٨)

∵ ع تقسم $\overline{\text{س ص}}$ من الخارج

بنسبة ٣ : ٢

$$\therefore \frac{|\text{س ع}|}{|\text{ع ص}|} = \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{|\text{س ع}| - |\text{ع ص}|}{|\text{ع ص}|} = \frac{٣ - ٢}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{|\text{س ص}|}{|\text{ع ص}|} = \frac{١}{٢}$$ لماذا ؟

$$\therefore \frac{١٠}{|\text{ع ص}|} = \frac{١}{٢}$$

|ع ص| = ٢٠سم

، ∵ |س ع| = |ع ص| + |س ص|

∴ |س ع| = ٢٠ + ١٠ = ٣٠ |س ع| = ٣٠سم

مثال (٤)

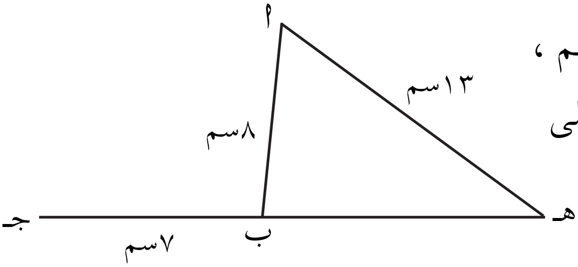
في الشكل (٦ – ٩) :

|أ ب| = ٨سم ، |ب جـ| = ٧سم ،

|أ هـ| = ١٣سم ، هـ واقعة على امتداد $\overline{\text{جـ ب}}$ بحيث كان

$$\frac{|\text{هـ أ}|}{|\text{أ ب}|} = \frac{|\text{جـ هـ}|}{|\text{هـ ب}|}$$

أوجد |هـ ب|، |هـ جـ|.



شكل (٦ – ٩)

الحـل :

$\because$ $\dfrac{|\text{جـ هـ}|}{|\text{هـ ب}|} = \dfrac{|\text{هـ أ}|}{|\text{أ ب}|} = \dfrac{١٣}{٨}$ ،

$\therefore$ $\dfrac{|\text{جـ هـ}| - |\text{هـ ب}|}{|\text{هـ ب}|} = \dfrac{١٣ - ٨}{٨} = \dfrac{٥}{٨}$

$\dfrac{|\text{ب جـ}|}{|\text{هـ ب}|} = \dfrac{٥}{٨}$ (لماذا ؟)

$\dfrac{٧}{|\text{هـ ب}|} = \dfrac{٥}{٨}$

٥ |هـ ب| = ٥٦

$\therefore$ |هـ ب| = ١١,٢ سم

، $\because$ |هـ جـ| = |هـ ب| + |ب جـ| $\therefore$ |هـ جـ| = ١١,٢ + ٧

|هـ جـ| = ١٨,٢ سم .

تمارين ومسائل

[١] ع نقطة على $\overline{سص}$ ، بحيث كان : $\frac{|سع|}{|عص|} = \frac{٥}{٤}$ ، $|سع| - |عص| = ٣$

أوجد كلاً من $|صع|$ ، $|عس|$.

[٢] جـ نقطة واقعة على امتداد $\overline{أب}$ ، تقسمها من الخارج بحيث كان :

$\frac{|جـب|}{|جـأ|} = \frac{٣}{٧}$ ، أوجد كلاً من $|جـأ|$ ، $|جـب|$ علماً بأن : $|أب| = ١٥$ سم .

[٣] ء نقطة واقعة على امتداد $\overline{جـب}$ ، تقسمها من الخارج بنسبة ٣ : ١ ،

فإذا كان : $|ءب| = ٨$سم ، أوجد $|جـب|$.

[٤] في الشكل (٦ – ١٠) :

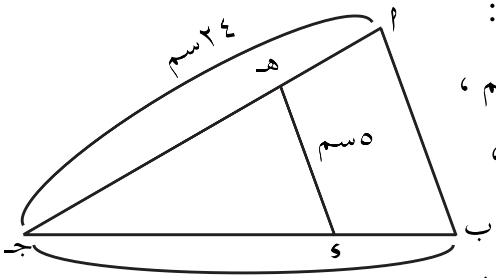
$|أجـ| = ٢٤$سم ، $|ءهـ| = ٥$سم ،

$|بجـ| = ٢٠$سم، هـ نقطة على $\overline{أجـ}$ ،

تقسمها من الداخل بنسبة ٥ : ٧ من

من جهة أ ، ء نقطة على $\overline{بجـ}$ ، فإذا كان :

$\frac{|ءجـ|}{|ءب|} = \frac{|أهـ|}{|هـء|}$ ، أوجد $|ءب|$.



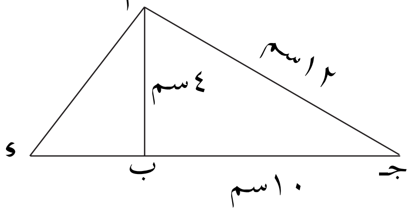
شكل (٦–١٠)

[٥] في الشكل (٦ – ١١) :

$|أجـ| = ١٢$سم ، $|أب| = ٤$سم ،

$|بجـ| = ١٠$سم ، ء نقطة

واقعة على امتداد $\overline{جـب}$ بحيث



شكل (٦–١١)

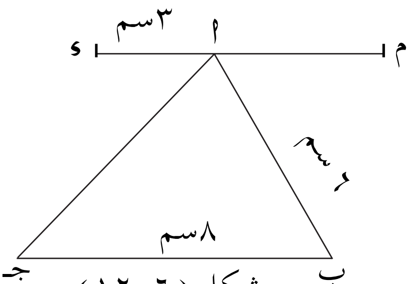
كان $\dfrac{|\text{أ جـ}|}{|\text{أ ب}|} = \dfrac{|\text{جـ ء}|}{|\text{ء ب}|}$ ، أوجد |ء ب| ، |جـ ء| .

[٦] في الشكل (٦ – ١٢) :

|أ ب| = ٦سم ، |ب جـ| = ٨سم ،

|أ ء| = ٣سم ، م نقطة واقعة على امتداد $\overline{\text{أ ء}}$ بحيث كان $\dfrac{|\text{ء م}|}{|\text{أ م}|} = \dfrac{|\text{ب جـ}|}{|\text{أ ب}|}$

أوجد |أ م| ، |ء م| .



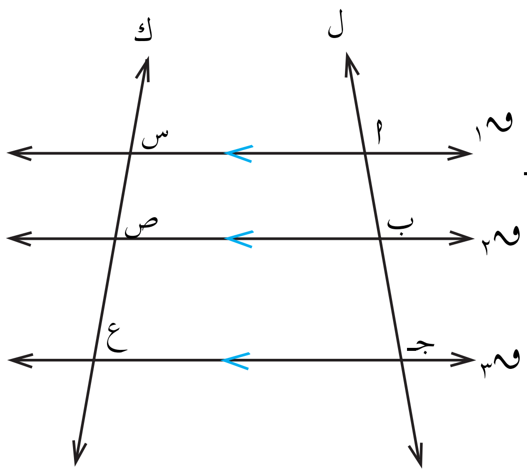
شكل (٦–١٢)

٦ : ٤ مبرهنة طاليس

نشـــاط

١) ارسم مستقيماً مثل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، وحدد عليه النقاط أ ، ب ، جـ كما في الشكل (٦ – ١٣)

٢) من النقاط أ ، ب ، جـ ارسم المستقيمات ق١، ق٢ ، ق٣، بحيث $\overleftrightarrow{\text{ق}_1}$ // $\overleftrightarrow{\text{ق}_2}$ // $\overleftrightarrow{\text{ق}_3}$.



شكل (٦–١٣)

٣) ارسم مستقيماً أخر ، سمِّه ك، يقطع $\overleftrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}_2}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}_3}$ بالنقاط س ، ص ، ع على الترتيب .

٤) استخدم المسطرة لقياس أطوال القطع المستقيمة أ ب، ب جـ، س ص، ص ع

٥) احسب النسبتين $\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{ب جـ}|}$ ، $\frac{|\text{س ص}|}{|\text{ص ع}|}$ ، ثم قارن بينهما ، ماذا تلاحظ ؟

لاشك أنك لاحظت أن $\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{ب جـ}|} = \frac{|\text{س ص}|}{|\text{ص ع}|}$.

أي أن المستقيمات المتوازيـــة ق_1 ، ق_2 ، ق_3 حدَّدت على القاطعين ل ، ك قطعاً مستقيمة أطوالها متناسبة .

ما توصلنا إِليه من النشاط السابق هو حالة خاصة من مبرهنة هامة تسمى مبرهنة طاليس ، والتي تنص على أن :

المستقيمات المتوازية تحدِّد على قاطعين لها قطعاً متناسبة في الطول

لغرض التبسيط نبرهن فقط الحالة الخاصة التي يكون فيها القاطعان متوازيين.

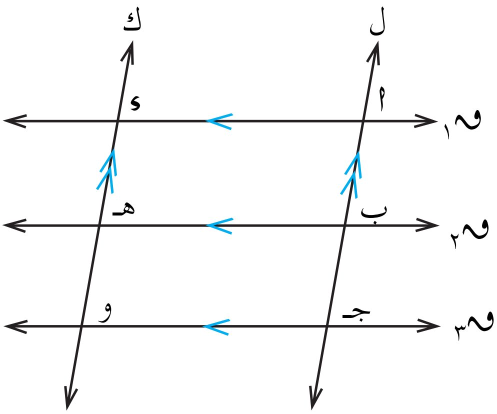
المعطيات :

$\overleftrightarrow{\text{ق}_1} \parallel \overleftrightarrow{\text{ق}_2} \parallel \overleftrightarrow{\text{ق}_3}$.

والمستقيمان المتوازيان ل ، ك قاطعان لها،انظر الشكل(٦–١٤).

المطلوب : إِثبات أن :

$\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{ب جـ}|} = \frac{|\text{ء هـ}|}{|\text{هـ و}|}$



شكل (٦ – ١٤)

البرهان :

$\because \overleftrightarrow{\text{ق}_1} \parallel \overleftrightarrow{\text{ق}_2}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ك}}$

∴ الشكل أ ب هـ ء متوازي أضلاع .

| أ ب | = | ء هـ | .   (١)

بالمثل ، الشكل ب جـ و هـ متوازي أضلاع . لماذا ؟

∴ | ب جـ | = | هـ و | (٢)

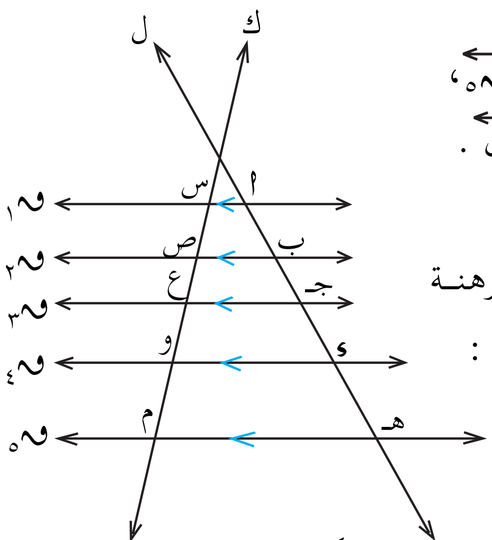
من (١) ، (٢) ينتج أن :

$$\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{ب جـ}|} = \frac{|\text{ء هـ}|}{|\text{هـ و}|}$$ وهو المطلوب .

وبشكل عام ، إذا كان

$\overleftrightarrow{\text{ق}_1} \parallel \overleftrightarrow{\text{ق}_2} \parallel \overleftrightarrow{\text{ق}_3} \parallel \overleftrightarrow{\text{ق}_4} \parallel \overleftrightarrow{\text{ق}_5}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ قاطعان لها ، $\overleftrightarrow{\text{ك}} \nparallel \overleftrightarrow{\text{ل}}$.

[انظر الشكل (٦ – ١٥)] .



شكل (٦ – ١٥)

ولتحديد التناسبات الناتجة من مبرهنة طاليس بالاستعانة بالشكل (٦ – ١٥) :

– نكتب النقط الواقعة على القاطع الأول بترتيب معين ، مثل أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ .

– نكتب تحتها النقط الواقعة على القاطع الثاني وبالترتيب نفسه س ، ص ، ع ، و ، م فنكون بذلك قد عينا تقابلاً بين نقاط التقاطع للقاطعين $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ كما يلي :

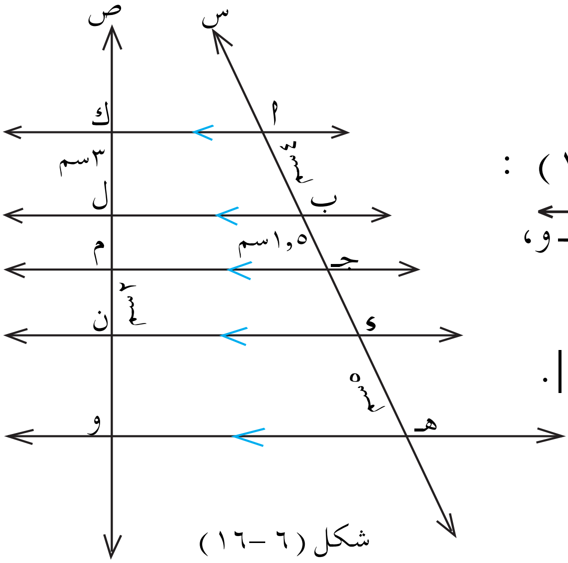
أ	ب	جـ	ء	هـ
س	ص	ع	و	م

– ينتج عن التقابل السابق تقابلاً بين القطع المستقيمة المحددة بالمستقيمات المتوازية، فمثلاً $\overline{\text{أ ب}}$ تقابل $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ تقابل $\overline{\text{ص م}}$.

– نكوِّن النسبة بين طولي قطعتين من القاطع الأول والنسبة بين طولي القطعتين المقابلتين لهما من القاطع الثاني ، نساوي بين هاتين النسبتين فنحصل على تناسب ، فمثلاً :

$$\frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{جـ ء}|} = \frac{|\text{ص ع}|}{|\text{ع و}|} \text{ ،}$$

$$\frac{|\text{ا جـ}|}{|\text{ا ء}|} = \frac{|\text{س ع}|}{|\text{س و}|} \text{ .}$$



شكل (٦ – ١٦)

مثال (١)

في الشكل (٦ – ١٦) :

$\overleftrightarrow{\text{ا ك}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب ل}} \parallel \overleftrightarrow{\text{جـ م}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ء ن}} \parallel \overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ،

$\overleftrightarrow{\text{س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص}}$ قاطعان لها .

أوجد كلاً من $|\text{ل م}|$ ، $|\text{جـ ء}|$.

الحل :

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{ا ك}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب ل}} \parallel \overleftrightarrow{\text{جـ م}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ء ن}} \parallel \overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ؛

، $\overleftrightarrow{\text{س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص}}$ قاطعان لها .

$\therefore \frac{|\text{ا ب}|}{|\text{ب جـ}|} = \frac{|\text{ك ل}|}{|\text{ل م}|}$ « مبرهنة طاليس »

$\therefore \frac{٤}{١,٥} = \frac{٣}{|\text{ل م}|}$

$\therefore$ $|ل م| = \frac{٣ \times ١٫٥}{٤} = \frac{٤٫٥}{٤} = ١٫١٢٥$ سم

، $\because$ $\frac{|ب جـ|}{|جـ ء|} = \frac{|ل م|}{|م ن|}$ « المبرهنة نفسها »

$\therefore$ $\frac{١٫٥}{|جـ ء|} = \frac{١٫١٢٥}{٢}$

$\therefore$ $|جـ ء| = \frac{١٫٥ \times ٢}{١٫١٢٥} = ٢٫٦٧$ سم تقريباً .

تدريب في المثال (١) : أوجد | ن و | .

مثال (٢)

في الشكل (٦ – ١٧)

ا ب جـ ء شبه منحرف ، فيه

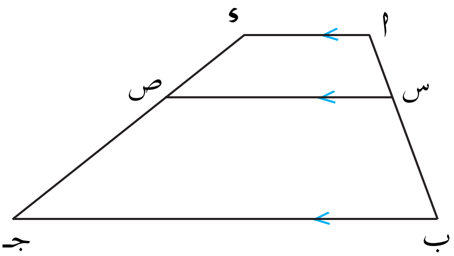
$\overline{اء} \parallel \overline{ب جـ}$ ، $\overline{س ص} \parallel \overline{اء}$

ويقطع $\overline{اب}$ في س ، $\overline{ء جـ}$ في ص .

فإذا كان : |س ب| = ٨سم ،

|ء ص| = ٦سم ، |ا س| = $\frac{١}{٣}$ |ص جـ| ،

فأوجد كلاً من | ا ب | ، | ء جـ | .



شكل (٦ – ١٧)

الحل :

$\because$ $\overline{اء} \parallel \overline{س ص} \parallel \overline{ب جـ}$ ، $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ء جـ}$ قاطعان لهما

$$\therefore \quad \frac{|\text{أ س}|}{|\text{س ب}|} = \frac{|\text{ء ص}|}{|\text{ص جـ}|}$$

، وبالتعويض عن $|\text{أ س}| = \frac{١}{٣} |\text{ص جـ}|$ ، $|\text{س ب}| = ٨$سم ، $|\text{ء ص}| = ٦$سم .

$$\therefore \quad \frac{\frac{١}{٣} |\text{ص جـ}|}{٨\text{سم}} = \frac{٦\text{سم}}{|\text{ص جـ}|}$$

$\therefore \quad \frac{١}{٣} |\text{ص جـ}|^{٢} = ٤٨$ سم^{٢} .

$|\text{ص جـ}|^{٢} = ١٤٤$سم^{٢} ، $|\text{ص جـ}| = ١٢$سم

، $|\text{أ س}| = \frac{١}{٣} |\text{ص جـ}| = \frac{١}{٣} \times ١٢$سم $= ٤$ سم

، $|\text{أ ب}| = |\text{أ س}| + |\text{س ب}| = ٤$سم $+ ٨$سم $= ١٢$سم ،

، $|\text{ء جـ}| = |\text{ء ص}| + |\text{ص جـ}| = ٦$سم $+ ١٢$سم $= ١٨$سم .

تمارين ومسائل

[١] في الشكل (٦ – ١٨) :

$\overline{\text{أ هـ}} \parallel \overline{\text{ب و}} \parallel \overline{\text{جـ ز}} \parallel \overline{\text{ء ح}}$ ،

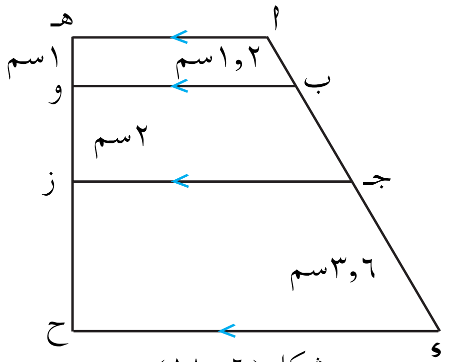
$\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{هـ ح}}$ قاطعان لها .

فإذا كان :

$|\text{أ ب}| = ١,٢$سم ، $|\text{هـ و}| = ١$ سم ،

$|\text{و ز}| = ٢$سم ، $|\text{جـ ء}| = ٣,٦$سم

فأوجد كلاً من : $|\text{ب جـ}|$ ، $|\text{ز ح}|$.



شكل (٦ – ١٨)

[٢] في الشكل (٦ – ١٩) :

$\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ع ل}} \parallel \overline{\text{م ن}}$ ،

$\overline{\text{ك م}}$ ، $\overline{\text{ك ن}}$ قاطعان لها .

أ) أكمل ما يلي :

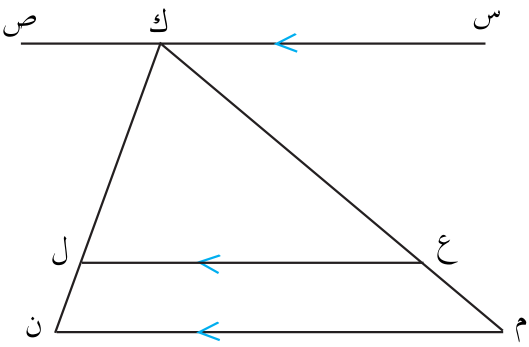
$\frac{|\text{ك ع}|}{|\text{ع م}|} = \frac{\cdots}{\cdots}$ ،

$\frac{|\text{ك م}|}{|\text{م ع}|} = \frac{\cdots}{\cdots}$.

ب) إذا كان $|\text{ك ع}| =$ ٥سم ،

$|\text{ع م}| =$ ٢سم ، $|\text{ل ن}| =$ ١,٢سم .

فأوجد $|\text{ك ن}|$.



شكل (٦ – ١٩)

[٣] في الشكل (٦ – ٢٠) :

$\overline{\text{أ ز}} \parallel \overline{\text{ب و}} \parallel \overline{\text{جـ هـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}} \parallel \overline{\text{ز ء}}$

إذا كان :

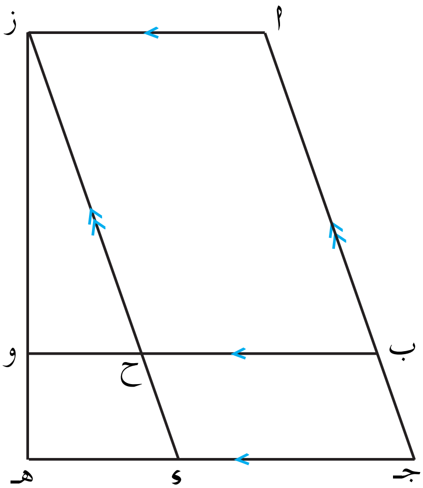
أ) $|\text{ز و}| =$ ٩سم ، $|\text{هـ و}| =$ ٣سم ،

$|\text{أ جـ}| =$ ١٦سم ، فأوجد $|\text{ز ح}|$

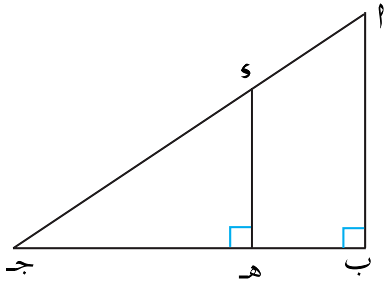
ب) $|\text{هـ و}| =$ ٢سم ، $|\text{ز و}| =$ ٤سم ،

$|\text{ز ح}| =$٥سم .

فأوجد $|\text{أ جـ}|$.



شكل (٦ – ٢٠)



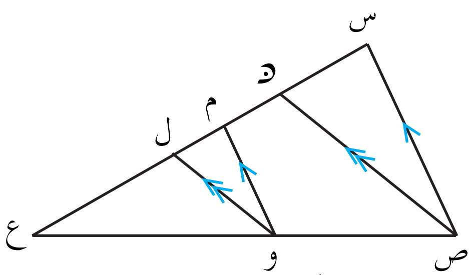
شكل (٦ – ٢١)

[٤] في الشكل (٦ – ٢١) :
أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، هـ نقطة على $\overline{\text{ب جـ}}$ ، فإذا أقيم من هـ عمود يلاقي $\overline{\text{أ جـ}}$ في النقطة ء فأكمل العبارات الآتية بما يجعلها صحيحة :

أ) $\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$ لأن . . .

ب) $\dfrac{|\text{ب هـ}|}{|\text{هـ جـ}|} = \dfrac{\dots}{|\text{ء جـ}|}$ جـ) $\dfrac{|\text{جـ ء}|}{|\text{ء أ}|} = \dfrac{|\text{جـ هـ}|}{\dots}$

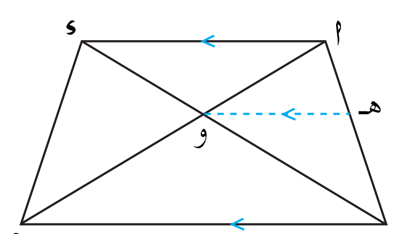
ء) $\dfrac{|\text{جـ ء}|}{|\text{جـ أ}|} = \dfrac{\dots}{\dots}$ هـ) $\dfrac{|\text{جـ هـ}|}{|\text{جـ ب}|} = \dfrac{\dots}{\dots}$



شكل (٦ – ٢٢)

[٥] في الشكل (٦ – ٢٢) :
$\overline{\text{م و}} \parallel \overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ل و}} \parallel \overline{\text{ن ص}}$
أثبت أن :

$$\dfrac{|\text{ع ل}|}{|\text{ل ن}|} = \dfrac{|\text{ع م}|}{|\text{م س}|}$$



شكل (٦ – ٢٣)

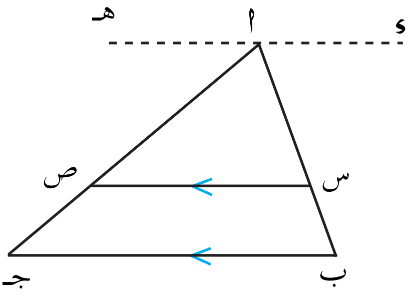
[٦] في الشكل (٦ – ٢٣) أ ب جـ ء شبه منحرف، فيه $\overline{\text{أ ء}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، النقطة و هي نقطة تقاطع قطريه أ جـ ،ب ء . برهن أن

$$\dfrac{|\text{أ و}|}{|\text{و جـ}|} = \dfrac{|\text{ء و}|}{|\text{و ب}|} .$$

[ارشاد : ارسم $\overleftrightarrow{\text{و هـ}} \parallel \overline{\text{أ ء}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في « هـ »].

٦ : ٥ نتيجة على مبرهنة طاليس

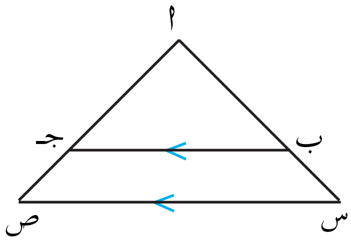
المستقيم الموازي لضلع مثلث :



شكل (٦ – ٢٤ ا)

– في الشكل (٦– ٢٤ ا) ا ب جـ مثلث،
$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.
انشأنا المستقيم ء هـ ماراً بـ ا بحيث
كان : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.
نلاحظ أن : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ،
بحسب مبرهنه طاليس .

نستنتج : $\frac{|\text{ا س}|}{|\text{س ب}|} = \frac{|\text{ا ص}|}{|\text{ص جـ}|}$. ونقول أن $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ الموازي للضلع ب جـ يقسم الضلعين ا ب ، ا جـ من الداخل إلى اجزاء متناسبة .



شكل (٦ –٢٤ ب)

– وبالمثل في الشكل (٦ – ٢٤ب)
$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، نقول ان $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$
يقسم الضلعين ا ب ، ا جـ من
الخارج إلى اجزاء متناسبة .

نتيجـــة :

المستقيم الموازي لضلع مثلث يقسم الضلعين الآخرين إلى اجزاء متناسبة

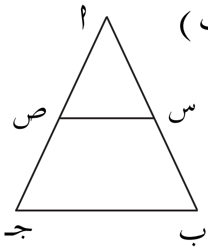
عكس النتيجة :

إذا قسم مستقيم ضلعي مثلث إلى اجزاء متناسبة كان موازياً للضلع الثالث

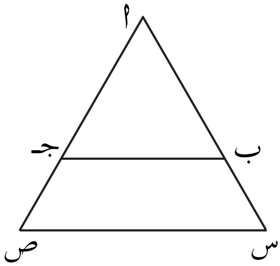
في الشكلين (٦ــ٢٥أ)، (٦ــ٢٥ب)

إذا كان : $\frac{|أ س|}{|س ب|} = \frac{|أ ص|}{|ص جـ|}$

فإن : $\overline{س ص} \parallel \overline{ب جـ}$



شكل (٦ ــ ٢٥أ)



شكل (٦ ــ ٢٥ب)

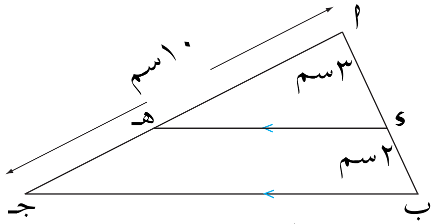
مثال (١)

في الشكل (٦ – ٢٦) :

$\overline{ى هـ} \parallel \overline{ب جـ}$ ، |أ جـ| = ١٠سم ،

|أ ى| = ٣سم ، |ى ب| = ٢سم .

أوجد |أ هـ| ، |هـ جـ| .



شكل (٦ ــ ٢٦)

الحل :

$\because$ $\overline{ى هـ} \parallel \overline{ب جـ}$

$\therefore$ $\frac{|أ ى|}{|ى ب|} = \frac{|أ هـ|}{|هـ جـ|}$ (نتيجة)

$\frac{|أ هـ|}{|هـ جـ|} = \frac{٣}{٢}$.

$\frac{|أ هـ| + |هـ جـ|}{|هـ جـ|} = \frac{٥}{٢}$ لماذا ؟

$\therefore \frac{|أ جـ|}{|هـ جـ|} = \frac{٥}{٢}$ (لأن $|أ هـ| + |هـ جـ| = |أ جـ|$)

$\frac{١٠}{|هـ جـ|} = \frac{٥}{٢}$ ومنه $|هـ جـ| = ٤$ سم

، $\because |أ هـ| = |أ جـ| - |هـ جـ|$

$\therefore |أ هـ| = ١٠ - ٤$

$\therefore |أ هـ| = ٦$ سم

مثال (٢)

فـــي الشكل (٦ – ٢٧) :

س نقطة على $\overline{أ ب}$ بحيث كـان :

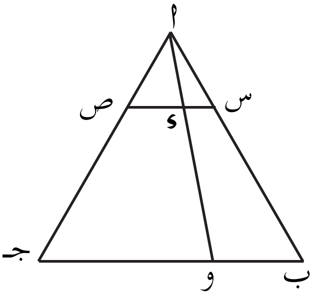
$\frac{|أ س|}{|س ب|} = \frac{١}{٢}$ ، ص نقطة على $\overline{أ جـ}$

بحيث كان $\frac{|أ ص|}{|ص جـ|} = \frac{١}{٢}$ ،

رسم المستقيم أ و بحيث يقطع $\overline{س ص}$

في ء ، $\overline{ب جـ}$ في و .

برهن أن : $\frac{|أ ء|}{|أ و|} = \frac{١}{٣}$.



شكل (٦ –٢٧)

المعطيات :

س نقطة على $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث $\frac{|\text{أ س}|}{|\text{س ب}|} = \frac{1}{2}$ ، ص نقطة على $\overline{\text{أ جـ}}$ بحيث $\frac{|\text{أ ص}|}{|\text{ص جـ}|} = \frac{1}{2}$ ، المستقيم أ و يقطع $\overline{\text{س ص}}$ في ء ، ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في و .

المطلوب : إثبات أن :

$$\frac{|\text{أ ء}|}{|\text{أ و}|} = \frac{1}{3}$$

البرهان :

∵ $\frac{|\text{أ س}|}{|\text{س ب}|} = \frac{|\text{أ ص}|}{|\text{ص جـ}|} = \frac{1}{2}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ (عكس النتيجة)

ومنه $\overline{\text{س ء}} \parallel \overline{\text{ب و}}$

∴ $\frac{|\text{أ س}|}{|\text{س ب}|} = \frac{|\text{أ ء}|}{|\text{ء و}|}$ (نتيجة)

∴ $\frac{|\text{أ ء}|}{|\text{ء و}|} = \frac{1}{2}$ ومنه $\frac{|\text{ء و}|}{|\text{أ ء}|} = \frac{2}{1}$ (خواص التناسب) .

∴ $\frac{|\text{ء و}| + |\text{أ ء}|}{|\text{أ ء}|} = \frac{3}{1}$ (لمـــــاذا ؟)

، ∵ $|\text{ء و}| + |\text{أ ء}| = |\text{أ و}|$

∴ $\frac{|\text{أ و}|}{|\text{أ ء}|} = \frac{3}{1}$ أي أن : $\frac{|\text{أ ء}|}{|\text{أ و}|} = \frac{1}{3}$ وهو المطلوب

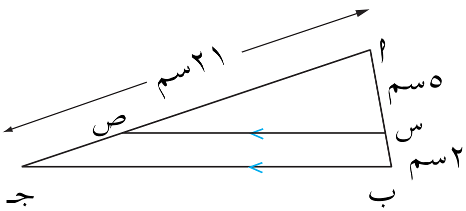
تمارين ومسائل

[١] في الشكل (٦ – ٢٨):

|أ جـ| = ٢١سم ، |أ س| = ٥سم ،

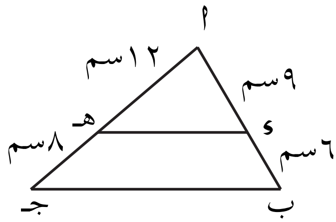
|س ب| = ٢سم ، س ص // ب جـ ،

أوجد |أ ص| ، |ص جـ| .

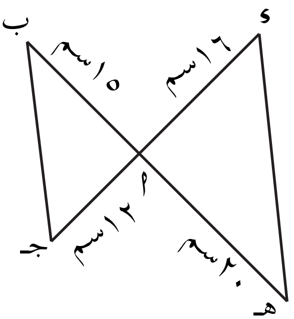


شكل (٦ – ٢٨)

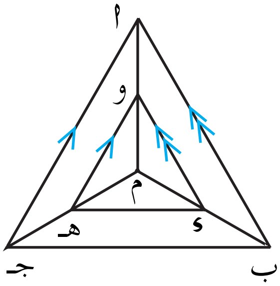
[٢] إثبت أن : ء هـ // ب جـ في كل من الأشكال (٦–٢٩ أ ، ب ، جـ):



شكل (٦ – ٢٩أ)



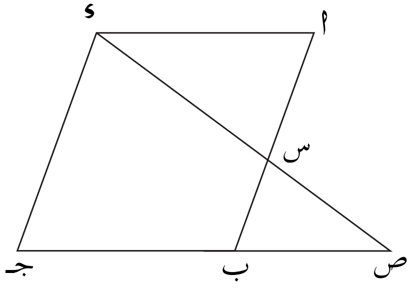
شكل (٦ – ٢٩ب)



شكل (٦ – ٢٩جـ)

[٣] في الشكل (٦–٣٠): أ ب جـ ء متوازي اضلاع ، س نقطة على أ ب. رسم ء س ومدَّ حتى لاقى امتداد جـ ب في ص .

برهن أن : $\frac{|ص ب|}{|ب جـ|} = \frac{|ب س|}{|س أ|}$



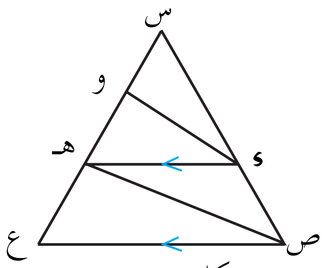
شكل (٦ – ٣٠)

[٤] في الشكل(٦ – ٣١) : Δ س ص ع

فيه : $\overline{ءهـ}$ // $\overline{ص ع}$ ، ونقطة على $\overline{س ع}$

بحيث كان: $\frac{|س و|}{|و هـ|} = \frac{|س هـ|}{|هـ ع|}$ ،

إِثبت أن : $\overline{ء و}$ // $\overline{ص هـ}$.



شكل (٦ – ٣١)

[٥] ا ب جـ مثلـث ، ء نقطة على $\overline{ا ب}$ بحيث كان : $\frac{|ا ء|}{|ء ب|} = \frac{٨}{٣}$ ،

هـ نقطة على $\overline{ب جـ}$ بحيث كان : $\frac{|ب هـ|}{|هـ جـ|} = \frac{٣}{٨}$. رسم $\overleftrightarrow{ب ص}$ بحيث

يقطع $\overline{ء هـ}$ في س ، ويقطع $\overline{ا جـ}$ في ص .أثبت أن : $\frac{|س ص|}{|ب ص|} = \frac{٨}{١١}$.

٦ : ٦ المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية مثلث

في الشكل (٦ – ٣٢)

ا ب جـ مثلث ، $\overleftarrow{ا ء}$ ينصـف ∢ ا

من الداخل ويقطـع الضلـع ب جـ

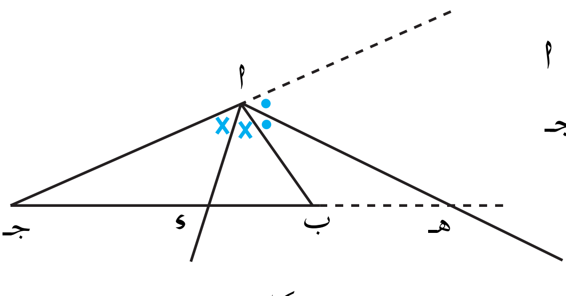
في النقطـة ء . لذلك يسمى

$\overleftarrow{ا ء}$ منصفاً داخليا للزاوية ا .

$\overleftarrow{ا هـ}$ ينصف ∢ا من الخارج ويقطع

امتداد الضلع جـ ب في النقطة هـ ،

لذلك يسمى $\overleftarrow{ا هـ}$ منصفاً خارجياً للزاوية ا .



شكل (٦ – ٣٢)

مبرهنة المنصف

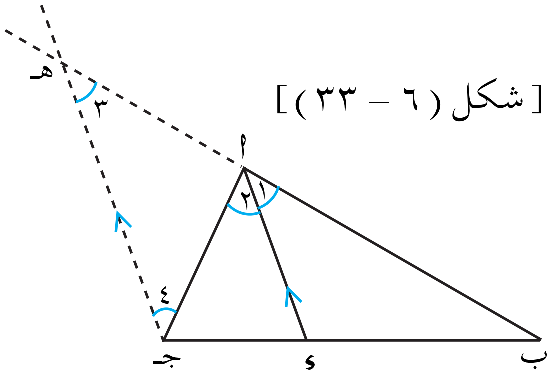
المنصف لزاوية مثلث من الداخل أو الخارج يقسم الضلع المقابل للزاوية من الداخل أو الخارج إلى جزءين النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولي ضلعي الزاوية

المعطيات : في Δ أ ب جـ ،

$\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∡ أ من الداخل ، [شكل (٦ – ٣٣)]

المطلوب : إثبات أن :

$$\frac{|\text{ب أ}|}{|\text{أ جـ}|} = \frac{|\text{ب ء}|}{|\text{ء جـ}|}$$



شكل (٦ – ٣٣)

العمل :

من النقطة جـ نرسم $\overleftarrow{\text{جـ هـ}} \parallel \overline{\text{ء أ}}$

ويقطع $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ في النقطة هـ .

البرهان :

في Δ ب جـ هـ ، $\because$ $\overline{\text{ء أ}} \parallel \overline{\text{جـ هـ}}$ (عملاً)

$$\therefore \frac{|\text{ب أ}|}{|\text{أ هـ}|} = \frac{|\text{ب ء}|}{|\text{ء جـ}|} \quad (١)$$

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{ء أ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ قاطعان لهما

$\therefore$ ق (∡ ١) = ق (∡ ٣) (بالتناظر)

، ق (∡ ٢) = ق (∡ ٤) (بالتبادل)

لكن ق (∡ ١) = ق (∡ ٢) (معطى)

∴ ق (∡ ٣) = ق (∡ ٤)

وحيث أن ∡ ٣ ، ∡ ٤ هما زاويتا القاعدة في Δ ا جـ هـ

∴ | ا جـ | = | ا هـ | (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

$$\frac{|ب ا|}{|ا جـ|} = \frac{|ب ء|}{|ء جـ|}$$ وهو المطلوب

تدريـــب برهن مبرهنة المنصف في حالة $\overleftarrow{ا ء}$ ينصف ∡ ا من الخارج .

مثال (١)

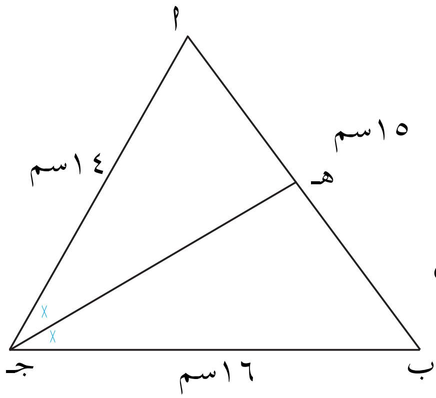
علـــــى الشكل (٦ – ٣٤) :

ا ب جـ مثلث فيه :

| ا ب | = ١٥سم ، | ا جـ | = ١٤سم ،

| ب جـ | = ١٦سم ، $\overline{جـ هـ}$ منصف داخلي للزاوية جـ .

أوجد كلاً من | ب هـ | ، | هـ ا | .



شكل (٦ –٣٤)

الحـــل :

∵ $\overline{جـ هـ}$ منصف داخلي للزاوية جـ في Δ ا ب جـ

$$\therefore \frac{|ب جـ|}{|جـ ا|} = \frac{|ب هـ|}{|هـ ا|}$$

$\therefore \quad \frac{١٦}{١٤} = \frac{|ب هـ|}{|هـ ؟|}$ ومنها $\frac{١٦ + ١٤}{١٤} = \frac{|ب هـ| + |هـ ؟|}{|هـ ؟|}$

$\frac{|ب ؟|}{|هـ ؟|} = \frac{٣٠}{١٤}$ ، $\frac{١٥}{|هـ ؟|} = \frac{٣٠}{١٤}$

$\therefore \quad |هـ ؟| = \frac{١٥ \times ١٤}{٣٠} = ٧$سم

، $|ب هـ| = |ب ؟| - |؟ هـ| = ١٥$سم $- ٧$سم $= ٨$سم

مثال (٢)

في Δ ؟ ب جـ النقطة (س) تنصف $\overline{ب جـ}$ ، ص نقطة على $\overline{؟ ب}$ ، ع نقطة على $\overline{؟ جـ}$ بحيث $\overrightarrow{س ص}$ ينصف $\measuredangle$ ؟ س ب ، $\overrightarrow{س ع}$ ينصف $\measuredangle$ ؟ س جـ .

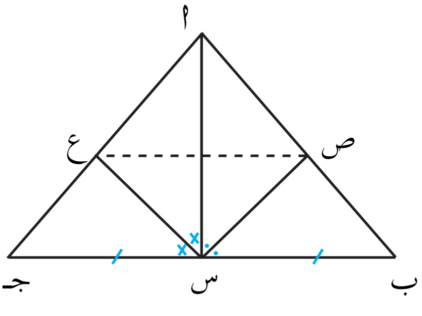
برهن أن : $\overline{ص ع} \parallel \overline{ب جـ}$.

المعطيات : في Δ ؟ ب جـ :

$|ب س| = |جـ س|$ ، $\overline{س ص}$ تنصف

$\measuredangle$ ؟ س ب ، $\overline{س ع}$ تنصف $\measuredangle$ ؟ س جـ

[انظر الشكل (٦ – ٣٥)] .



شكل (٦ – ٣٥)

المطلوب : إثبات أن :

$\overline{ص ع} \parallel \overline{ب جـ}$

البرهان :

$\because$ $\overline{س ص}$ تنصف $\measuredangle$ ؟ س ب

$\therefore \quad \frac{|؟ س|}{|س ب|} = \frac{|؟ ص|}{|ص ب|}$ (١) (مبرهنة المنصف)

، $\because$ $\overline{\text{س ع}}$ تنصف ∡ ا س جـ

$\therefore$ $\dfrac{|\text{ا س}|}{|\text{س جـ}|} = \dfrac{|\text{ا ع}|}{|\text{ع جـ}|}$ ، لكن $|\text{س ب}| = |\text{س جـ}|$

$\therefore$ $\dfrac{|\text{ا س}|}{|\text{س ب}|} = \dfrac{|\text{ا ع}|}{|\text{ع جـ}|}$ (٢)

بمقارنة (١) ، (٢) ينتج أن

$\dfrac{|\text{ا ص}|}{|\text{ص ب}|} = \dfrac{|\text{ا ع}|}{|\text{ع جـ}|}$

$\therefore$ $\overline{\text{ص ع}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ (نتيجة) وهو المطلوب

عكس مبرهنة المنصف :

« إذا قسم أحد أضلاع مثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزءين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين . كان المستقيم الواصل من نقطة التقسيم إلى الرأس المقابل هو المنصف من الداخل أو من الخارج لزاوية الرأس» .

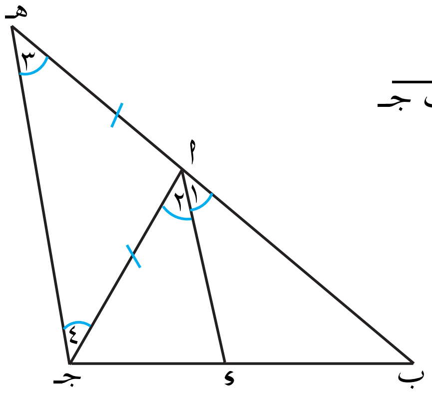
المعطيات :

في Δ ا ب جـ النقطة (ء) تقسم $\overline{\text{ب جـ}}$

بحيث $\dfrac{|\text{ب ء}|}{|\text{ء جـ}|} = \dfrac{|\text{ب ا}|}{|\text{ا جـ}|}$

المطلوب : إثبات أن :

$\overline{\text{ا ء}}$ ينصف ∡ ا من الداخل



شكل (٦ –٣٦)

العمل : نمد $\overline{ب ا}$ إلى النقطة « هـ » بحيث : |ا هـ| = |ا جـ| ، نرسم $\overline{هـ جـ}$
[انظر الشكل (٦–٣٦)] .

البرهان : في Δ ا جـ هـ

∵ |ا هـ| = |ا جـ| (عملاً)

∴ ق (∡ ٣) = ق (∡ ٤)

، ∵ $\frac{|ب ا|}{|ا جـ|} = \frac{|ب ء|}{|ء جـ|}$ (معطى)

∴ $\frac{|ب ا|}{|ا هـ|} = \frac{|ب ء|}{|ء جـ|}$

∴ $\overline{ء ا}$ // $\overline{جـ هـ}$ ومنه

ق (∡ ١) = ق (∡ ٣) بالتناظر

ق (∡ ٢) = ق (∡ ٤) بالتبادل

، ∵ ق (∡ ٣) = ق (∡ ٤)

∴ ق (∡ ١) = ق (∡ ٢)

أي أن : $\overline{ا ء}$ ينصف ∡ ا وهو المطلوب

تدريب

برهن عكس المبرهنة عندما تقسم النقطة « ء » الضلع ب جـ من الخارج
بحيث $\frac{|ب ا|}{|ا جـ|} = \frac{|ب ء|}{|ء جـ|}$.

مثال (٣) في الشكل (٦ –٣٧) ا ب جـ مثلث فيه |ا ب| = ٦سم،

$|$ب جـ$|$ = ٥سم ، $|$أ جـ$|$ = ٤سم مدت $\overline{\text{ب جـ}}$ إلى النقطة هـ بحيث $|$جـ هـ$|$ = ١٠سم . أثبت أن : $\overline{\text{أ هـ}}$ منصف خارجي للزاوية أ .

المعطيات :

في Δ أ ب جـ : $|$أ ب$|$ = ٦سم ، $|$ب جـ$|$ = ٥سم ، $|$أ جـ$|$ = ٤سم ،

هـ نقطة على امتداد $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $|$جـ هـ$|$ = ١٠سم .

المطلوب : إثبات أن : $\overline{\text{أ هـ}}$ ينصف $\hat{\text{أ}}$ من الخارج .

البرهان :

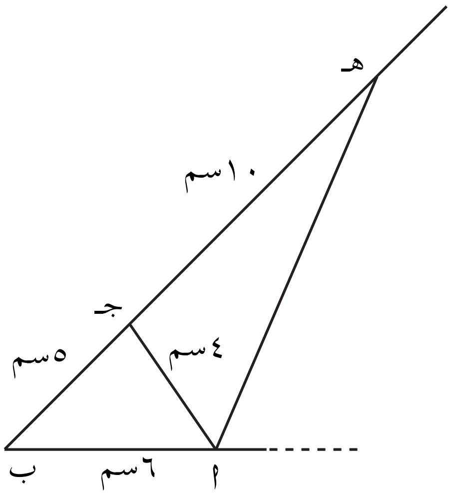
$\because \dfrac{|\text{ب أ}|}{|\text{أ جـ}|} = \dfrac{\cancel{٦}^{٣}\text{سم}}{\cancel{٤}_{٢}\text{سم}} = \dfrac{٣}{٢}$ (١)

$\dfrac{|\text{ب هـ}|}{|\text{جـ هـ}|} = \dfrac{\cancel{١٥}^{٣}\text{سم}}{\cancel{١٠}_{٢}\text{سم}} = \dfrac{٣}{٢}$ (٢)

بمقارنة (١) ، (٢) ينتج أن :

$\dfrac{|\text{ب أ}|}{|\text{أ جـ}|} = \dfrac{|\text{ب هـ}|}{|\text{جـ هـ}|}$

$\therefore$ $\overline{\text{أ هـ}}$ ينصف $\hat{\text{أ}}$ من الخارج .



شكل (٦ – ٣٧)

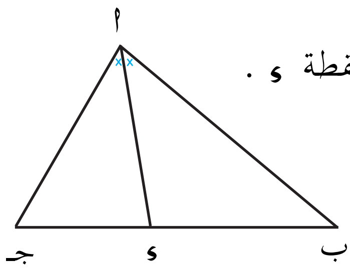
تمارين ومسائل

[١] في الشكل (٦–٣٨) : أ ب جـ مثلث ،

$\overline{\text{أ ء}}$ منصف للزاوية أ يقابل $\overline{\text{ب جـ}}$ في النقطة ء .

أكمل العبارات التالية بما يجعلها صحيحة :

أ) $\dfrac{|\text{جـ ء}|}{|\text{ء ب}|} = \dots$



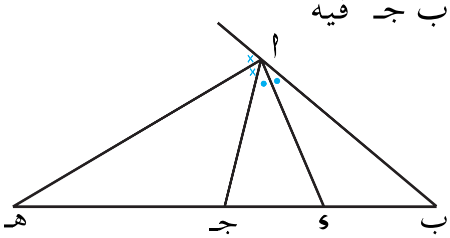
شكل (٦ – ٣٨)

ب) إذا كان $\frac{|\text{أ جـ}|}{|\text{أ ب}|} = \frac{٢}{٣}$ ، |ب ء| = ٦سم فإن |جـ ء| = . . .

جـ) إذا كان |أ ب| = |أ جـ| فإن |ب ء| = . . .

ء) إذا كان |أ ب| > |أ جـ| فإن |ب ء| . . . |ء جـ|

[٢] في الشكل (٦ – ٣٩) :Δ أ ب جـ فيه أ ء ، أ هـ المنصفان الداخلي والخارجي على الترتيب للزاوية أ ، فإذا كان |أ ب| = ٦سم ، |أ جـ| = ٤سم ، |ب ء| = ٣سم . فأوجد كلاً من |ء جـ| ، |هـ جـ| .



شكل (٦ – ٣٩)

[٣] باستخدام (مبرهنة المنصف) ، برهن على أن « في المثلث المتساوي الساقين ، المنصف لزاوية الرأس ينصف القاعدة » .

[٤] أ ب جـ مثلث مختلف الأضلاع . نصفت الزاوية أ من الداخل بالمنصف أ ء ، ومن الخارج بالمنصف أ هـ بحيث يلاقيان ب جـ وامتداده في النقطتين ء ، هـ على الترتيب . برهن أن أ هـ ⊥ أ ء .

[٥] أ ب جـ مثلث فيه : |أ ب| = ١٢سم ، |أجـ| = ٨سم ، نصفت ∢ أ بمنصف لاقى ب جـ في النقطة ء بحيث كان |ب ء| = ٦سم . فإذا مدت ب جـ إلى نقطة هـ بحيث كان |جـ هـ| = ٢٠سم فأثبت أن أ هـ منصف خارجي للزاوية أ .

[٦] برهن أن « في المثلث المتساوي الساقين ، المنصف الخارجي لزاوية الرأس يوازي القاعدة » .

[٧] ا ب جـ مثلث . فرضت نقطة (س) داخلة ثم وصلت كلاً من $\overline{\text{س ا}}$ ، $\overline{\text{س ب}}$ ، $\overline{\text{س جـ}}$ نصفت الزوايا ب س جـ ، جـ س ا ، ا س ب بمنصفات لاقت الأضلاع $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ا}}$ ، $\overline{\text{ا ب}}$ على الترتيب في النقاط ء ، و ، هـ.

أثبت أن :

$$\frac{|\text{ب ء}|}{|\text{ء جـ}|} \times \frac{|\text{جـ و}|}{|\text{و ا}|} \times \frac{|\text{ا هـ}|}{|\text{هـ ب}|} = ١$$

٦ : ٧ التشـــابـــــه

تمهيد :

تأمل الصور الموضحة في الشكل (٦ – ٤٠) . ماذا تلاحظ ؟

(ا)

(ب)

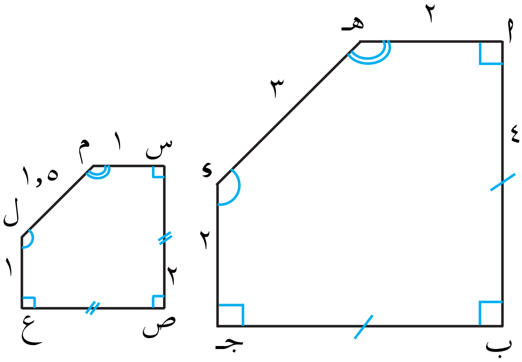
(جـ)

شكل (٦ – ٤٠)

تلاحظ أن الصور الثلاث تحوي الشكل نفسه (المسجد الأقصى) ، ولكنها ليست كلها بنفس الأبعاد . فالصورتان (ا) ، (جـ) لهما نفس الأبعاد بينما الصورة (ب) تختلف عنهما بالأبعاد . نسمي مثل هذه الأشكال – أشكال متشابهة .

نشـــاط

– تأمل الشكلين (٦ – ٤١ أ) ، (٦ – ٤١ ب) .



(ب) (أ)

شكل (٦ – ٤١)

– احسب النسب التالية :

$\frac{|\text{س م}|}{|\text{أ هـ}|}$ ، $\frac{|\text{س ص}|}{|\text{أ ب}|}$ ، $\frac{|\text{ص ع}|}{|\text{ب جـ}|}$ ، $\frac{|\text{ل ع}|}{|\text{ء جـ}|}$ ، $\frac{|\text{ل م}|}{|\text{ء هـ}|}$.

ماذا تلاحظ على هذه النسب ؟

– قارن زوايا الشكلين . ماذا تلاحظ ؟

مما سبق تلاحظ أن : ق (∡ س) = ق (∡ أ) ، ق (∡ ص) = ق (∡ ب) ،
ق (∡ ع) = ق (∡ جـ) ، ق (∡ ل) = ق (∡ ء) ، ق (∡ م) = ق (∡ هـ) .

كما تلاحظ أن :

$$\frac{|\text{س ص}|}{|\text{أ ب}|} = \frac{|\text{ص ع}|}{|\text{ب جـ}|} = \frac{|\text{ل ع}|}{|\text{ء جـ}|} = \frac{|\text{م ل}|}{|\text{هـ ء}|} = \frac{|\text{س م}|}{|\text{أ هـ}|}$$

وبنـــاء على ذلك نقـــول أن الشكلين متشابهان ، ونسبة تشابههمـــا هي

$\frac{|\text{س ص}|}{|\text{أ ب}|}$ ، أو $\frac{|\text{ص ع}|}{|\text{ب جـ}|}$ ، أو $\frac{|\text{ل ع}|}{|\text{ء جـ}|}$ ، أو $\frac{|\text{م ل}|}{|\text{هـ ء}|}$ ، أو $\frac{|\text{س م}|}{|\text{أ هـ}|}$

يتشابه الشكلان الهندسيان إِذا تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة وتطابقت (تساوت في القياس) زواياهما المتناظرة .
وتسمى النسبة بين طولي ضلعين متناظرين نسبة التشابه .

ملاحظة هامــه :

لتحديد الأضلاع المتناسبة والزوايا المتطابقة لشكلين هندسين (مُضلعين) متشابهين ، من المناسب كتابة رموز هذين المضلعين بطريقة يستدل بها على التناظر بين عناصرهما (الأضلاع والزوايا) ، أي بحيث يكون ترتيب رووس المضلعين واحداً .

فعلى سبيل المثال إِذا كان الشكلان ا ب جـ ء ، س ص ع ل متشابهين فإِننا نكتب ذلك على النحو التالي ا ب جـ ء ∽ س ص ع ل .

ويعني ذلك :

ا	ب	جـ	ء
↓	↓	↓	↓
س	ص	ع	ل

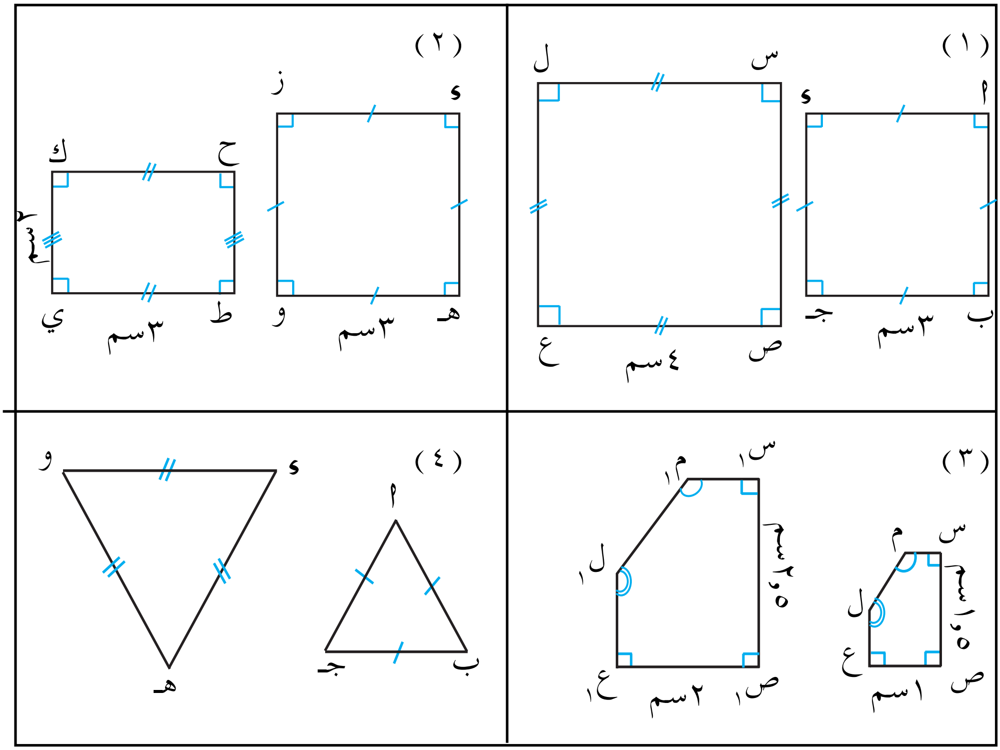
أي أن :

ق (∡ ا) = ق (∡ س) ، ق (∡ ب) = ق (∡ ص) ، ق (∡ جـ) = ق (∡ ع) ، ق (∡ ء) = ق (∡ ل) .

، $\frac{|\text{ا ب}|}{|\text{س ص}|} = \frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{ص ع}|} = \frac{|\text{جـ ء}|}{|\text{ع ل}|} = \frac{|\text{ا ء}|}{|\text{س ل}|}$.

مثال (١)

حدد أزواج الأشكال المتشابهة وغير المتشابهة ، مع ذكر السبب في كلٍ مما يلي :



شكل (٦ – ٤٢)

الحل :

١) واضح أن الزوايا المتناظرة في الشكلين متطابقة « جميعها قوائم » ،

$$\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{س ص}|} = \frac{٣}{٤} \quad ، \quad \frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{ص ع}|} = \frac{٣}{٤} \quad ، \quad \frac{|\text{جـ ء}|}{|\text{ع ل}|} = \frac{٣}{٤} \quad ، \quad \frac{|\text{ء أ}|}{|\text{ل س}|} = \frac{٣}{٤}$$

أي أن الأضلاع المتناظرة متناسبة ، اذن الشكلان متشابهان .

٢) الزوايا المتناظرة في الشكلين متطابقة . لماذا ؟

لكن $\frac{|\text{ح ط}|}{|\text{ء هـ}|} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{|\text{ط ي}|}{|\text{هـ و}|} = \frac{٣}{٣} = ١$

أي أن $\frac{|ح\ ط|}{|ء\ هـ|} \neq \frac{|ط\ ي|}{|هـ\ و|}$.

∴ الشكلان غير متشابهين

٣) الزوايا المتناظرة في الشكلين متطابقة . (تحقق من ذلك) .

لكن $\frac{|س\ ص|}{|س_١\ ص_١|} = \frac{١,٥}{٢,٥} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{|ص\ ع|}{|ص_١\ ع_١|} = \frac{١}{٢}$

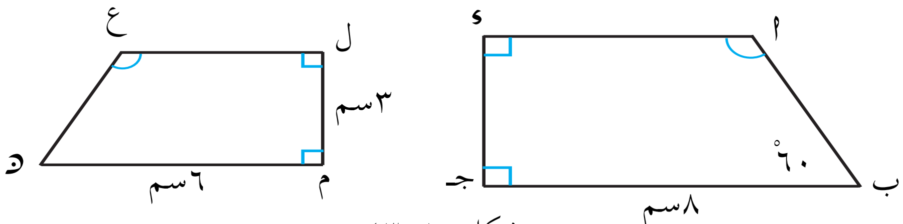
أي أن $\frac{|س\ ص|}{|س_١\ ص_١|} \neq \frac{|ص\ ع|}{|ص_١\ ع_١|}$ ∴ الشكلان غير متشابهين.

٤) الشكلان متشابهان ، لأن جميع الزوايا المتناظرة متطابقة ، الأضلاع المتناظرة متناسبة . (تحقق من ذلك)

مثال (٢)

في الشكل (٦ – ٤٣) : مضلعان متشابهان . أوجد :

١) ق (∠ ن) ٢) نسبة التشابه ٣) |ء جـ| .



شكل (٦ –٤٣)

الحل :

∵ المضلعان أ ب جـ ء ، ع ن م ل متشابهان، ق (∠أ) = ق (∠ ع)،

ق (∠ء) = ق (∠ ل) ، ق (∠ جـ) = ق (∠ م) .

∴ نكتب رؤوس المضلعين على النحو التالي :

ا	ب	جـ	ء
↓	↓	↓	↓
ع	ن	م	ل

ومنها

١) ق (∡ ن) = ق (∡ ب) = ٦٠°

٢) نسبة التشابه هي : $\frac{|م ن|}{|جـ ب|} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

٣) ∵ $\overline{ء جـ}$ يناظر $\overline{ل م}$ ونسبة التشابه هي $\frac{٣}{٤}$

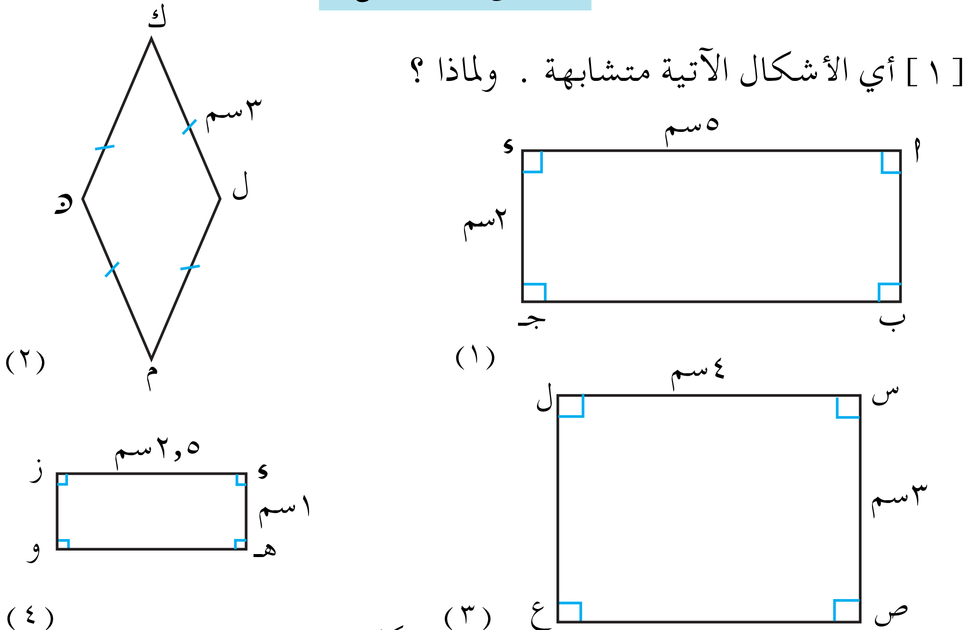
∴ $\frac{|ل م|}{|ء جـ|} = \frac{٣}{٤}$

ومنه $\frac{٣}{|ء جـ|} = \frac{٣}{٤}$.

∴ |ء جـ| = ٤سم .

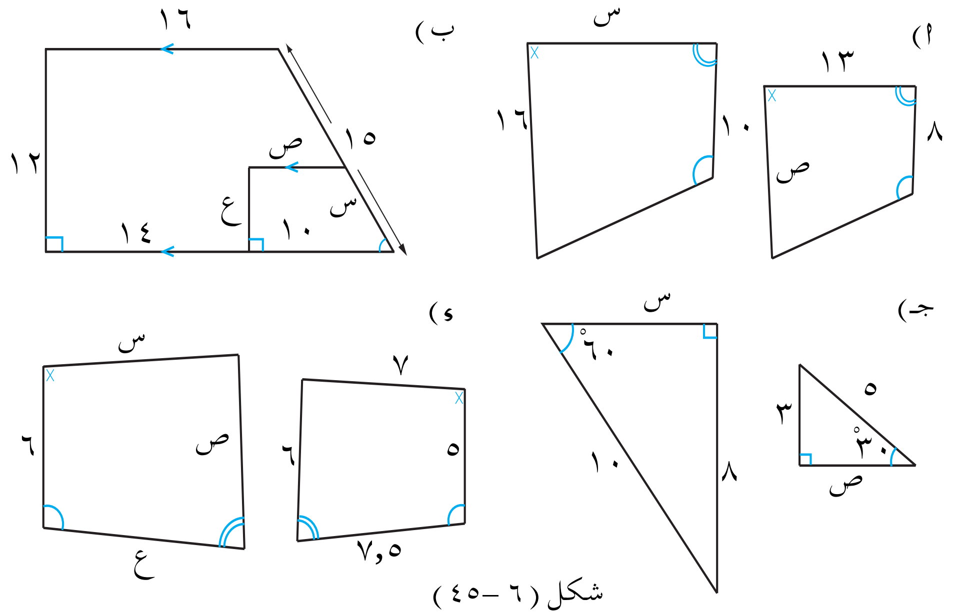
تمارين ومسائل

[١] أي الأشكال الآتية متشابهة . ولماذا ؟



شكل (٦ – ٤٤)

[٢] في كلٍ مما يلي إذا علمت أن الشكلين متشابهان، فأوجد كلاً من س، ص، ع .



شكل (٦ – ٤٥)

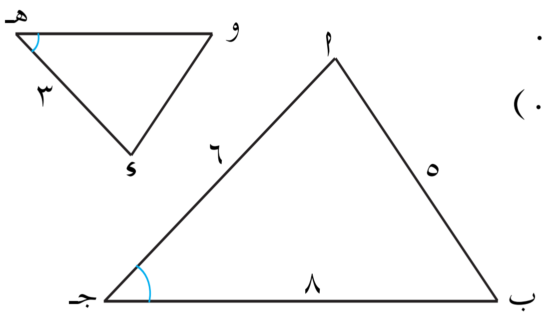
[٣] في الشكل (٦– ٤٦) مثلثان متشابهان ونسبة تشابههما هي ٢ . أكمل :

١) Δ ا ب جـ ~ Δ ...

٢) ق (∠ و) = ق (∠ ...)

٣) | هـ و | = ...

٤) | و ء | = ...



شكل (٦ – ٤٦)

[٤] ضع (√) أمام العبارة الصحيحة فيما يلي :

١) جميع المربعات متشابهة . ٢) يمكن أن يتشابه المعين والمربع .

٣) جميع المثلثات المتساوية الأضلاع متشابهة .

٤) جميع المثلثات المتساوية الساقين متشابهة .

٥) جميع المستطيلات متشابهة .

[٥] Δ ا ب جـ ~ Δ ء هـ و ، بحيث كان ق (∠ ا) = ق (∠ ء) ، ق (∠ ب) = ق (∠ هـ) ، | ا ب | = ٦ سم ، | ب جـ | = ٥ سم ، | ء و | = ٣ سم ، نسبة التشابه $\frac{٢}{٣}$ فأوجد | هـ و | ، | جـ ا | .

٦ : ٨ تشابه المثلثات

تعلم أن تشابه مثلثين ا ب جـ ، ء هـ و ينتج عنه :

١ – تناسب الأضلاع المتناظرة ، أي أن :

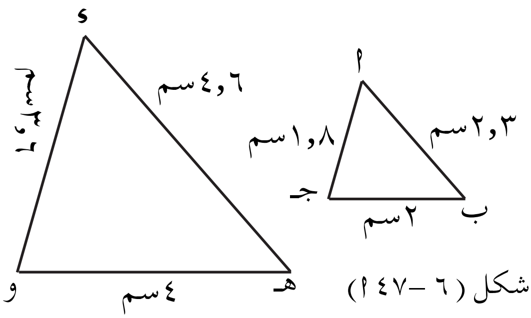
$$\frac{|\text{ا ب}|}{|\text{ء هـ}|} = \frac{|\text{ا جـ}|}{|\text{ء و}|} = \frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{هـ و}|}$$

٢ – تطابـــق الزوايـــا المتناظـــــرة ، أي أن : ق (∡ أ) = ق (∡ د) ، ق (∡ ب) = ق (∡ هـ) ، ق (∡ جـ) = ق (∡ و) .

ولكي نثبت تشابه مثلثين ، فمن الضروري أن نثبت تناسب أضلاعهما المتناظرة وتطابق زواياهما المتناظرة ، غير أننا نستطيع أن نقلل تلك الشروط بحيث نطبق الشروط الكافية لتشابه مثلثين فقط، وهذا ما نسميه حالات تشابه مثلثين .

الحالة الأولى لتشابه مثلثين :

نشــــاط



شكل (٦ –٤٧ أ)

شكل (٦ –٤٧ب)

١) ارسم المثلثين أ ب جـ ، د هـ و بالقياسات المعطاة ، كما في الشكل (٦ – ٤٧ أ ، ب) .

٢) تحقق من تناسب الأضلاع المتناظرة ،

أي أن $\frac{|أ\ ب|}{|د\ هـ|} = \frac{|أ\ جـ|}{|د\ و|} = \frac{|ب\ جـ|}{|هـ\ و|}$

٣) استخدم المنقلة لقياس زوايا المثلثين ، وتحقق من تطابق الزوايا المتناظـرة ،

أي أن ق (∡ أ) = ق (∡ د) ، ق (∡ ب) = ق (∡ هـ) ، ق (∡ جـ) = ق (∡ و) .

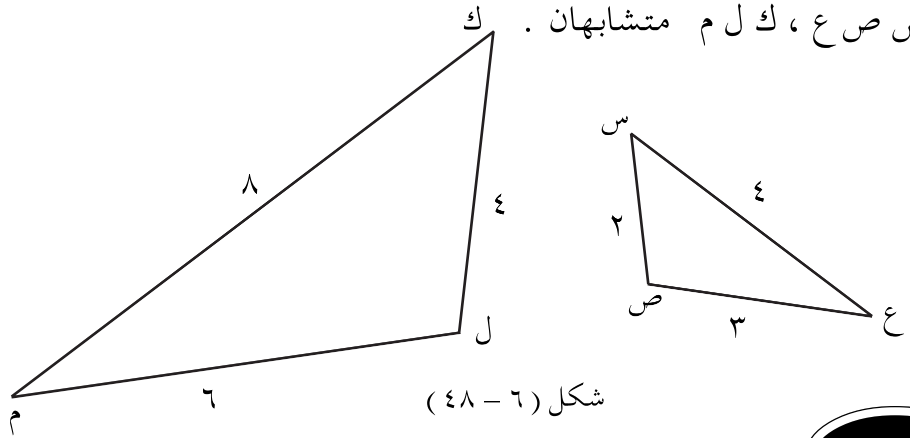
نستنتج أن المثلثين أ ب جـ ، د هـ و متشابهان .

٤) كرر الخطوات السابقة عدة مرات مع تغيير أطـوال الأضــلاع فـي المثلثين «بشرط أن تكون الأضلاع المتناظرة متناسبة في كل حالة» . ستجد في كل مرة أن الزوايا المتناظرة متطابقة ، وبالتالي المثلثان متشابهان .

من النشاط السابق نستنتج :

يتشابه مثلثان إِذا تناسبت أضلاعهما المتناظرة

مثال (١) حسب البيانات الموضحة على الشكل (٦–٤٨)،أثبت أن المثلثين س ص ع ، ك ل م متشابهان .



شكل (٦ – ٤٨)

الحـــل :

$$\because \quad \frac{|\text{س ص}|}{|\text{ك ل}|} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢} \quad ، \quad \frac{|\text{ص ع}|}{|\text{ل م}|} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢} \quad ،$$

$$\frac{|\text{س ع}|}{|\text{ك م}|} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

أي أن $\frac{|\text{س ص}|}{|\text{ك ل}|} = \frac{|\text{ص ع}|}{|\text{ل م}|} = \frac{|\text{س ع}|}{|\text{ك م}|}$

$\therefore$ المثلثان س ص ع ، ك ل م متشابهان .

مثال (٢)

ما أطـــوال أضـلاع المثلــث ء هـ و المشابه للمثلـث ا ب جـ الذي فيــه

|أ ب| = ٦,٦سم ، |ب جـ| = ٢,٤سم ، |أجـ| = ٥,٧سم ، حيث نسبة تشابه

Δ ء هـ و إلى Δ أ ب جـ هي $\frac{١}{٣}$ ؟

الحل :

∵ Δ ء هـ و ∼ Δ أ ب جـ ، نسبة التشابه = $\frac{١}{٣}$

∴ $\frac{|ء هـ|}{|أ ب|} = \frac{|هـ و|}{|ب جـ|} = \frac{|ء و|}{|أ جـ|} = \frac{١}{٣}$

ومنها $\frac{|ء هـ|}{|أ ب|} = \frac{١}{٣}$ ،

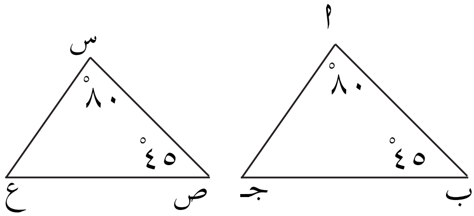
∴ $\frac{|ء هـ|}{٦,٦} = \frac{١}{٣}$ ومنها |ء هـ| = $\frac{٦,٦}{٣}$ = ٢,٢سم

بالمثل $\frac{|هـ و|}{|ب جـ|} = \frac{١}{٣}$ ومنها |هـ و| = $\frac{٢,٤}{٣}$ = ٠,٨سم ،

|ء و| = $\frac{٥,٧}{٣}$ = ١,٩ سم (لماذا ؟)

الحالة الثانية لتشابه مثلثين :

نشاط



شكل (٦ – ٤٩)

١) ارسم المثلثين أ ب جـ ، س ص ع ،
بحيث تكون :
ق (∢أ) = ق (∢س) = ٨٠° ،
ق (∢ب) = ق (∢ص) =٤٥° [انظر الشكل (٦–٤٩)] .

لاحظ أن :

ق($\measuredangle$ جـ) = ق ($\measuredangle$ ع) = ٥٥° لماذا ؟

٢) استخدم المسطرة لقياس أطوال الأضلاع المتناظرة ، ثم أحسب النسب التالية :

$\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{س ص}|}$ ، $\frac{|\text{أ جـ}|}{|\text{س ع}|}$ ، $\frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{ص ع}|}$ ماذا تلاحظ على هذه النسب ؟

٣) كرر ما سبق عدة مرات مع تغيير قياسات الزوايا (بشرط تطابق زاويتين من احد المثلثين مع زاويتين من الآخر) .ستجد في كل مرة أن الأضلاع المتناظرة متناسبة .

من النشاط السابق نستنتج :

يتشابه مثلثان إذا تطابقت زاويتان من أحدهما مع زاويتين من الآخر

مثال (٣)

في الشكل(٦ – ٥٠) : $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{جـ ء}}$

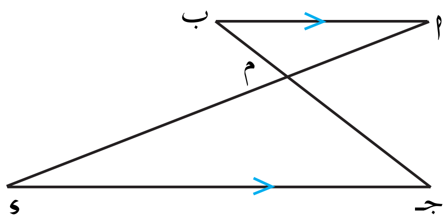
أ) اثبت أن Δ أ م ب $\sim$ Δ ء م جـ

ب) إذا كان | م ب | = ٣ سم ،

| م جـ | = ٦سم ، | م أ | = ٥سم ،

| جـ ء | = ١٤سم .

فأوجد | أ ب | ، | م ء | .



شكل (٦ – ٥٠)

الحـل :

أ) $\because$ $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{جـ ء}}$ $\therefore$ ق ($\measuredangle$ أ) = ق ($\measuredangle$ ء) (بالتبادل)

، ق ($\measuredangle$ ب) = ق ($\measuredangle$ جـ) (بالتبادل)

$\therefore \Delta$ ﺃ م ب $\sim \Delta$ ء م جـ

ب) من تشابه المثلثين ينتج : $\frac{|\text{م ب}|}{|\text{م جـ}|} = \frac{|\text{م ﺃ}|}{|\text{م ء}|} = \frac{|\text{ﺃ ب}|}{|\text{جـ ء}|}$

$\therefore \frac{٣}{٦} = \frac{٥}{|\text{م ء}|} = \frac{|\text{ﺃ ب}|}{١٤}$

من التناسب $\frac{٣}{٦} = \frac{٥}{|\text{م ء}|}$ ، ينتج $|\text{م ء}| = \frac{٦ \times ٥}{٣} = ١٠$سم

ومن التناسب $\frac{|\text{ﺃ ب}|}{١٤} = \frac{٣}{٦}$ ، ينتج $|\text{ﺃ ب}| = \frac{١٤ \times ٣}{٦} = ٧$سم

مثال (٤)

في الشكل (٦ – ٥١) :

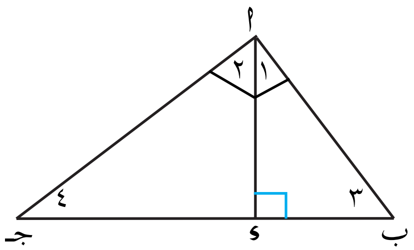
ﺃ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ﺃ ،

$\overline{\text{ﺃ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$. اثبت أن :

ﺃ) Δ جـ ﺃ ب $\sim \Delta$ جـ ء ﺃ

ب) Δ ب ء ﺃ $\sim \Delta$ ب ﺃ جـ

جـ) Δ ﺃ ء ب $\sim \Delta$ جـ ء ﺃ .



شكل (٦ – ٥١)

الحل :

ﺃ) $\Delta \Delta$ جـ ﺃ ب ، جـ ء ﺃ فيهما :

ق ($\measuredangle$ جـ ﺃ ب) = ق ($\measuredangle$ جـ ء ﺃ) (كلٍ منهما قائمة)

، $\measuredangle$ جـ مشتركة

∴ Δ جـ ا ب ~ Δ جـ ء ا

ب) بالمثل Δ ب ء ا ~ Δ ب ا جـ

جـ) من الفقرة (ا) نحصل على ق (∡ ٣) = ق (∡ ٢) ،

من (ب) نحصل على : ق (∡ ٤) = ق (∡ ١)

∴ Δ ا ء ب ~ Δ جـ ء ا .

الحالة الثالثة لتشابه مثلثين :

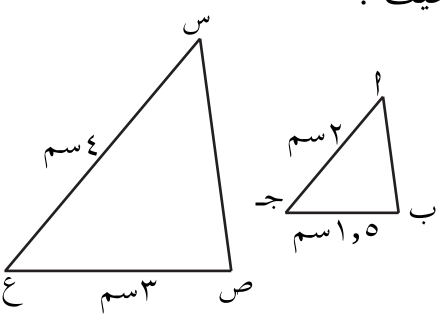
نشـــاط

١) ارسم المثلثين ا ب جـ ، س ص ع ، بحيث :

|ا جـ| = ٢سم ، |ب جـ| = ١,٥ سم ،

|س ع| = ٤سم ، |ص ع| = ٣سم ،

ق (∡ جـ) = ق (∡ ع) = ٥٠°



شكل (٦ – ٥٤)

٢) إستخدم المسطرة لقياس كلٍ من :

|ا ب| ، |س ص| ، ثم احسب $\frac{|ا\ ب|}{|س\ ص|}$

٣) قارن بين النسب $\frac{|ا\ ب|}{|س\ ص|}$ ، $\frac{|ا\ جـ|}{|س\ ع|}$ ، $\frac{|ب\ جـ|}{|ص\ ع|}$. ماذا تلاحظ ؟

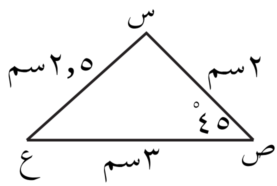
٤) استخدم المنقلة لقياس كلٍ من : ∡ ا ، ∡ ب ، ∡ س ، ∡ ص . ثم قارن قياسات الزوايا المتناظرة . ماذا تلاحظ ؟ لاشك أنك لاحظت أن : الأضلاع المتناظرة متناسبة ، والزوايا المتناظرة متطابقة .

وبالتالي فإن Δ ا ب جـ ~ Δ س ص ع .

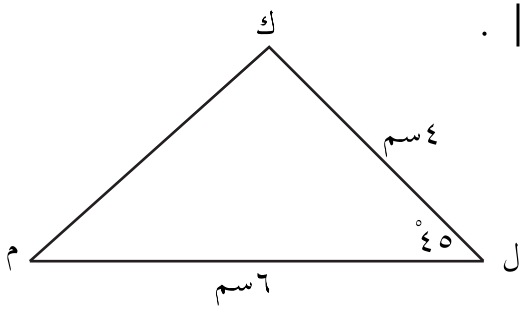
مما سبق نستتنج أن :

يتشابه مثلثان إِذا تطابقت زاوية من أحدهما مع زاوية من الأخر ، وتناسب ضلعا الزاوية الأولى مع ضلعي الزاوية الأخرى .

مثال (٥) مستعيناً بالشكلين(٦–٥٣أ ، ب) :بيّن أنΔ Δس ص ع ، ك ل م متشابهان ، ثم أوجد | ك م | .



شكل (٦ – ٥٣أ)



شكل (٦ – ٥٣ب)

الحــل :

فيΔ Δ س ص ع ، ك ل م : ق (∡ص) = ق (∡ل)= ٤٥ْ معطى ،

$\frac{|\text{س ص}|}{|\text{ك ل}|} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{|\text{ص ع}|}{|\text{ل م}|} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

أي أن زاوية من أحد المثلثين تطابق زاوية من الأ خر وضلعا الزاويتين متناسبان

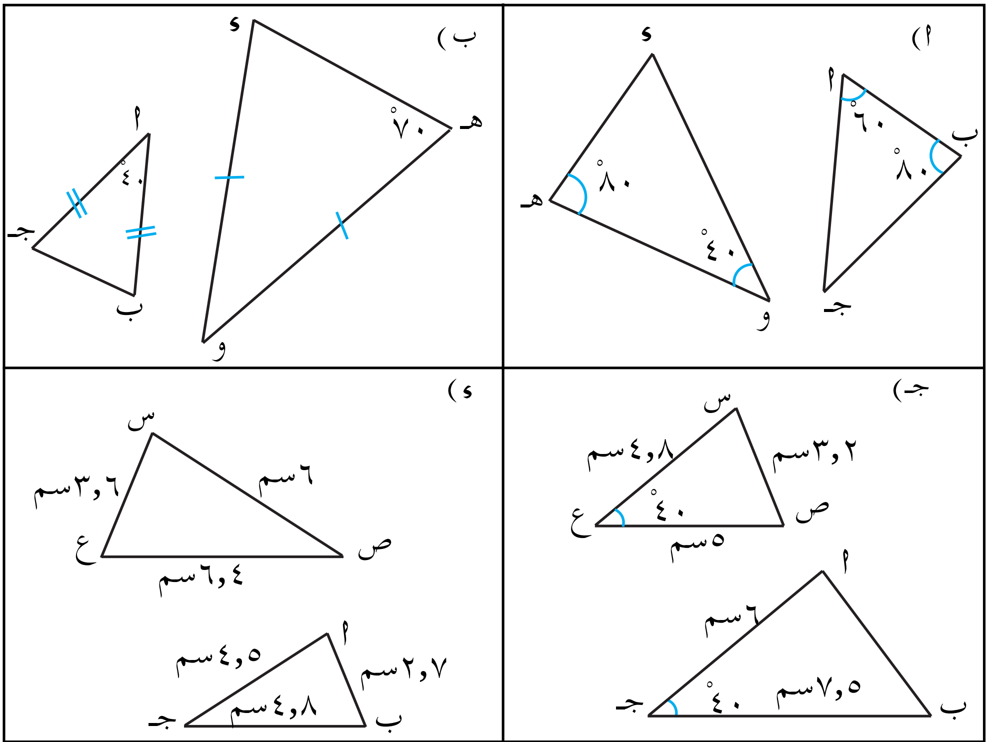
∴ المثلثان س ص ع ، ك ل م متشابهان .

ومنه نجد أن : $\frac{|\text{س ع}|}{|\text{ك م}|} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{٢,٥سم}}{|\text{ك م}|} = \frac{١}{٢}$ ∴ | ك م | = ٥سم

تمارين ومسائل

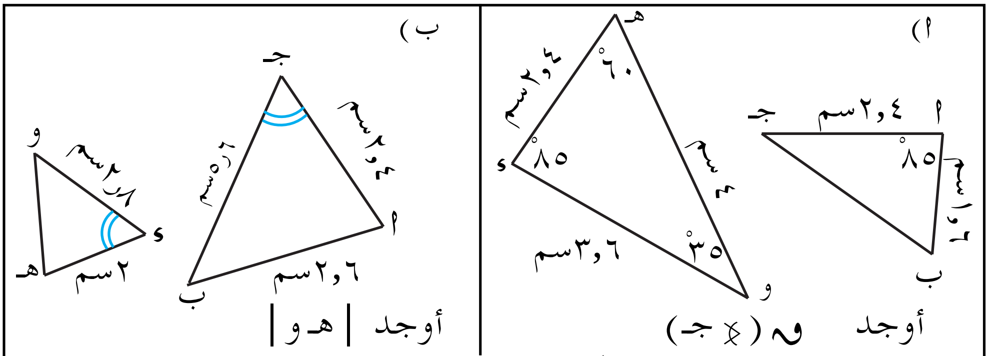
[١] حدد فيما إذا كان المثلثان متشابهين في كلٍ مما يلي ، مع ذكر السبب :



شكل (٦ – ٥٤)

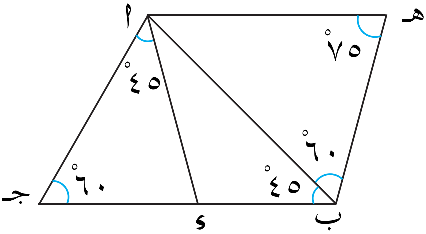
[٢] في كلٍ من الحالتين التاليتين مثلثان متشابهان .أوجد طول الضلع المطلوب،

أو قياس الزاوية المطلوبة .



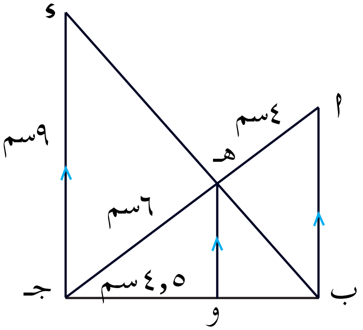
شكل (٦ – ٥٥)

[٣] بالاستعانة بالشكل (٦ –٥٦)
سمِّ مثلثين مشابهين للمثلث أ ب جـ مع ذكر السبب .



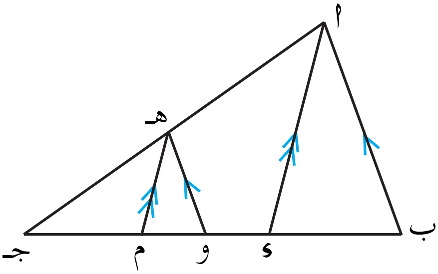
شكل (٦ –٥٦)

[٤] في الشكل (٦ – ٥٧) :
أب ∥ هـو ∥ ءجـ ،
هـ نقطة تقاطع أجـ ، ب ء .
أوجد |أ ب| ، |هـو| ، |ب جـ| .



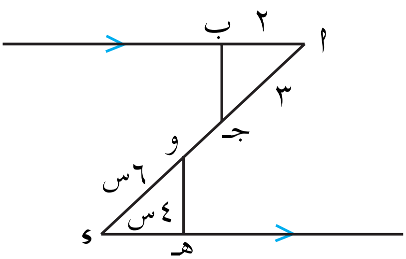
شكل (٦ –٥٧)

[٥] في الشكل (٦ – ٥٨) :
أ ب ∥ هـو ، أ ء ∥ هـم .
أ) اثبت أن Δ أ ب ء ∽ Δ هـوم
ب) إذا كان |و م| = ٤سم ،
|هـو| = ٥,٢سم، |ب ء| = ١١سم
فأوجد |أ ب| .



شكل (٦ –٥٨)

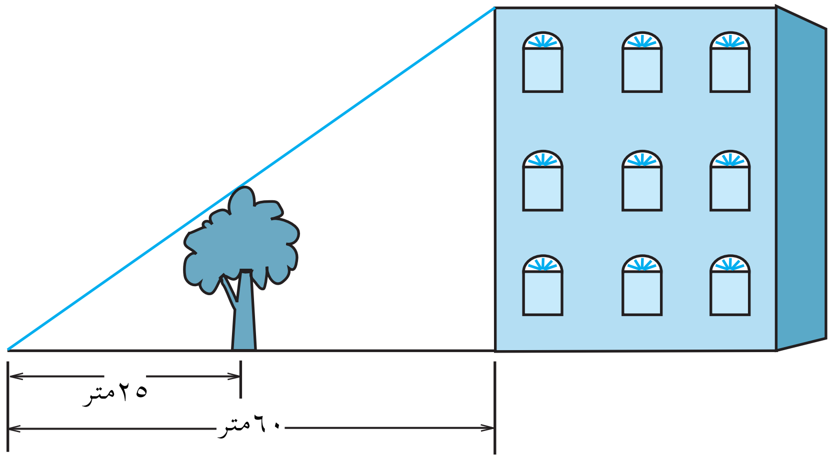
[٦] بالاستعانة بالشكل (٦– ٥٩) :
أوجد قيم س ، ص لكي يكون
المثلثان أ ب جـ ، ء هـ و :
أ) متطابقين .
ب) متشابهين وغير متطابقين .



شكل (٦ –٥٩)

[٧] س ص ع مثلث ، ك منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ، ل نقطة على $\overline{\text{س ص}}$ بحيث |س ل| = ٢سم ، فإذا كان |س ص| = ١٦سم ، |س ع| = ٨سم ، |ص ع| = ٤ |ك ل| فأثبت أن : Δ س ك ل $\sim$ س ص ع .

[٨] إستعن بالشكل (٦ – ٦٠) والأبعاد المحددة عليه لإيجاد ارتفاع المبنى ، علماً بأن ارتفاع الشجرة ٥ أمتار .



شكل (٦ – ٦٠)

تمارين عامة ومسائل

[١] باستخدام خواص التناسب . أوجد قيم س ، ص ، ع في كلٍ مما يأتي :

أ) $\frac{س}{ص} = \frac{٥}{٧}$ ، س + ص = ٢٤

ب) $\frac{س + ٣}{ص + ٣} = \frac{٢}{٣}$ ، س − ص = ٢٤

جـ) $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ ، س + ص + ع = ٣٦

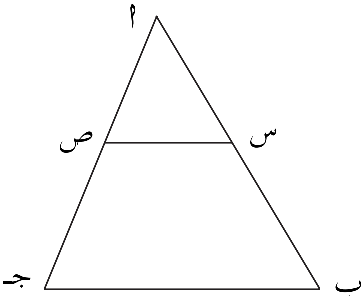
[٢] س ص قطعة مستقيمة طولها ١٥سم ، ع نقطة تقسمها من الداخل بنسبة ٣ : ٢من جهة س . أوجد كلاً من | س ع | ، | ع ص | .

[٣] في الشكل (٦ − ٦١) :

| أ ب | = ١٥سم ، | أ س | = ١٠سم ، | أ ص | = ٨سم .

فإذا كان $\frac{| أ س |}{| أ ب |} = \frac{| أ ص |}{| أ جـ |}$

فأوجد | جـ ص | .

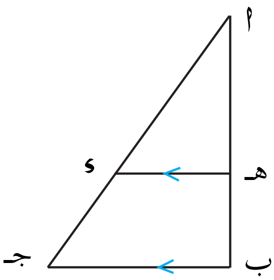


شكل (٦ − ٦١)

[٤] في الشكل (٦ − ٦٢) :

| أ ب | = ١٣سم ، | أ جـ | = ١٦سم ، | ء جـ | = ٦سم . فإذا كان هـ ء // ب جـ

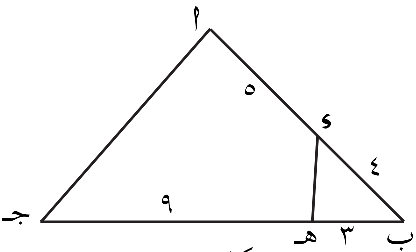
فأوجد كلاً من | هـ ب | ، | أ هـ | .



شكل (٦ − ٦٢)

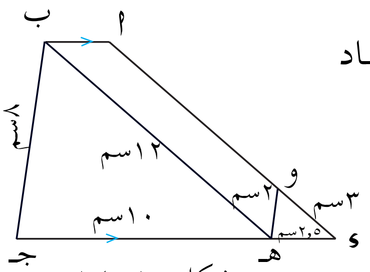
[٥] في المثلث أ ب جـ : ء ، هـ نقطتان على أ ب ، أ جـ على الترتيب حيث | أ ء | = $\frac{١}{٣}$ | أ ب | ، | جـ هـ | = $\frac{١}{٣}$ | أ جـ |. أنشئ من النقطة جـ مستقيم يوازي هـ ء ويقطع أ ب في و . أثبت أن « و » منتصف أ ب .

[٦] استعن بالشكل (٦ – ٦٣) :
والأبعاد المحدده عليه لإثبات أن
أولاً : Δ أ ب جـ ∼ Δ ب هـ ء
ثانياً : | أ جـ | = ٣ | هـ ء |



شكل (٦ – ٦٣)

[٧] في الشكل (٦ – ٦٤) : أ ب جـ ء شبه منحرف فيه أ ب // جـ ء . إستعن بالشكل والأبعاد المحددة عليه في إثبات أن :
الشكل أ ب هـ ء متوازي أضلاع .



شكل (٦ – ٦٤)

[٨] أرض زراعية مستطيلة الشكل رسمت لها خريطة بمقياس ١ : ٢٠٠ ٠٠٠ فإذا كان بعديها على الخريطة هما ١٠ سم ، ٨سم . فأوجد مساحتها بالكيلومتر المربع .

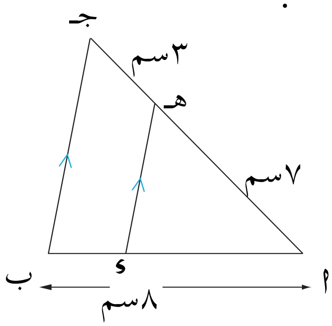
٦ : ١٠ اختبـــار الوحـــدة

[١] إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ع}}{\text{ل}}$ ، فأكمل ما يلي :

أ) ع × $\boxed{}$ = س × $\boxed{}$

ب) $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س} - \text{ص}} = \frac{\text{ع} + \boxed{}}{\text{ع} - \boxed{}}$

[٢] أوجد قيمة أ ، إذا كان $\frac{٢٠}{٢ + ٣\text{أ}} = \frac{٥}{٢}$.



شكل (٦ –٦٥)

[٣] فـــي الشكـل (٦ – ٦٥) :

$\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، |أ هـ| = ٧ سم ،

|هـ جـ| = ٣سم، |أ ب| = ٨ سم ،

أوجد كلاً من |أ ء| ، |ء ب| .

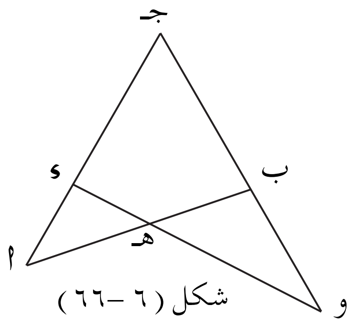
[٤] في المثلث أ ب جـ : |أ ب| = |أ جـ| ، والنقطتان ء ، هـ تقعان على $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ على الرتيب بحيث : $\overline{\text{ب ء}}$ ينصف ∡ ب ، $\overline{\text{جـ هـ}}$ ينصف ∡ جـ . برهن أن : $\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$.

[٥] في الشكل (٦ – ٦٦) : إذا كان

$\frac{|\text{أ ء}|}{|\text{أ ب}|} = \frac{|\text{أ هـ}|}{|\text{أ جـ}|}$ فبرهـن أن

(١) Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب جـ

(٢) ق (∡ ب هـ و) = ق (∡ جـ) .



شكل (٦ –٦٦)

الوحـــدة السابعـــة

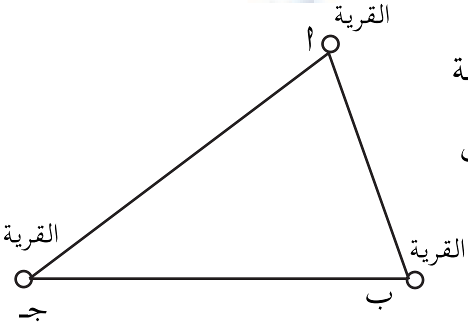
الهندســـة

٧ : ١ العلاقات بين أضلاع المثلث وزواياه

تأمل الشكل التالي : أ ، ب ،جـ تمثل ثلاث قـرى :

فاطمة تقيم في القريـة أ وإذا أرادت الذهاب إلى القرية جـ ، فإما أن تذهب مباشــرة ، أو أن تذهب عن طريق القرية ب .

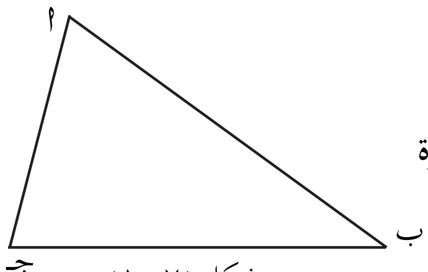
ستجد أن المسافة التي تقطعها فاطمة عن طريق القريــة ب هــي أطــول مـــن المسافة التي تقطعها بها مباشرة .



يمكننا أن نعتبر مواقع القرى الثلاث رؤوساً لمثلث ، وبذلك نحصل على علاقة تسمى المتباينة المثلثية ، وتنص هذه المتباينة على أن :

مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث

تدريــب (١)



شكل (٧ – ١)

في الشكل(٧ – ١) : استخدم المسطرة ثم أكمل ما يلي :

|أ ب| + |ب جـ| = . . .سم + . . .سم = . . .سم

ولكن | ا جـ | = ... سم ،

| ا ب | + | ا جـ | = ...سم + ...سم = ...سم

ولكن | ب جـ | = ... سم ،

| ب جـ | + | ا جـ | = ...سم + ...سم = ...سم

ولكن | ا ب | = ... سم

ماذا تلاحظ ؟

يمكننا بواسطة المتباينة المثلثية أن نحدد فيما إذا كانت ثلاث قطع مستقيمة تمثل أضلاع مثلث أم لا .

مثال (١)

هل تمثل الأطوال التالية أضلاع مثلث ؟

ا) ٥سم ، ٦ سم ، ٧سم ، ب) ٧سم ، ١٣سم ، ٥سم .

الحـــل :

ا) ∵ ٥ + ٧ > ٦ ، ٥ + ٦ > ٧ ، ٦ + ٧ > ٥ .

∴ هذه الأطوال تشكل أطوال أضلاع مثلث .

ب) ∵ ٧ + ٥ < ١٣ ،

∴ الأطوال ٧ سم ، ١٣سم ، ٥سم لاتمثل أطوال أضلاع مثلث .

تدريـــب (٢)

ارسم أي مثلث مختلف الأضلاع ، قس زواياه، قارن بين أضلاع المثلث ثم بين الزوايا المقابلة لها ، ماذا تستنتج ؟

الضلع الأكبر في المثلث تقابلة الزاوية الكبرى والضلع الأصغر تقابله الزاوية الصغرى والعكس صحيح .

تدريب (٣) في الشكل (٧–٢) : استخدم ادوات القياس لإكمال ما يلي :

أ ب جـ مثلث فيه :

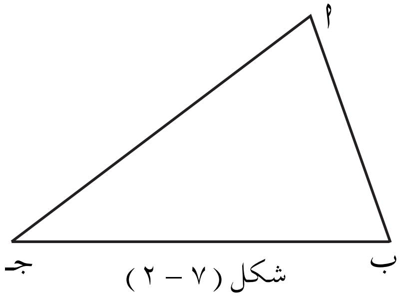
| أ ب | = . . . سم ،

| أ جـ | = . . . سم ،

ق (∢ أ ب جـ) = . . . °

ق (∢ أ جـ ب) = . . . °

قارن . . ماذا تلاحظ ؟



شكل (٧ – ٢)

إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فأكبرهما تقابله زاوية أكبر من التي تقابل الضلع الآخر .

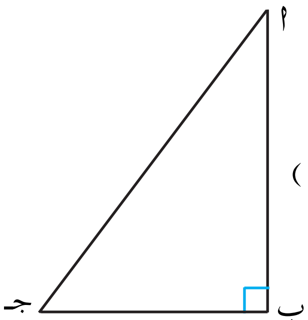
مثال (٢)

في الشكل (٧ – ٣) :

أ ب جـ مثلث فيه | أ ب | = ٤ سم ،

| أ جـ | = ٥سم ، | ب جـ | = ٣سم ،

قارن بين زوايا المثلث .



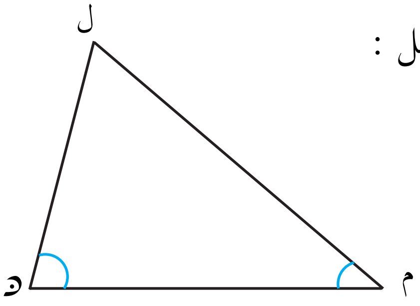
شكل (٧ – ٣)

الحــل :

$\because$ | ا جـ | > | ا ب | > | ب جـ |

$\therefore$ ق (∢ ا ب جـ) > ق (∢ ب جـ ا) > ق (∢ ب ا جـ)

تدريــب (٤)



شكل (٧ – ٤)

في الشكل (٧ – ٤) ، قس ثم اكمل :

ق (∢ ل م د) = ... ° ،

ق (∢ ل د م) = ... °

| ل م | = ... سم

| ل د | = ... سم

قارن ، ماذا تلاحظ ؟

إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث ، فأكبرهما يقابل ضلعاً أكبر من الضلع الذي تقابله الزاوية الأخرى .

تماريــن ومسائــل

[١] بيّن أياً من الثلاثيات التالية يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث؟ واذكر السبب :

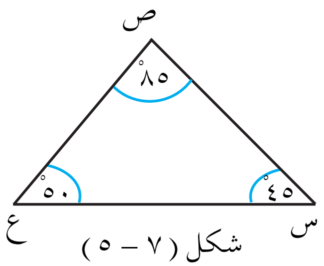
ا) ٥سم ، ٤سم ، ١٠سم ، ب) ٩سم ، ٩سم ، ٩سم ،

جـ) ٤,٧سم ، ٣,٤سم ، ٦سم ، د) ٢,٧سم ، ٢,٣سم ، ٥سم .

[٢] فـــي الشكل (٧ – ٥) :

Δ س ص ع مثلث ، رتب أطوال

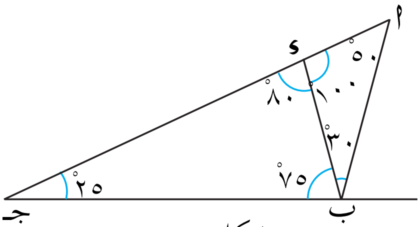
أضلاع المثلث تنازلياً .



شكل (٧ – ٥)

[٣] فـــي الشـكل (٧ – ٦) :

ا) رتب أطوال أضلاع Δ ا ب جـ تصاعدياً .



شكل (٧ – ٦)

ب)رتب أطوال أضلاع Δ ا ب ء تنازلياً .

جـ)رتب أطوال أضلاع Δ ء ب جـ تصاعدياً .

[٤] ا ب جـ مثلث فيه ق (∡ ا) > ق (∡ ب) > ق (∡ جـ) قارن بين أطوال أضلاعه .

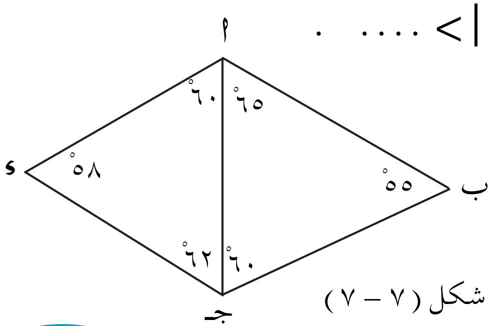
[٥] أكمل ما يلي :

ا) في المثلث ا ب جـ : إذا كان |ا ب| = ٧سم ، | ب جـ| = ٦سم فإن |ا جـ| > . . . ، |ا جـ| < . . . .

ب) في المثلث س ص ع : إذا كان|س ص| = ١٠ سم ،|ص ع| = ٦سم فإن |س ع| > . . . ، |س ع| < . . . . .

[٦] فـــي الشــكل (٧ – ٧) :

أي القطع الخمس أقصر طولا ؟

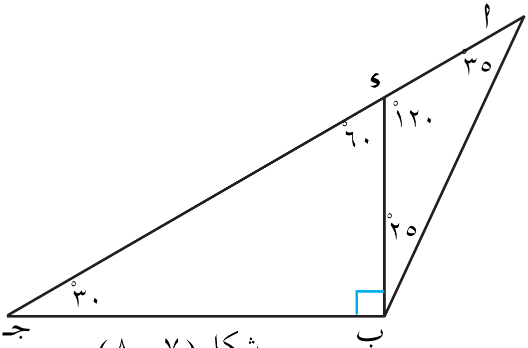


شكل (٧ – ٧)

[٧] في الشكل (٧ – ٨):

رتِّب أطوال القطع الآتية تصاعدياً ، مع ذكر السبب؟

$\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$.



شكل (٧ – ٨)

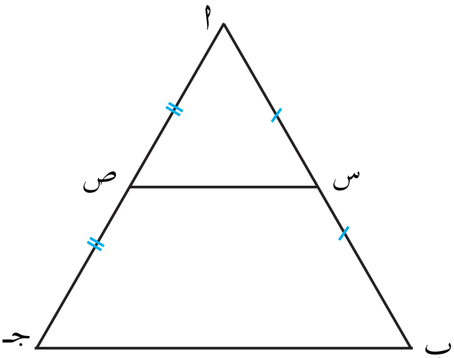
٧ : ٢ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث

مبرهنة (٧ – ١) :

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصف طوله.

المعطيات :

أ ب جـ مثلث، النقطتان س ، ص منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ على الترتيب [انظر الشكل (٧ – ٩)] ،



شكل (٧ – ٩)

المطلوب : إثبات أن :

أولاً : $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

ثانياً : $|\text{س ص}| = \frac{١}{٢} |\text{ب جـ}|$

البرهان :

في $\Delta\Delta$ أ س ص ، أ ب جـ

$$\frac{|\text{أ س}|}{|\text{أ ب}|} = \frac{|\text{أ ص}|}{|\text{أ جـ}|} = \frac{١}{٢}$$

الزاوية أ مشتركة

∴ المثلثان متشابهان ومن ذلك نستنتج أنّ :

ق (∢ أ ب جـ) = ق (∢ أ س ص) ،

بما أنهما متناظرتان بالنسبة للمستقيمين س ص ، ب جـ ، والقاطع أ ب،

∴ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ وهو المطلوب أولاً

ومن التشابه نستنتج ايضاً أنّ :

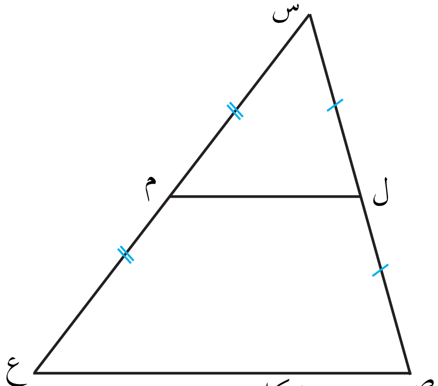
$$\frac{|\text{س ص}|}{|\text{ب جـ}|} = \frac{|\text{أ س}|}{|\text{أ ب}|} = \frac{١}{٢}$$

∴ $|\text{س ص}| = \frac{١}{٢}|\text{ب جـ}|$ وهو المطلوب ثانياً .

مثال (١) في الشكل (٧–١٠):

ل منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، م منتصف $\overline{\text{س ع}}$ فإذا كان $|\text{ص ع}| = ١٠$ سم ،

فأوجد $|\text{ل م}|$.



شكل (٧ – ١٠)

الحل :

∵ $\overline{\text{ل م}}$ واصل بين منتصفي الضلعين س ص ، س ع في المثلث س ص ع،

∴ $\overline{\text{ل م}} \parallel \overline{\text{ص ع}}$ ويساوي نصفه (مبرهنة)

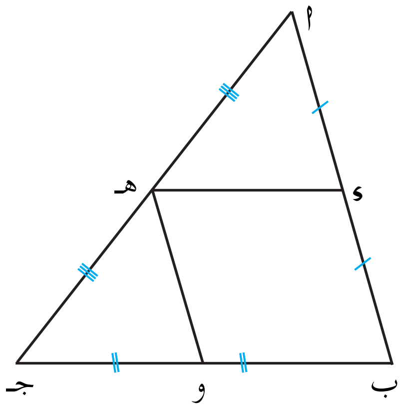
∴ $|\text{ل م}| = \frac{١}{٢}|\text{ص ع}| = \frac{١}{٢} \times ١٠ = ٥$ سم

مثال (٢)

فـــي الشكل (٧ – ١١) :

ﺍ ب جـ مثلث ، ء ، هـ ، و منتصفات الأضلاع $\overline{\text{ﺍ ب}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{جـ ﺍ}}$ على الترتيب

أثبت أن الشكل ء هـ و ب متوازي أضلاع .



شكل (٧ – ١١)

الحـــل :

∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ واصل بين منتصفي الضلعين ﺍ ب ، ﺍ جـ في المثلث ﺍ ب جـ ،

∴ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (مبرهنة) ،

∴ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب و}}$ ——— (١) ،

∵ $\overline{\text{هـ و}}$ واصل بين منتصفي الضلعين ﺍ جـ ، ب جـ في المثلث ﺍ ب جـ.

∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ﺍ ب}}$

∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$ ——— (٢)

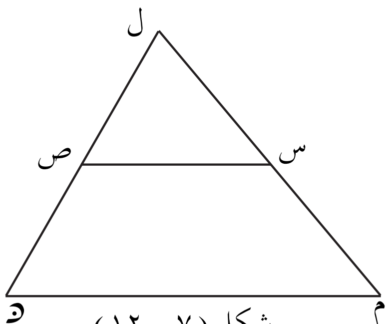
من (١) ، (٢) نجد أن :

الشكل ء هـ و ب متوازي أضلاع .

نتيجـــة :

إذا رسم مستقيم من منتصف أحد أضلاع مثلث موازياً ضلعاً آخر فيه فإنه ينصف الضلع الثالث .

تمارين ومسائل



شكل (٧ – ١٢)

[١] في الشكل (٧ – ١٢):

س منتصف $\overline{\text{ل م}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ل د}}$ ،

أولاً: إذا كان |م د| = ١٦ سم ، فأوجد |س ص| ،

ثانياً: إذا كان |س ص| = ٦ سم، فأوجد |م د| ،

ثالثاً: إذا كان ق(∡ ل م د) = ٧٥° ، فأوجد ق(∡ ل س ص) .

[٢] س ص ع مثلث فيه ء ، هـ ، و منتصفات الأضلاع س ص، س ع، ص ع على الترتيب، فإذا كان |ء هـ| = ٤ سم ، |هـ و| = ٣ سم ، |ء و| = ٥ سم، احسب اطوال أضلاع المثلث س ص ع .

[٣] أ ب جـ مثلث، ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، و نقطة على $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، أثبت أن :

أولاً : ء ب و هـ متوازي أضلاع .

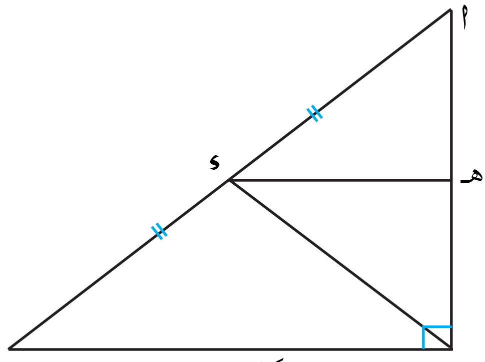
ثانياً : و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

[٤] أ ب جـ مثلث فيه النقاط م ، د ، و منتصفات الأضلاع على الترتيب أثبت أن مساحة المثلث م د و = $\frac{١}{٤}$ مساحة المثلث أ ب جـ .

[٥] أ ب جـ ء شبه منحرف، فيه $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، نصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ في س ، ص على الترتيب، برهن على أن امتداد س ص ينصف $\overline{\text{ء جـ}}$.

مبرهنة (٧ – ٢) :

في المثلث القائم طول القطعة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر يساوي نصف طول الوتر .



شكل (٧ – ١٣)

المعطيات :

ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب،

النقطة ء منتصف الوتر ا جـ ، هـ

[انظر الشكل (٧ – ١٣)] ،

المطلوب : إثبات أن :

|ب ء| = $\frac{١}{٢}$ |ا جـ|

العمل: نرسم من ء قطعة مستقيمة توازي جـ ب وتقطع ا ب في هـ ،

البرهان :

|ا ء| = |ء جـ| (معطى)

هـ ء // ب جـ (عملاً)

∴ ء هـ ⊥ ا ب وينصفه

ΔΔ ا هـ ء ، ب هـ ء ، فيهما :

|ا هـ| = |ب هـ| (نتيجة) .

هـ ء ضلع مشترك

ق (∡ ا هـ ء) = ق (∡ ب هـ ء)

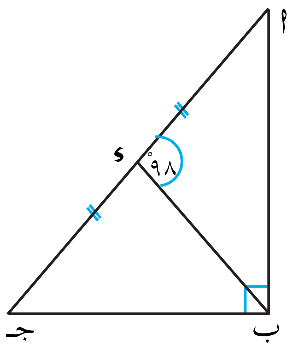
$\therefore$ Δ أ هـ ء $\cong$ Δ ب هـ ء (ض ز ض) ، وينتج من تطابقهما أن :

$|$ أ ء $|$ = $|$ ب ء $|$

لكن $|$ أ ء $|$ = $\frac{1}{2}$ $|$ أ جـ $|$ (معطى)

$\therefore$ $|$ ب ء $|$ = $\frac{1}{2}$ $|$ أ جـ $|$ وهو المطلوب .

مثـــال



شكل (٧ – ١٤)

فـــي الشكل (٧ – ١٤) :

$\measuredangle$ أ ب جـ قائمة، $|$ أ ء $|$ = $|$ ء جـ $|$ ،

ق ($\measuredangle$ أ ء ب) = ٩٨° ،

أوجد ق ($\measuredangle$ ب أ ء) .

الحـــل :

$\overline{\text{ب ء}}$ واصلة من رأس المثلث القائم الزاوية إلى منتصف الوتر (معطى) .

$\therefore$ $|$ ب ء $|$ = $\frac{1}{2}$ $|$ أ جـ $|$ (مبرهنة)

ولكن $|$ أ ء $|$ = $\frac{1}{2}$ $|$ أ جـ $|$ (معطى)

$\therefore$ $|$ أ ء $|$ = $|$ ب ء $|$

$\therefore$ Δ أ ب ء متساوي الساقين .

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ ب أ ء) = ق ($\measuredangle$ أ ب ء) .

ق ($\measuredangle$ أ ء ب) = ٩٨° (معطى)

∴ ق (∠ ب أ ء) + ق (∠ أ ب ء) = ١٨٠° − ٩٨° = ٨٢° ،

∴ ق (∠ ب أ ء) = $\frac{٨٢°}{٢}$ = ٤١° .

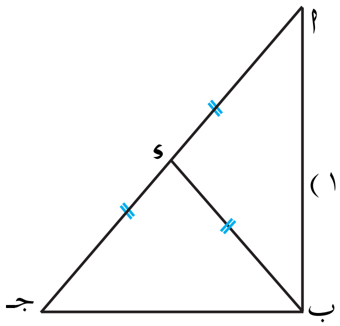
تمارين ومسائل

[١] في الشكل (٧ − ١٥) :

أ ب جـ مثلث ، ء منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

، | ب ء | = $\frac{١}{٢}$ | أ جـ |

أثبت أن : ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠° .



شكل (٧ − ١٥)

[٢] ص ل هـ مثلث قائم الزاوية في ل ، ق (∠ ل ص هـ) = ٣٥° ، ء منتصف $\overline{\text{ص هـ}}$ ، احسب ق (∠ ص ء ل) ، ق (∠ ء ل هـ) .

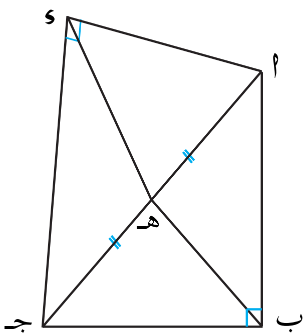
[٣] في الشكل (٧ − ١٦) :

ق (∠ ب) = ق (∠ ء) = ٩٠° ،

هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ،

أثبت أن :

| ب هـ | = | هـ ء | .



شكل (٧ − ١٦)

[٤] أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ء منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، ق (∠ أ ء ب) = ٨٠° ،

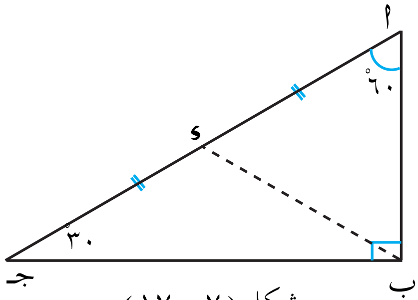
احسب : ق (∠ أ) ، ق (∠ ء ب جـ) .

٧ : ٤ الضلع المقابل للزاوية ٣٠° في المثلث القائم

مبرهنة (٧ – ٣) :

في المثلث القائم ، طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوي نصف طول الوتر .

المعطيات :



شكل (٧ – ١٧)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ،

فيه ق (∡ أ) = ٦٠° ، ق (∡ جـ) = ٣٠° ،

[انظر الشكل (٧ – ١٧)] .

المطلوب : إثبات أن :

| أ ب | = $\frac{١}{٢}$ | أ جـ |

العمل : ننصف $\overline{\text{أ جـ}}$ في ء ، ونرسم $\overline{\text{ب ء}}$ ،

البرهان : $\overline{\text{ب ء}}$ واصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر . (عملاً)

∴ | ب ء | = $\frac{١}{٢}$ | أ جـ | (مبرهنة)

∴ | أ ء | = | ب ء |

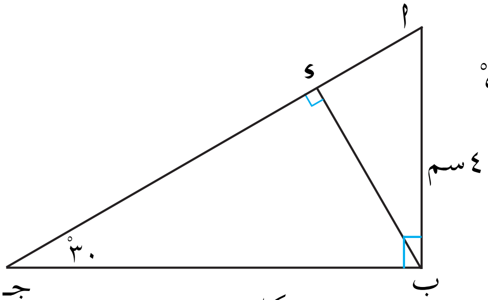
∴ ق (∡ أ ب ء) = ٦٠° (لأن مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°) .

∴ ق (∡ أ ء ب) = ٦٠°

∴ المثلث أ ب ء متساوي الأضلاع .

∴ | أ ب | = | ب ء | = | أ ء | = $\frac{١}{٢}$ | أ جـ | وهو المطلوب .

مثال



شكل (٧ – ١٨)

Δ أ ب جـ ، فيه ق (∡ ب) = ٩٠°

و ق (∡ جـ) = ٣٠° ،

ب ء ⊥ أ جـ ، |أ ب| = ٤سم .

أوجد |أ ء| ، |ء جـ| .

الحل : في Δ أ ب جـ

ق (∡ أ جـ ب) = ٣٠° ، ق (∡ أ ب جـ) = ٩٠°

∴ ق (∡ ب أ جـ) = ٦٠°

في Δ أ ب ء ، بما أن ب ء ⊥ أ جـ

ق (∡ ب أ ء) = ٦٠° ، ق (∡ أ ء ب) = ٩٠°

∴ ق (∡ أ ب ء) = ٣٠°

∴ أ ء يقابل الزاوية ٣٠° في Δ أ ب ء القائم الزاوية في ء ،

∴ |أ ء| = ١/٢ |أ ب| = ١/٢ × ٤ = ٢سم

في Δ أ ب جـ القائم الزاوية في ب ،

أ ب يقابل الزاوية ٣٠°

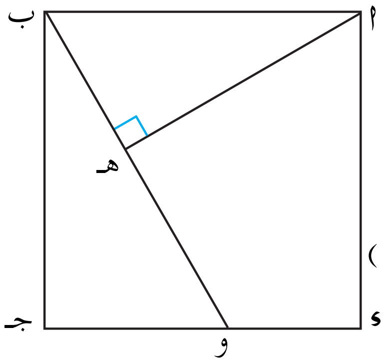
∴ |أ ب| = ١/٢ |أ جـ| ،

∴ |أ جـ| = ٢|أ ب| = ٢ × ٤ = ٨سم .

∴ |ء جـ| = |أ جـ| – |أ ء| = ٨ – ٢ = ٦ سم   وهو المطلوب .

تمارين ومسائل

[١] ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ق (∢ جـ) = ٦٠° . $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{ا جـ}}$ ،
أثبت أن : محيط المثلث ا ب جـ = ضعف محيط المثلث ء ب جـ .



شكل (٧ – ١٩)

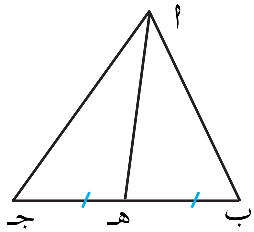
[٢] فـــي الشكل (٧ – ١٩) :
ا ب جـ ء مربع ، $\overline{\text{ا هـ}} \perp \overline{\text{ب و}}$ ،
ق (∢ و ب جـ) = ٣٠° ،
|ب هـ| = ٦ سم ،
احسب محيط المربع .

[٣] ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ق (∢ ا جـ ب) = ٣٠° ، ء منتصف $\overline{\text{ا جـ}}$. أثبت أن : المثلث ا ب ء متساوي أضلاع .

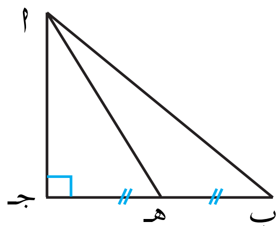
[٤] س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، $\overline{\text{ع ل}}$ تنصف ∢ س ع ص وتلاقي $\overline{\text{س ص}}$ في ل ، ق (∢ ص س ع) = ٣٠° ، أثبت أن :
أولاً : |س ل| = |ع ل|　　　ثانياً : |ص ل| = $\frac{١}{٢}$ |س ل| .

٧ : ٥ متوسطات المثلث

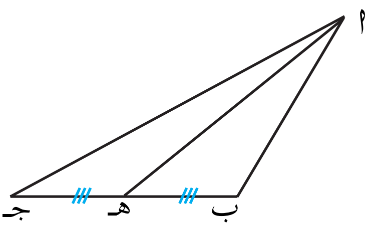
تأمل الأشكال (٧ – ٢٠ ا ، ب ، جـ) :



شكل (٧ – ٢٠ ا)



شكل (٧ – ٢٠ ب)



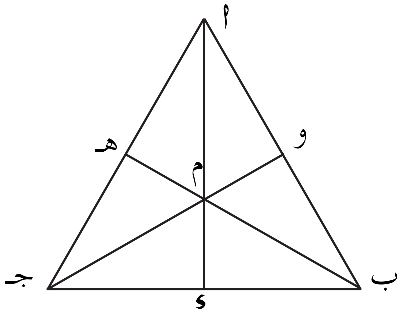
شكل (٧ – ٢٠ جـ)

لدينا ثلاثة مثلثات الأول حاد الزوايا ، والثاني قائم الزاوية ، والثالث منفرج الزاوية ، القطعة المستقيمة أ هـ في كل منها تصل الرأس أ بمنتصف الضلع المقابل (ب جـ) ، تسمى القطعة أ هـ المتوسط .

تعريف :

متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة التي تصل رأس المثلث بمنتصف الضلع المقابل لذلك الرأس .

نشـــاط



شكل (٧ – ٢١)

في الشكل (٧ – ٢١) : رسمت المتوسطات الثلاثة للمثلث أ ب جـ ،

– سمِّ هذه المتوسطات : .... ، .... ، ...

– ماذا تلاحظ على النقطة م ؟

– قس كلاً مما يلي ثم قارن :

(١) | أ م | ، | م ء | ، (٢) | ب م | ، | م هـ | ،

(٣) | جـ م | ، | م و | .

– أوجد : | أ م | : | م ء | = ... : ....

| ب م | : | م هـ | = ... : ....

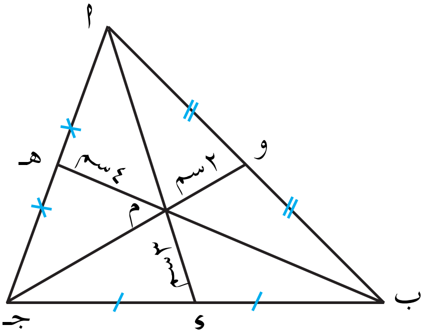
| جـ م | : | م و | = ... : ....

قارن النسب الثلاث .

$$\therefore \frac{|أم|}{|مء|} = \frac{|بم|}{|مهـ|} = \frac{|جـم|}{|مو|} = \frac{٢}{١}$$

القطع المتوسطة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة ، تقسم كلا منها من جهة رؤوس المثلث بنسبة ٢ : ١ .

مثال (١) في الشكل (٧ – ٢٢):



شكل (٧ – ٢٢)

$\overline{\text{ا ء}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{جـ و}}$ متوسطات المثلث ا ب جـ ،م نقطة تقاطع هذه المتوسطات، |م ء| = ٣ سم ، |م هـ|=٤سم ، |م و| = ٢سم ، احسب |ام| ، |ب م| ، |جـ م| .

الحــل :

$$\frac{|\text{ا م}|}{|\text{م ء}|} = \frac{٢}{١}$$

∴ |ام| = ٢ × |م ء| = ٢ × ٣ سم = ٦سم

$$\frac{|\text{ب م}|}{|\text{م هـ}|} = \frac{٢}{١}$$

∴ |ب م| = ٢ × |م هـ| = ٢ × ٤ سم = ٨سم

$$\frac{|\text{جـ م}|}{|\text{م و}|} = \frac{٢}{١}$$

∴ |جـ م| = ٢ × |م و| = ٢ × ٢ سم = ٤سم

مثال (٢)

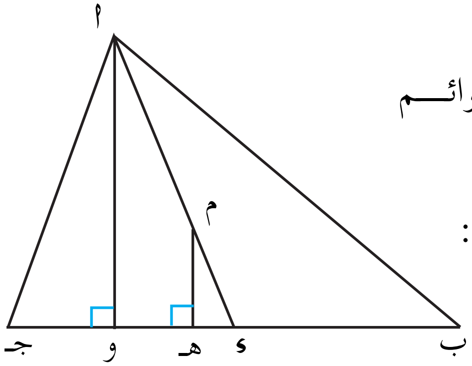
ا ب جـ مثلث فيه ا ء قطعة متوسطة ، والنقطة م نقطة تقاطع المتوسطات،

إذا كانا م هـ ، ا و عمودين على ب جـ ، أثبت أن : $|\text{م هـ}| = \frac{١}{٣} |\text{ا و}|$.

المعطيات : ا ء متوسطة ، م نقطة تلاقي القطع المتوسطة في Δ ا ب جـ

م هـ ⊥ ب جـ ، ا و ⊥ ب جـ . انظر الشكل (٧ – ٢٣) .

المطلوب : إثبات أن : $|\text{م هـ}| = \frac{١}{٣} |\text{ا و}|$ ،



شكل (٧ – ٢٣)

البرهان : $\Delta\Delta$ هـ م ء ، و ا ء فيهما :

ق (∡ م هـ ء) = ق (∡ ا و ء) قوائم

∡ ء مشترك .

∴ المثلثان متشابهان ونستنتج أن :

$$\frac{|\text{م هـ}|}{|\text{ا و}|} = \frac{|\text{م ء}|}{|\text{ا ء}|}$$

لكن $\frac{|\text{م ء}|}{|\text{ا ء}|} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{|\text{م هـ}|}{|\text{ا و}|} = \frac{١}{٣}$

أي أن $|\text{م هـ}| = \frac{١}{٣} |\text{ا و}|$ وهو المطلوب .

تمارين ومسائل

[١] ارسم المثلث ا ب جـ الذي فيه $|\text{ا ب}|$ = ٥سم ، $|\text{ب جـ}|$ = ٦سم ، $|\text{ا جـ}|$ = ١٠ سم ، ثم ارسم القطع المتوسطة ا ء ، ب هـ ، جـ و .

م نقطة تقاطع المتوسطات، استخدم القياس للتأكد من صحة :

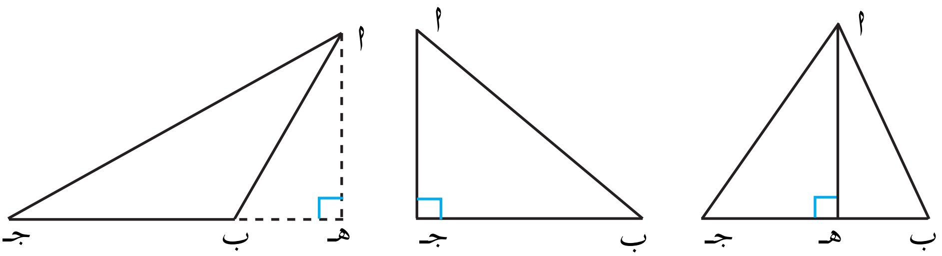
$$\frac{|\text{م ء}|}{|\text{أ م}|} = \frac{|\text{م هـ}|}{|\text{ب م}|} = \frac{|\text{م و}|}{|\text{جـ م}|} = \frac{١}{٢} \ .$$

[٢] س نقطة تقاطع $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{جـ و}}$ متوسطات للمثلث أ ب جـ ، |أ ء| = ٩سم، |ب س| = ١٢ سم .أوجد : | ء س |، |أ س | ، | ب هـ| .

[٣] أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٩سم ، م ملتقى مستقيماته المتوسطة ، احسب طول كل من $\overline{\text{أ م}}$ ، $\overline{\text{ب م}}$ ، $\overline{\text{جـ م}}$.

٧ : ٦ ارتفاعات المثلث

تأمل الأشكال (٧ – ٢٤ أ ، ب ، جـ) :



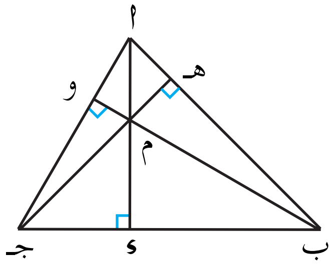
شكل (٧ – ٢٤ أ) شكل (٧ – ٢٤ ب) شكل (٧ – ٢٤ جـ)

لدينا ثلاثة مثلثات الأول حاد الزوايا ، والثاني قائم الزاوية ، والثالث منفرج الزاوية ، القطع المستقيمة أ هـ ، أ جـ تنزل من أ عمودية على الضلع المقابل (ب جـ) أو امتداده ، تسمى مثل القطع أ هـ ، أ جـ إرتفاعات المثلث .

تعريف :

ارتفاع المثلث هو قطعة مستقيمة تنزل من رأس المثلث عمودية على الضلع المقابل « أو امتداده » .

نشـــاط

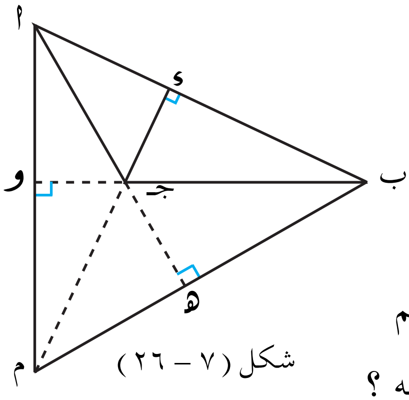


شكل (٧ –٢٥)

(١)في الشكل(٧–٢٥)رسمت الارتفاعات الثلاثة للمثلث أ ب جـ الحاد الزوايا ،

– سمِّ هــذه الارتفاعات : ....، .... ، ...

– ماذا تلاحظ على النقطة م ؟



شكل (٧ – ٢٦)

(٢)في الشكل(٧–٢٦)رسمت الارتفاعات الثلاثة للمثلث أ ب جـ المنفرج الزاوية .

– سمِّ هــذه الارتفاعات : ....، .... ، ...

– ماذا تلاحظ عن النقطة م ؟

(٣) ارســم مثلثا قائــم الزاويــة ، ثــم ارسـم ارتفاعاته ، اين تقع نقطة تقاطع ارتفاعاته ؟

مبرهنة (٧ – ٤) :

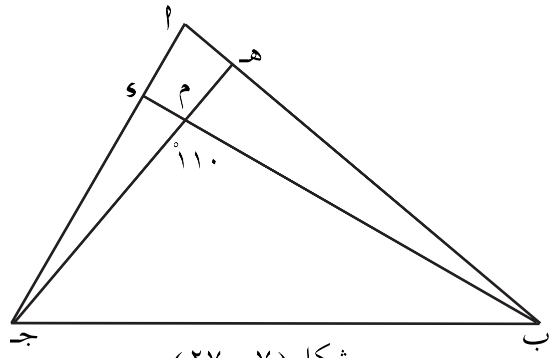
الارتفاعات النازلة من رؤوس المثلث على أضلاعه أو امتداداتها تتقاطع في نقطة واحدة .

مثـــال

أ ب جـ مثلث فيه م نقطة تقاطع الارتفاعات ، وىه (∡ ب م جـ) = ١١٠°

أوجد قياس ∡ ب أ جـ .

الحـــل :



شكل (٧ – ٢٧)

في الشكل (٧ – ٢٧) :

جـ هـ ⊥ أ ب

∴ ق (∡ أ هـ م) = ٩٠°

، ∵ ب ء ⊥ أ جـ

∴ ق (∡ أ ء م) = ٩٠°

، ق (∡ هـ م ء) = ق (∡ ب م جـ) (بالتقابل بالرأس) ،

∴ ق (∡ هـ م ء) = ١١٠°

مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي شكل رباعي = ٣٦٠°

ق (∡ هـ أ ء) + ق (∡ أ هـ م) + ق (∡ هـ م ء) + ق (∡ م ء أ) = ٣٦٠°

∴ ق (∡ هـ أ ء) + ٩٠° + ١١٠° + ٩٠° = ٣٦٠°

∴ ق (∡ هـ أ ء) = ٣٦٠° – ٢٩٠° = ٧٠°

∴ ق (∡ ب أ جـ) = ٧٠° .

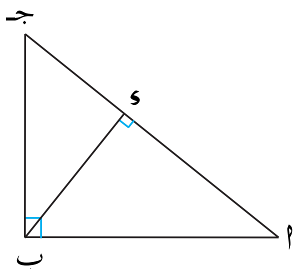
تماريـن ومسائـل

[١] فـــي الشـــكل (٧ – ٢٨) :

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب،

ب ء ⊥ أ جـ .

حدّد نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث .

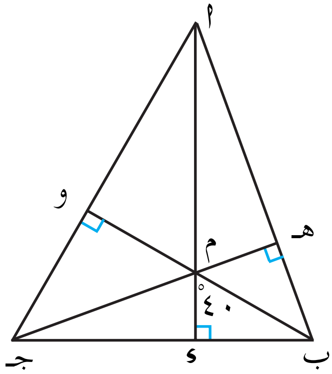


شكل (٧ – ٢٨)

[٢] ا ء ارتفاع للمثلث ا ب جـ وينصف ∢ ا ، برهن أن Δ ا ب جـ متساوي الساقين .

[٣] ارسم مثلث منفرج الزاوية، ثم ارسم ارتفاعاته الثلاثة، سمِّ نقطة تقاطعها .

[٤] ارسم المثلث س ص ك فيه : | س ص | = ٥سم ، |ص ك | = ٤سم ، ق (∢ س) = ١٢٥° ، ثم ارسم ارتفاعاته الثلاثة ، سمِّ نقطة تقاطع الارتفاعات .



شكل (٧ – ٢٩)

[٥] في الشكل (٧ – ٢٩) :

ا ب جـ مثلث ، $\overline{\text{ا ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ،

$\overline{\text{جـ هـ}} \perp \overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا ء}} \cap \overline{\text{جـ هـ}} = \{\text{م}\}$

ق (∢ ب م ء) = ٤٠° ،

أوجد ق (∢ ء ا جـ) .

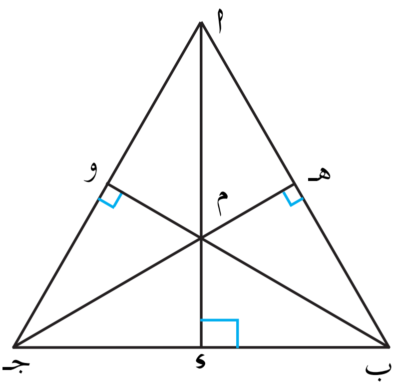
[٦] في الشكل (٧ – ٣٠) :

ا ب جـ مثلث متساوي الأضلاع ،

$\overline{\text{ا ء}}$ ، $\overline{\text{ب و}}$، $\overline{\text{جـ هـ}}$ ارتفاعاته ،

ا – هل $\overline{\text{ا ء}}$ ، $\overline{\text{ب و}}$، $\overline{\text{جـ هـ}}$ تلتقي في نقطة واحدة ؟ ولماذا ؟

ب – ما ابعاد النقطة م كنقطة تلاقي الإرتفاعات عن رؤوس المثلث ، وعن أضلاعه ؟



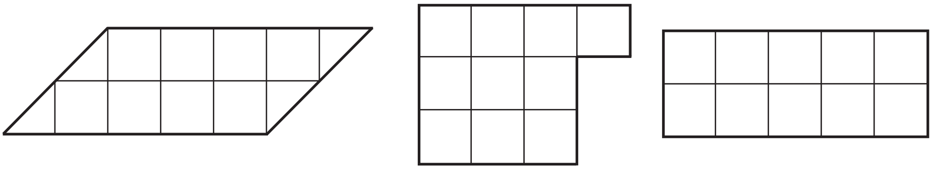
شكل (٧ – ٣٠)

٧ : ٧ تكافـــؤ المثلثـــات

التكافـــؤ

نشـــاط (١)

تأمل الأشكال (٧ – ٣١ أ ، ب ، جـ) ادناه :



شكل (٧ – ٣١أ)　　　شكل (٧ – ٣١ ب)　　　شكل (٧ – ٣١جـ)

– احسب مساحة الأشكال باستخدام المربع كوحدة للقياس .

– قارن مساحة هذه الأشكال ، ماذا تلاحظ ؟

– تلاحـظ أن الأشكال تحوي العـدد نفسه من الوحدات المربعة . أي أن هذه الأشكال متساوية في المساحة .

في هذه الحالة نقول أن الأشكال متكافئة .

تعريف :

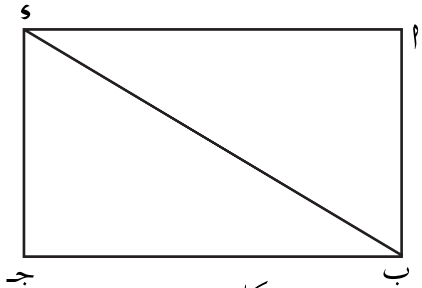
يكون الشكلان $م_١$ ، $م_٢$ متكافئين إذا كانا متساويين في المساحة ، ونكتب ذلك رمزياً : الشكل $م_١ \equiv$ الشكل $م_٢$.

تكافؤ المثلثات :

عرفت بأن الشكلين المتساويان في المساحة يكونان متكافئين ، والآن تتعرف على بعض الخصائص المتعلقة بتكافؤ المثلثات .

بديهية **كل مثلثين متطابقين متكافئان**

مثال (١)



شكل (٧ – ٣٢)

فـي الشكل (٧ – ٣٢) أ ب جـ ء مستطيل ، بيّن أن Δ Δ ب أ ء ، ء جـ ب متكافئان .

[redacted]

مساحة Δ ب أ ء = $\frac{1}{2}$ | أ ء | × | أ ب |

مساحة Δ ء جـ ب = $\frac{1}{2}$ | جـ ب | × | ء جـ |

∵ أ ب جـ ء مستطيل

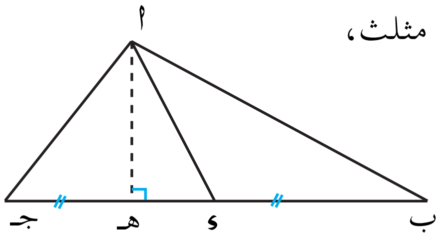
∴ | أ ء | = | ب جـ | ، | أ ب | = | ء جـ |

∴ Δ ب أ ء ≡ Δ ء جـ ب .

مثال (٢)

في الشكل (٧ – ٣٣) أ ب جـ مثلث، ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، | ب جـ | = ٨سم، $\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، | أ هـ | = ٣سم ،

بين أن المثلثين أ ب ء ، أ ءجـ متكافئان .



شكل (٧ – ٣٣)

الحــل :

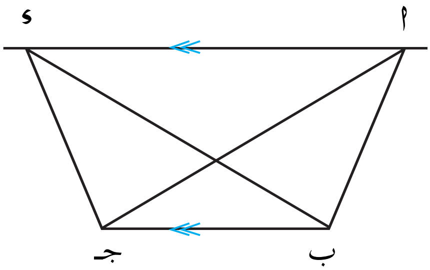
مساحة المثلث ا ب ى $= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ سم^2 .

مساحة المثلث ا ى جـ $= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ سم^2 .

$\therefore \Delta$ ا ب ى $\equiv \Delta$ ا ى جـ وهو المطلوب .

المثلثات المتحدة في القاعدة :

نشــاط



شكل (٧ – ٣٤)

– ارسـم مثلثين ا ب جـ ، ى ب جـ متحدين في القاعـدة ويقع رأساهمــا على مستقيم يوازي القاعدة كما في الشكل (٧ – ٣٤) .

– قارن مساحة Δ ا ب جـ بمساحة Δ ى ب جـ ، ماذا تلاحظ ؟

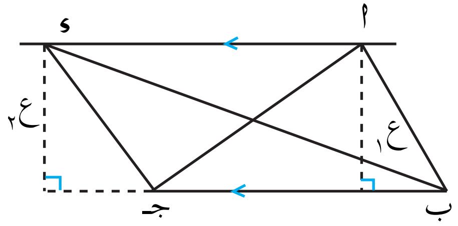
– قارن ملاحظاتك مع ملاحظات زملائك في الفصل .

مبرهنة (٧ – ٥) :

إذا اتحد مثلثان في القاعدة وكان رأساهما على مستقيم يوازي القاعدة فإن المثلثين متكافئان .

المعطيات : ا ب جـ ، ى ب جـ مثلثان متحـــدان فـــي القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

$\overline{\text{ا ى}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ [انظر الشكل (٧ – ٣٥)] .



شكل (٧ – ٣٥)

المطلوب : إِثبات أن

Δ أ ب جـ $\equiv$ Δ ء ب جـ

العمل : نرسم ارتفاع المثلث أ ب جـ وليكن $ع_1$ ، وارتفاع المثلث ء ب جـ وليكن $ع_2$ ،

البرهان :

مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ | ب جـ | × $ع_1$

مساحة Δ ء ب جـ = $\frac{1}{2}$ | ب جـ | × $ع_2$

ولكن $ع_1$ = $ع_2$ لأنهما يقعان بين مستقيمين متوازيين ($\overleftrightarrow{ب جـ} \parallel \overleftrightarrow{أ ء}$)

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ | ب جـ | × $ع_1$ = $\frac{1}{2}$ | ب جـ | × $ع_2$ ،

$\therefore$ مساحة المثلث أ ب جـ = مساحة المثلث ء ب جـ

أي أن Δ أ ب جـ $\equiv$ Δ ء ب جـ وهو المطلوب .

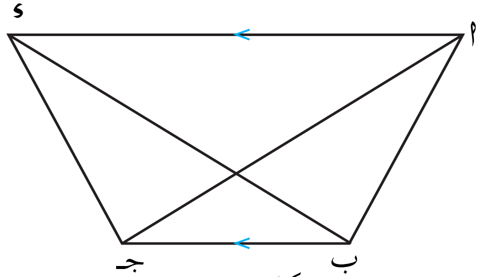
نتيجة (١) :

المثلثات التي قواعدها متساوية وارتفاعاتها متساوية متكافئة

مثال (٣)

في الشكل (٧ – ٣٦) أ ب جـ ء شبه منحرف ، فيه $\overline{أ ء} \parallel \overline{ب جـ}$ ،

بيّن أن Δ أ ب جـ يكافئ Δ ء ب جـ .



شكل (٧ – ٣٦)

الحـــل :

$\Delta\Delta$ ا ب جـ ، ى ب جـ فيهما :

$\overline{\text{ب جـ}}$ قاعدة مشتركة ، ا ، ى يقعان على $\overline{\text{ا ى}}$ ،

$\overline{\text{ا ى}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

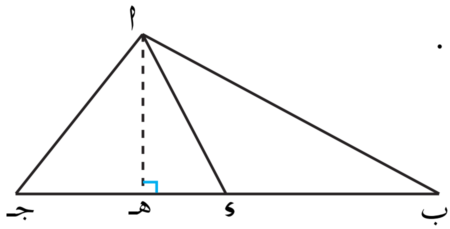
$\therefore$ Δ ا ب جـ $\equiv$ Δ ى ب جـ (مبرهنة) وهو المطلوب .

مبرهنة (٧ – ٦) :

متوسط المثلث يقسمه إِلى مثلثين متكافئين

المعطيات : ا ب جـ مثلث فيه $\overline{\text{ا ى}}$ متوسط ،

[انظر الشكل (٧ – ٣٧)] .



شكل (٧ – ٣٧)

المطلوب : إِثبات أن

Δ ا ب ى $\equiv$ Δ ا ى جـ .

العمل : ارسم ارتفاع المثلث ا ب جـ

وليكن $\overline{\text{ا هـ}}$.

البرهان :

مساحة المثلث ا ب ى = $\frac{١}{٢}$ | ب ى | × | ا هـ | ،

مساحة المثلث ا ى جـ = $\frac{١}{٢}$ | ى جـ | × | ا هـ | ،

ولكن | ب ى | = | ى جـ | ($\overline{\text{ا ى}}$ متوسط في المثلث ا ب جـ)

$\therefore$ مساحة Δ ا ب ى = مساحة Δ ا ى جـ

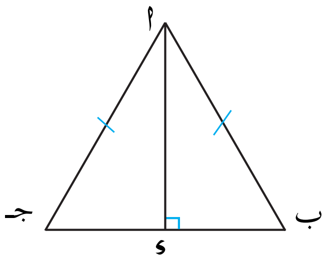
Δ ا ب ى $\equiv$ Δ ا ى جـ وهو المطلوب .

مثال (٤)

في الشـــكل (٧ – ٣٨) أ ب جـ مثلث متساوي الساقين ، فيه $\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{أ جـ}}$ ،

$\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ،

بيّن أن Δ أ ب ء $\equiv$ Δ أ جـ ء .



شكل (٧ – ٣٨)

الحــل :

$\because$ العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين إلى القاعدة هو متوسط ،

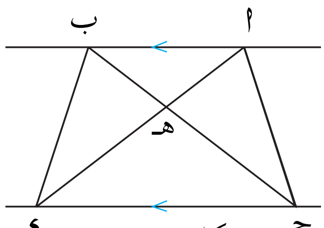
$\therefore$ Δ أ ب ء $\equiv$ Δ أ جـ ء (مبرهنة) .

تماريــن ومسائـل

[١] فـــي الشـــكل (٧ – ٣٩) :

$\overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{جـ ء}}$ ،

أوجـد ثلاثة أزواج من المثلثات المتكافئة .



شكل (٧ – ٣٩)

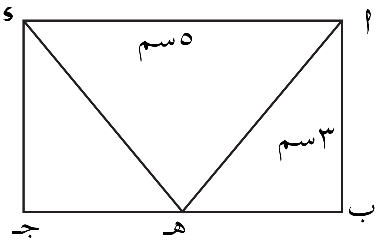
[٢] فـــي الشـكل (٧ – ٤٠) :

أ ب جـ ء مستطيل فيه | أ ب | = ٣سم ،

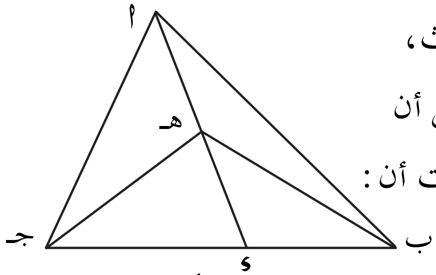
| ب جـ | = ٥ سم ،

أ – أوجد مساحة Δ أ هـ ء .

ب – إذا كان Δ أ ب هـ $\equiv$ Δ ء جـ هـ أوجد مساحة كل منهما .

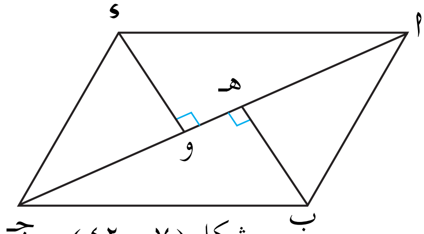


شكل (٧ – ٤٠)



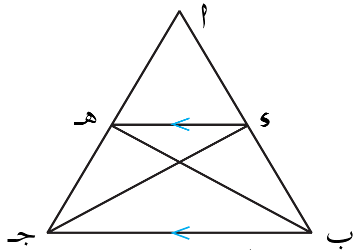
شكل (٧ – ٤١)

[٣] في الشكل (٧ – ٤١) أ ب جـ مثلث، $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط ، هـ نقطة على $\overline{\text{أ ء}}$. بيّن أن
Δ ب هـ ء ≡ Δ ء هـ جـ ،ومنها اثبت أن :
Δ أ ب هـ ≡ Δ أ جـ هـ .



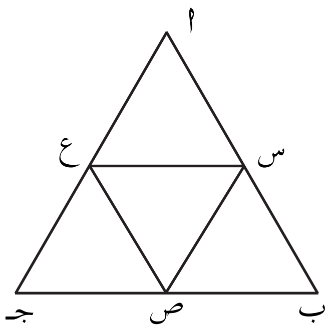
شكل (٧ – ٤٢)

[٤] في الشكل (٧ – ٤٢) : أ ب جـ ء متوازي اضلاع ، $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ء و}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$.
أثبت أن : |ب هـ| = |ء و| .



شكل (٧ – ٤٣)

[٥] في الشكل (٧ – ٤٣) :
أ ب جـ مثلث، $\overline{\text{ب جـ}} \parallel \overline{\text{ء هـ}}$ ،
أثبت أن Δ ء هـ ب ≡ Δ ء هـ جـ ، ومن ذلك
أثبت أن Δ أ ب هـ ≡ Δ أ جـ ء

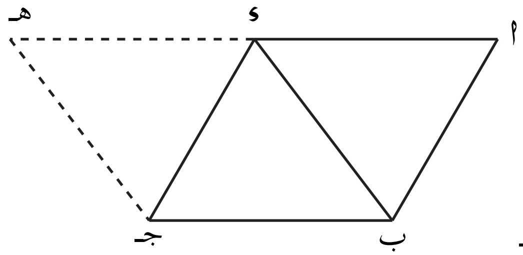


شكل (٧ – ٤٤)

[٦] في الشكل (٧ – ٤٤) :
أ ب جـ مثلث متساي الأضلاع ، النقاط س ، ص ، ع منصفات الأضلاع $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ على الترتيب . أثبت أن :
Δ أ ب جـ ≡ ٤ Δ س ص ع .

٧ : ٨ تكافؤ متوازي الأضلاع

نشاط



شكل (٧ – ٤٥أ)

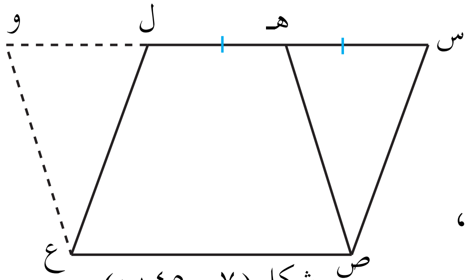
– ارسم متوازي اضلاع أ ب جـ ء .

– ارسم القطر ب ء .

– ارسم متوازي الأضلاع ء ب جـ هـ كما في الشكل (٧ – ٤٥أ) .

– قارن مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ ء بمساحة متوازي الأضلاع ء ب جـ هـ.

ماذا تلاحظ ؟



شكل (٧ – ٤٥ ب)

– ارسم متوازي اضلاع آخر س ص ع ل .

– ارسم النقطة هـ منتصف الضلع س ل

– ارسم متوازي الأضلاع هـ ص ع و ، كما في الشكل (٧ – ٤٥ ب) .

–قارن بين مساحتي متوازي الأضلاع س ص ع ل، ومتوازي الأضلاع هـ ص ع و

ماذا تلاحظ ؟ قارن ملاحظاتك مع ملاحظات زملائك ،

من ذلك نستنتج أن :

مبرهنة (٧ – ٧) :

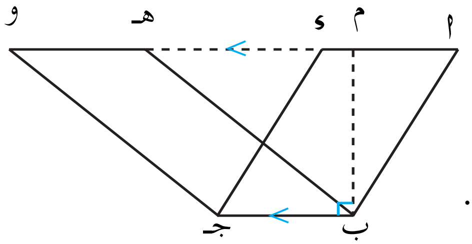
متوازيا الأضلاع المشتركان في القاعدة ورؤوسهما على مستقيم يوازي القاعدة متكافئان .

المعطيات : أ ب جـ ء ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع ، $\overline{\text{ب جـ}}$ قاعدتهما المشتركة،

$\overline{\text{أ و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب : إثبات أن :

▱ ا ب جـ ء ≡ ▱ هـ ب جـ و.



شكل (٧ – ٤٦)

العمل : نقيم من النقطة ب عموداً على $\overline{\text{ب جـ}}$ ليلاقي $\overline{\text{ا و}}$ في م .

البرهان : $\overline{\text{ا و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ متوازيا الأضلاع ا ب جـ ء ، هـ ب جـ و لهما الارتفاع نفسه $\overline{\text{ب م}}$

مساحة ▱ ا ب جـ ء = القاعدة × الارتفاع = | ب جـ | × | ب م |

وكذلك مساحة ▱ هـ ب جـ و = القاعدة × الارتفاع =| ب جـ | × | ب م |

∴ ▱ ا ب جـ ء ≡ ▱ هـ ب جـ و وهو المطلوب .

نتيجة (١) :

متوازيا الأضلاع المتساويان في القاعدة والإرتفاع متكافئان .

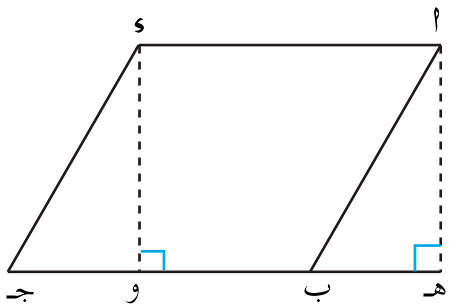
نتيجة (٢) :

المستطيل يكافئ متوازي الأضلاع المتحد معه في القاعدة والارتفاع .

مثال (١)

ا ب جـ ء متوازي أضلاع مساحته ٢٠ سم٢، انزل العمودين $\overline{\text{ا هـ}}$، $\overline{\text{ء و}}$ على الضلع ب جـ، أوجد مساحة المستطيل ا هـ و ء .

[انظر الشكل (٧–٤٧)] .



شكل (٧ – ٤٧)

الحل : ∵ $\overline{أ ء} \cong \overline{ب جـ}$ (خواص متوازي الأضلاع)

وكذلك $\overline{أ ء} \cong \overline{هـ و}$ (طولا المستطيل أ هـ و ء)

∴ $\overline{ب جـ} \cong \overline{هـ و}$

∴ ▱ أ ب جـ ء ، ▭ أ هـ و ء لهما : أ ء قاعدة مشتركة أ هـ ارتفاع مشترك

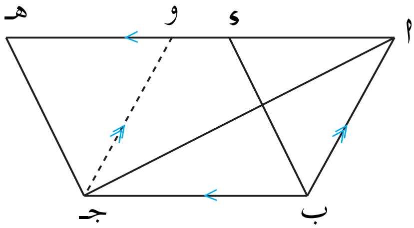
∴ ▱ أ ب جـ ء ≡ ▭ أ هـ و ء .

∴ مساحة ▭ أ هـ و ء = ٢٠ سم^{٢} وهو المطلوب .

مبرهنة (٧ – ٨) :

إذا اتحد مثلث ومتوازي أضلاع في القاعدة وكانا محصورين بين القاعدة ومستقيم يوازيها ، فإن المثلث يكافئ نصف متوازي الأضلاع .

المعطيات : Δ أ ب جـ ، ▱ ء ب جـ هـ متحدان في القاعدة ب جـ ، ومحصوران بين القطعتين أ هـ ، ب جـ [انظر الشكل(٧–٤٨)].



شكل (٧ – ٤٨)

المطلوب : إثبات أن :

Δ أ ب جـ ≡ $\frac{١}{٢}$ ▱ ء ب جـ هـ

العمل : من النقطة جـ نرسم $\overline{جـ و}$ يقطع $\overline{أ هـ}$ في النقطة و ويوازي $\overline{أ ب}$.

البرهان : ▱ أ ب جـ و ≡ ▱ ء ب جـ هـ (لماذا؟)

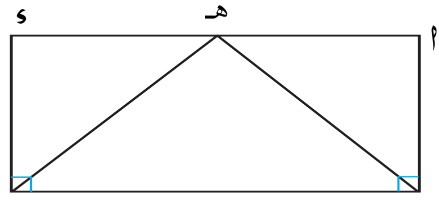
ولكن مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ مساحة ▱ أ ب جـ و ($\overline{أ جـ}$ قطر يقسم ▱ أ ب جـ و إلى مثلثين متطابقين)

∴ مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ مساحة ▱ ء ب جـ هـ

أي أن Δ أ ب جـ ≡ $\frac{١}{٢}$ ▱ ء ب جـ هـ وهو المطلوب .

نتيجة (١) :

إذا اتحد مثلث ومستطيل في القاعدة وكانا محصورين بين القاعدة ومستقيم يوازيها فإن المثلث يكافئ نصف المستطيل .



شكل (٧ – ٤٩)

مثال (٢) في الشكل (٧ – ٤٩):

مساحة المثلث هـ ب جـ = ١٠ سم٢

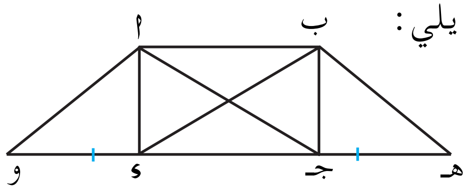
أوجد مساحة المستطيل أ ب جـ ء .

الحل : المثلث هـ ب جـ ، والمستطيل أ ب جـ ء متحدان في القاعدة والأرتفاع

∴ Δ هـ ب جـ ≡ $\frac{١}{٢}$ ▭ أ ب جـ ء

∴ مساحة ▭ أ ب جـ ء = ٢ X ١٠ = ٢٠ سم٢ .

تماريـن ومسائـل

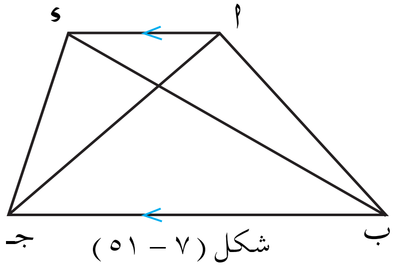


شكل (٧ – ٥٠)

[١]مستعينا بالشكل (٧–٥٠) اذكر ما يلي :

أ) متوازيات الأضلاع التي تكافئ المستطيل أ ب جـ ء .

ب) المثلثات التي تكافئ المثلث أ ب جـ .



شكل (٧ – ٥١)

[٢] في الشكل (٧ – ٥١) : أ ب جـ ء شبه منحرف .

أ)أوجد زوجين من المثلثات المتكافئة .

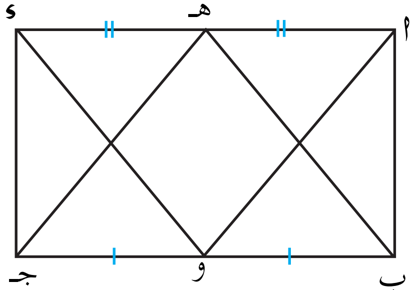
ب) هـل المثلثان ء أ ب ، ء ب جـ متكافئان ؟ علل ذلك .

[٣] في الشكل (٧ – ٥٢) : أ ب جـ ء مستطيل ، النقطة هـ منتصف أء ، النقطة و منتصف ب جـ ، أوجد الآتي مع ذكر السبب :

أ) مثلثا يكافئ المثلث هـ ب جـ .

ب) مثلثا يكافئ المثلث أ ب هـ .

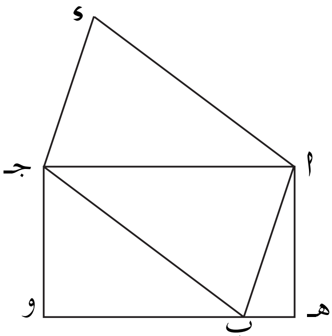
جـ) متوازي أضلاع متكافئين .



شكل (٧ – ٥٢)

[٤] في الشكل (٧ – ٥٣) : أ ب جـ ء متوازيي أضلاع ، أ هـ و جـ مستطيل بيّن أن :

▱ أ ب جـ ء ≡ ▭ أ هـ و جـ



شكل (٧ – ٥٣)

[٥] أثبت أن قطري المربع يقسمانه إلى أربعة مثلثات متكافئة .

٧ : ٩ تمارين ومسائل عامة

[١] بيّن أياً من ثلاثيات الأعداد الآتية يمكن أن تكون اطوال أضلاع مثلث مع ذكر السبب ؟

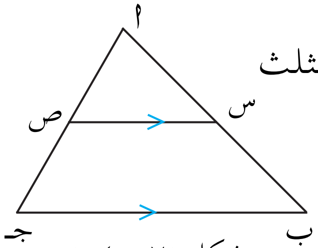
أ) ١٥سم ، ١٠سم ، ١٢سم . ب) ١٨سم ، ٨ سم ، ٩سم .

جـ) ٢٠سم ، ١٠سم ، ١٠سم . ء) ٦,٣سم ، ٨,٥سم ، ٧,٣سم .

هـ) ٢,١٥سم ، ٢,٠٤سم ، ٠,٠٧سم .

[٢] Δ أ ب جـ فيه أ ب = ١٢سم ، ب جـ = ١٥سم ، أ جـ = ١٠سم ، رتب قياسات زوايا المثلث تنازلياً .

[٣] اختـر الإجابـة الصحيحـة في كل مما يأتـي :



شكل (٧ – ٥٤)

أولاً : في الشكل (٧–٥٤) إذا كان محيط المثلث

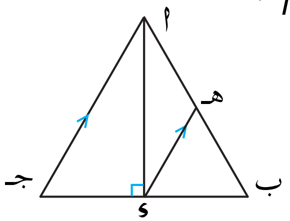
ا ب جـ = ٣٤ سم ، ص منتصف ا جـ ،

س ص // ب جـ ، | ا ب | = ١٢ سم ،

| ا ص | = ٤ سم ، فإن | س ص | =

(١) ٦ سم (٢) ٧ سم (٣) ٨ سم (٤) ١٥ سم .

ثانياً : في الشكل (٧ – ٥٥) : إذا كان المثلث ا ب جـ متطابق الضلعين ا ب، ا جـ ، ا ء ⊥ ب جـ ، هـ ء // ا جـ ،



شكل (٧– ٥٥)

| ا ء | = ٣ سم ، | ء جـ | = ٤ سم

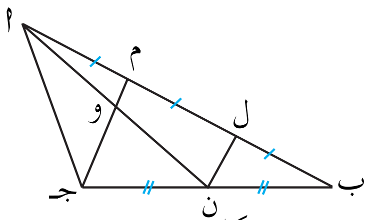
فإن | ء هـ | =

(١) ٢,٥ سم (٢) ٣ سم

(٣) ٤ سم (٤) ٥ سم .

ثالثاً : في الشكل (٧ –٥٦) : إذا كان ا ب جـ مثلث ، | ا م | = | م ل | = | ل ب | ،

| ب ن | = | ن جـ | ، | م جـ | = ١٢ سم ،



شكل (٧ –٥٦)

فإن | م و | =

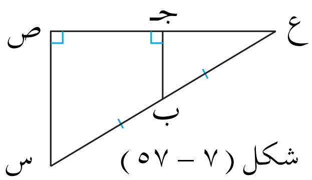
(١) ٣ سم (٢) ٤ سم

(٣) ٦ سم (٤) ٨ سم .

[٤] في الشكل (٧ – ٥٧) : س ص ع مثلث

قائم الزاوية في ص ، ب منتصف س ع ،

ب جـ ⊥ ص ع ،



شكل (٧ – ٥٧)

اثبت أن : | ص جـ | = | جـ ع | .

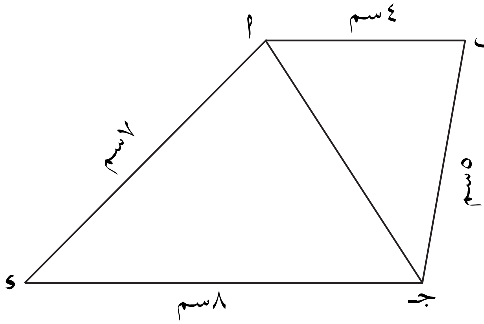
[٥] فـي الشكل (٧ – ٥٨) :

ا ب جـ ى شكل رباعي فيـه

|ا ب|=٤سم، |ب جـ|=٥سم،

|جـ ى| = ٨سم، |ا ى| = ٧سم،

اثبت أن :



شكل (٧ – ٥٨)

ق (∢ ب ا ى) > ق (∢ ب جـ ى).

[٦] Δس ص ع قائم الزاوية في ص،ل منتصف $\overline{\text{س ع}}$، ق (∢ ص ل ع) = ٨٠°،

أوجد ∢ س ع ص ، ∢ ص س ع .

[٧] Δا ب جـ ، فيه |ا ب| = |ا جـ| = ٤٥سم ، ق (∢ ا ب جـ) = ٣٠° ،

ى منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أوجد طول $\overline{\text{ا ى}}$.

[٨] ا ب جـ مثلث فيه $\overline{\text{ا جـ}}$ > $\overline{\text{ا ب}}$ ، رسم $\overline{\text{ى هـ}}$ موازٍ $\overline{\text{ب جـ}}$ وملاقٍ $\overline{\text{ا ب}}$

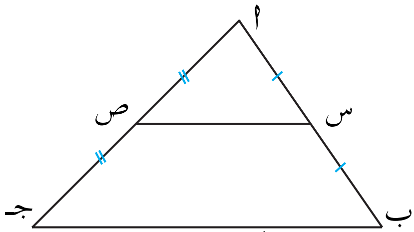
في ى ، $\overline{\text{ا جـ}}$ في هـ ، أثبت أن : $\overline{\text{ا ى}}$ > $\overline{\text{ا هـ}}$.

[٩] في الشكل (٧–٥٩) ا ب جـ مثلـث فيـه $\overline{\text{ا جـ}}$ > $\overline{\text{ا ب}}$ ، س منتصف

$\overline{\text{ا ب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ا جـ}}$

برهن أن :

ق (∢ ا س ص) > ق (∢ ا ص س).



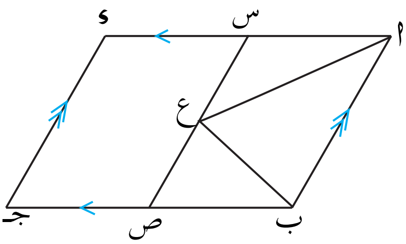
شكل (٧ – ٥٩)

[١٠] Δ س ص ع فيه ق (∢ ص) = ١٥٠° ، اسقط من س العمود س ل بحيث

لاقى امتداد $\overline{\text{ع ص}}$ في ل، واسقط $\overline{\text{ل و}}$ ⊥ $\overline{\text{س ص}}$ فإذا كان |س ل| = ٨سم.

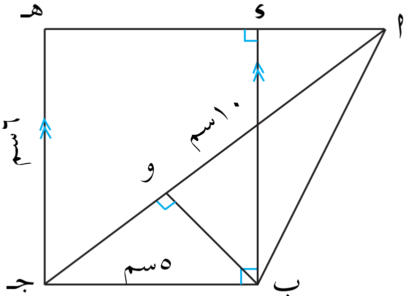
أوجد طول كل من $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س و}}$.

[١١] في الشكل (٧ – ٦٠) أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، س منتصف $\overline{\text{أء}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، ع نقطة على $\overline{\text{س ص}}$ ، أثبت أن Δ أ ب ع $\equiv \frac{1}{4}$ ▱ أ ب جـ ء.



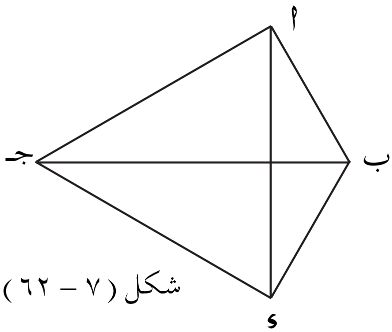
شكل (٧ – ٦٠)

[١٢] في الشكل (٧ – ٦١) : أ ب جـ مثلث فيه |أ جـ| = ١٠سم ، |ب جـ| = ٥سم ، ء ب جـ هـ مستطيل فيه جـ هـ = ٦سم . احسب طول $\overline{\text{ب و}}$.



شكل (٧ – ٦١)

[١٣] في الشكل (٧ – ٦٢) : $\Delta\Delta$ أ ب جـ ، ب جـ ء مشتركان في القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ ، إذا علمت أن المثلث أ ب جـ يكافئ المثلث ب جـ ء أثبت أن الضلع ب جـ ينصف $\overline{\text{أء}}$.

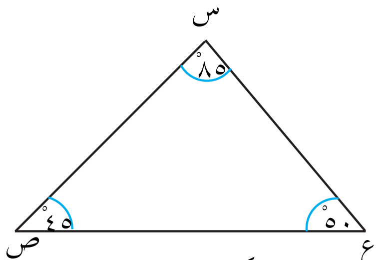


شكل (٧ – ٦٢)

٧ : ١٠ اختبار الوحدة

[١] حدّد فيما يلي إن كانت القطع المستقيمة ، يمكن أن تشكل اضلاع مثلث أم لا :

أ) ٥٢سم ، ٢٠سم ، ٤٨سم.   ب) ٤,٥سم ، ٩سم ، ٤سم .



شكل (٧ – ٦٣)

[٢] في الشكل (٧ – ٦٣) س ص ع مثلث فيه ور (∢ س) = ٨٥°، ور (∢ص) = ٤٥°، ور (∢ع) = ٥٠°، رتب أطوال أضلاع المثلث تنازلياً .

[٣] ارسم المثلث ا ب جـ فيه |ا ب| = |ا جـ| = ٥سم ، ور (∢ا) = ٩٠° ، ثم ارسم ارتفاعاته الثلاثة ، أين ستكون نقطة التقاء الارتفاعات ؟

[٤] ارسم المثلث ا ب جـ فيه |ا ب| = |ا جـ| = ٤سم ، |ب جـ| = ٣سم ، ثم ارسم متوسطاته .

[٥] ا ب جـ مثلث فيه |ا ب| = |ا جـ| ، ء منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ أثبت أن المثلث ء ب هـ متساوي الساقين .

[٦] س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، ور(∢ ص س ع) = ٥٠° ، هـ منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ، احسب ور (∢ س ص هـ) .

[٧] متوسط رأس المثلث المتساوي الساقين إلى القاعدة يقسمه إلى مثلثين.

ا) متطابقين ب) متكافئين جـ) متكافئين ومتطابقين .

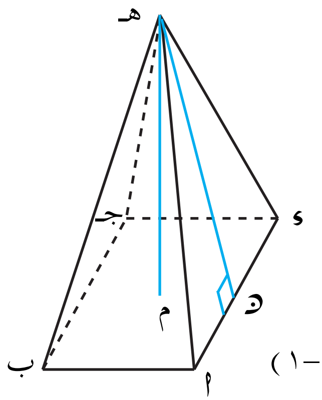
[٨] تكافؤ شكلين يعني :

ا) التساوي في المحيط ب) التساوي في المساحة جـ) التطابق .

الوحدة الثامنة القياس

٨ : ١ الهرم

تعرّفت من قبل على الهرم القائم ، وأن أوجهه عبارة عن مثلثات متطابقة، عدد هذه المثلثات هو نفسه عدد أضلاع قاعدته .



شكل (٨ – ١)

في الشكل (٨ – ١) : ترى هرماً رباعياً قائماً ؛ قاعدته المربع ا ب جـ ء، وأوجهه المثلثات ء هـ ا ، ا هـ ب ، ب هـ جـ ، جـ هـ ء . وارتفاعه هـ م .

أما ارتفاعه الجانبي فهو هـ ن .

تلاحظ أن $\overline{\text{هـ م}}$ عمودية على قاعدة الهرم . أما $\overline{\text{هـ ن}} \perp \overline{\text{ء ا}}$.

تذكر :

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع .

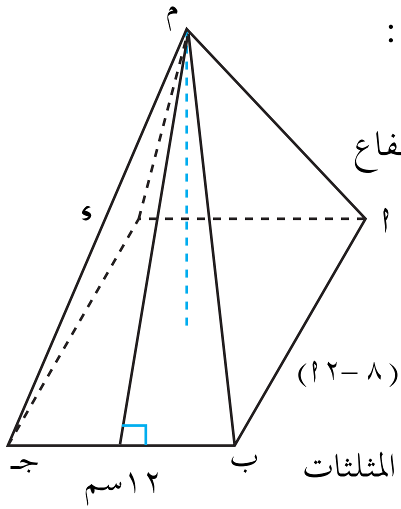
مساحة الهرم الجانبية = مجموع مساحات أوجهه الجانبية .

مساحة الهرم الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة .

مثال م ا ب جـ ء هرم رباعي قاعدته مربع طول ضلع القاعدة ١٢سم وارتفاعه ٨سم ، وارتفاعه الجانبي ١٠سم ، أوجد :

(١) حجم الهرم (٢) مساحة الهرم الجانبية (٣) مساحة الهرم الكلية .

الحل : [انظر الشكل (٨ – ٢ أ)] :



شكل (٨ – ٢أ)

(١) حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{\cancel{٣}_{١}}$ × ($\cancel{١٢}^{٤}$ × ١٢) × ٨

= ٣٨٤سم^{٣} .

(٢) مساحة الهرم الجانبية = مجموع مساحات المثلثات

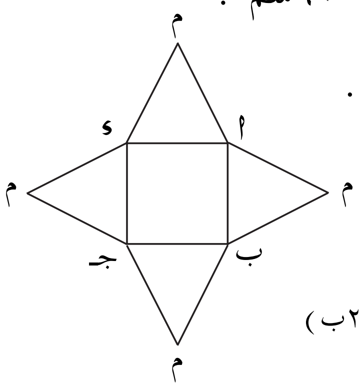
(أوجهه) [انظر الشكل (٨ – ٢ ب)] .

مساحة الوجه الواحد = $\frac{١}{٢}$ طول ضلع قاعدة الهرم × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{\cancel{٢}_{١}}$ × $\cancel{١٢}^{٦}$ × ١٠ = ٦٠سم^{٢} .

مساحة الهرم الجانبية = مساحة أربعة مثلثات .

= ٦٠ × ٤ = ٢٤٠سم^{٢} .



شكل (٨ – ٢ب)

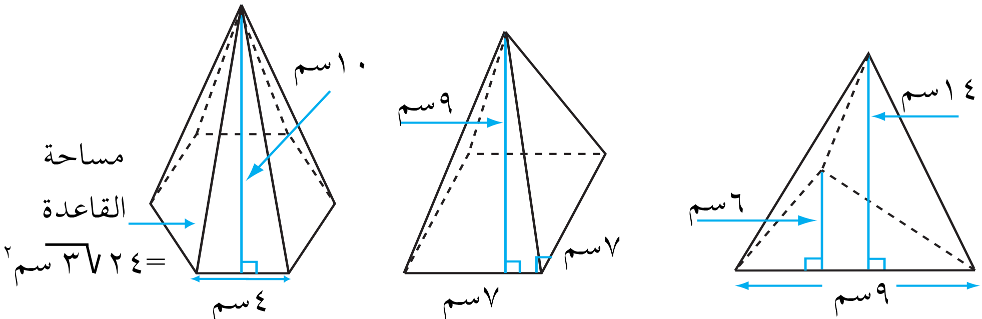
(٣) مساحة الهرم الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

مساحة قاعدة الهرم = ١٢ × ١٢ = ١٤٤سم^{٢} .

مساحة الهرم الكلية = ٢٤٠ + ١٤٤ = ٣٨٤سم^{٢} .

تماريــن ومسائـل

[١] أوجد المساحتين الجانبية والكلية للأشكال (٨ – ٣ أ ، ب ، جـ) :



شكل (٨ – ٣أ)   شكل (٨ – ٣ ب)   شكل (٨ – ٣ جـ)

[٢] م أ ب جـ ء هرم رباعي قاعدته مربع طول ضلعه ٣٠سم وارتفاعه ٨سم وارتفاعه الجانبي ١٠سم . أوجد :

أ) حجم الهرم   ب) مساحة الهرم الكلية .

[٣] ارتفاع أكبر اهرامات مصر ١٥٠م وطول ضلع قاعدته المربعة ٢٥٠م . أوجدحجم الهرم .

[٤] هرم ثلاثي قاعدته مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه ١٠سم وارتفاعه ٥ $\sqrt{3}$ سم وارتفاع الهرم الجانبي ١٣سم ، أوجد :

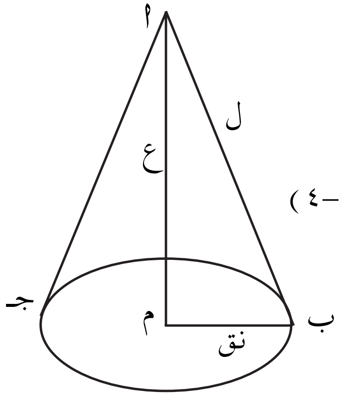
١) مساحة الهرم الجانبية   ٢) مساحة الهرم الكلية .

٨ : ٢ المخـــروط

تعلم أن حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{3}$ π نق٢ × ع

حيث نق : نصف قطر قاعدة المخروط ، ع : ارتفاع المخروط ، والآن عليك أن تعرف قانوني المساحتين الجانبية والكلية للمخروط .

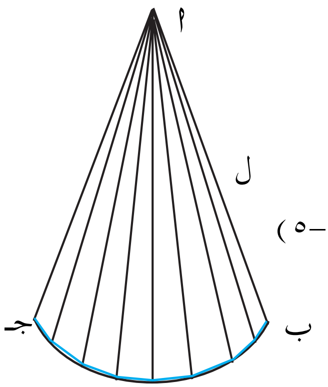
في الشكل (٨ – ٤) مخروط قائم فيه : $\overline{\text{ا م}}$ الارتفاع ، $\overline{\text{ا ب}}$ الراسم ، م مركز قاعدته .



شكل (٨ – ٤)

إذا فُرد المخروط اعطانا شكل قطاع دائرة كما في الشكل :(٨–٥) .

مساحة قطاع الدائرة يساوي مساحة المخروط الجانبية .



شكل (٨ – ٥)

لحساب هذه المساحة نقسم هذا القطاع إلى عدد كبير جداً من القطاعات الصغيرة فيصبح كل منها مثلثاًصغيراً ارتفاعه يساوي طول الراسم (ل) وقاعدته قطعة صغيرة جداً من القوس ب جـ .

∴ مساحة القطاع الدائري ا ب جـ = مجموع مساحات المثلثات الصغيرة

= $\frac{1}{2}$ مجموع قواعدها × طول الراسم = $\frac{1}{2}$ طول القوس ب جـ × ل

ولكن طول هذا القوس هو محيط قاعدة المخروط التي نصف قطرها (نق)

∴ المساحة الجانبية للمخروط = $\frac{1}{2}$ × ٢ π نق × ل

المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم = π نق ل .

وإذا أضفت مساحة قاعدة المخروط إلى مساحته الجانبية تحصل على المساحة الكلية للمخروط .

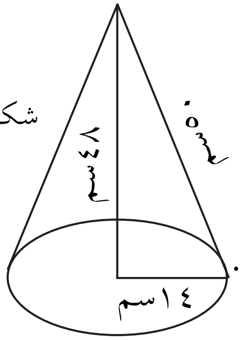
المساحة الكلية للمخروط الدائري القائم = π نق ل + π نق^{٢} .

حيث نق : نصف قطر قاعدة المخروط ، ل : طول راسم المخروط .

مثال (١) مخروط دائري : نصف قطر قاعدته ١٤سم وطول راسمه ٥٠سم وارتفاعه ٤٨سم . أوجد كلاً من :

أ) مساحة المخروط الجانبية . ب) مساحته الكلية . جـ) حجم المخروط .

الحــل :



شكل (٨ – ٦)

أ) المساحة الجانبية للمخروط = π نق ل

$= \frac{٢٢}{\cancel{٧}_{١}} \times \cancel{١٤}^{٢} \times ٥٠ = ٢٢٠٠$ سم^{٢} .

ب) المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

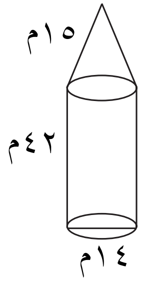
$= \pi$ نق ل $+ \pi$ نق^{٢} $= ٢٢٠٠ + \frac{٢٢}{\cancel{٧}_{١}} \times \cancel{١٤}^{٢} \times ١٤ = ٢٢٠٠ + ٦١٦ = ٢٨١٦$سم^{٢}

جـ) حجم المخروط $= \frac{١}{٣} \pi$ نق^{٢} $\times$ ع

$= \frac{١}{\cancel{٣}_{١}} \times \frac{٢٢}{\cancel{٧}_{١}} \times \cancel{١٤}^{٢} \times ١٤ \times \cancel{٤٨}^{١٦} = ٩٨٥٦$ سم^{٣} .

مثال (٢) الجزء السفلي لصاروخ على شكل إسطوانة ارتفاعها ٤٢م ، وقطر قاعدتها ١٤م ، وجزؤه العلوي مخروط راسمه ١٥م ، أوجد المساحة الكلية للصاروخ .

الحل : [انظر الشكل (٨–٧)]



شكل (٨ –٧)

– مساحة قاعدة الاسطوانة = π نق^{٢}

$$= \frac{٢٢}{\cancel{٧}_{١}} \times ٧ \times \cancel{٧}^{١} = ١٥٤\text{م}^{٢} .$$

– المساحة الجانبية للاسطوانة = ٢ π نق ع = $٢ \times \frac{٢٢}{\cancel{٧}_{١}} \times \cancel{٧}^{١} \times ٤٢ = ١٨٤٨\text{م}^{٢}$.

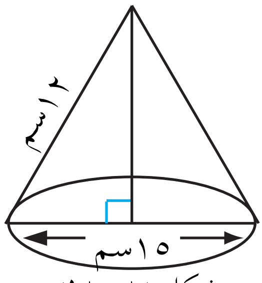
– المساحة الجانبية للمخروط = π نق ل = $\frac{٢٢}{\cancel{٧}_{١}} \times \cancel{٧}^{١} \times ١٥ = ٣٣٠\text{م}^{٢}$.

∴ المساحة الكلية للصاروخ = مساحة قاعدته + المساحة الجانبية للاسطوانة + المساحة الجانبية للمخروط

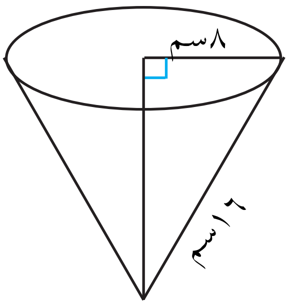
$$= ١٥٤ + ١٨٤٨ + ٣٣٠ = ٢٣٣٢\text{م}^{٢} .$$

تمارين ومسائل

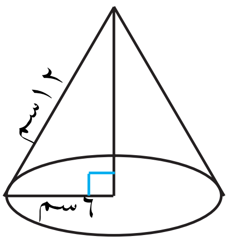
[١] في الأشكال (٨ – ٨أ ، ب ، جـ) ، أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية ، لكل مخروط .



شكل (٨ –٨أ)



شكل (٨ –٨ب)



شكل (٨ –٨ جـ)

[٢] مخروط دائري نصف قطر قاعدته ٢١ م ، وطول راسمه ٧٥م وارتفاعه ٧٢م ، أوجد :

أ) مساحته الجانبية ب) مساحته الكلية جـ) حجمه .

[٣] مخروط دائري نصف قطر قاعدته ٥سم ، وطول راسمه ١٣سم ، وارتفاعه ١٢سم ، أوجد مساحته الكلية وحجمه ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$) .

[٤] أوجد طول نصف قطر قاعدة مخروط دائري طول راسمه ٧سم ومساحته الجانبية ١٩,٩سم^{٢} .

[٥] مخـــروط دائري طول راسمـــه ٣,٩م ونصف قطر قاعدته ١,٤م وارتفاعه ٣,٦ م . أوجد المساحة الكلية للمخروط ثم حجمه .

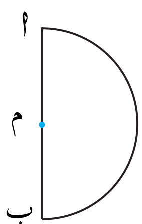
[٦] منارة مسجد على شكل اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٢٥م ونصـف قطر قاعدتها ١,٧٥م وجزؤها العلوي عبارة عن مخروط طول راسمه ٦,٢٥م أوجد المساحة الجانبية للمنارة ثم أوجد حجمها إذا علمت أن إرتفاع جزئها العلوي يساوي ٦م ؟

٨ : ٣ حجم الكرة ومساحة سطحها

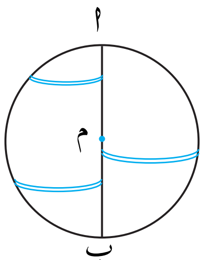
حجم الكـــرة :

إذا كان لديك دائرة ، وأدرتها نصف دورة حول أي قطر من اقطارها فإنك تحصل على كرة .

ماذا يحصل لو كان لديك نصف دائرة وأدرتهـــا حـــول قطـــرهـــا دورة كاملة ؟



شكل (٨ –٩أ)



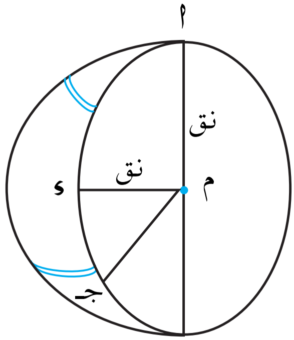
شكل (٨ –٩ب)

[انظر الشكلين ٨ – ٩أ ، ب)]

في الشكل (٨ – ١٠) : م مركز الدائرة وهو نفسه مركز الكرة . أي

قطعة تمر بمركز الكرة وينتهي طرفاها بسطح الكرة تُسمى قطر الكرة .

$\overline{أب}$: قطر الكرة ، $\overline{م أ}$: نصف قطر الكرة .



شكل (٨ – ١٠)

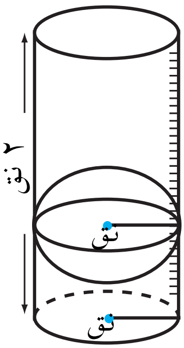
|م أ| = |م ب| = |م جـ| = |م ء| = نق .

لإيجاد حجم الكرة اتبع الخطوات التالية :

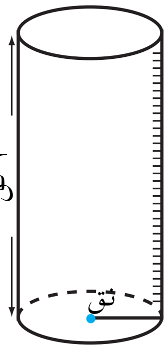
أ) خُذ كرة معلوم نصف قطرها وليكن نق (شكل ٨ – ١١أ) .

ب) خُـذ إسطوانة مدرجة ، نصف قطر قاعدتها نق، وارتفاعها ٢ نق شكل (٨ – ١١ ب) .

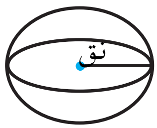
جـ) ضع الكرة داخل الإسطوانة شكل (٨ – ١١جـ) .



شكل (٨ – ١١جـ)



شكل (٨ – ١١ب)



شكل (٨ – ١١أ)

ء) املأ الاسطوانة بالماء تماماً ، ثم أخرج الكرة، تجد أن حجم الماء المتبقي يساوي $\frac{١}{٣}$ حجم الماء الذي كان في الاسطوانة .

ومن ذلك نستنتج أن حجم الكرة يساوي $\frac{٢}{٣}$ حجم الماء السابق.

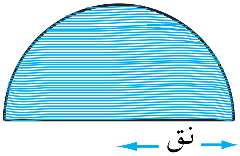
∵ حجم الماء السابق في الاسطوانة = حجم الاسطوانة = π نق^٢ ع

= π نق^٢ × ٢ نق = ٢ π نق^٣ .

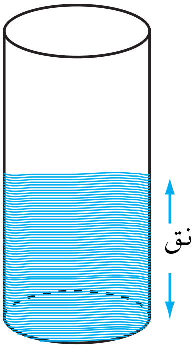
∴ حجم الكرة = $\frac{٢}{٣}$ × ٢ π نق^٣ = $\frac{٤}{٣}$ π نق^٣ .

مساحة سطح الكرة :

لإِيجاد مساحة سطح الكرة اتبع الخطوات التالية :



شكل (٨ – ١٢أ)



شكل (٨ – ١٢ب)

– خُذ نصف كرة معلوم نصف قطرهـا وليكن نق .

– خُذ اسطوانة نصف قطر قاعدتها نق

– لُف نصف الكرة بخيط حتى يغطيها كاملاً كما في الشكل (٨ – ١٢أ) .

– بنفس طول الخيط السابق لُف الاسطوانة ، تجد أن الخيط يلتف حول سطـح الاسطوانة ويصل إِلى ارتفاع يساوي نصف قطرها (شكل ٨ – ١٢ب) .

أي أن : مساحة سطح الكرة التي نصف قطرها نق يساوي مساحة سطح الاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها نق وارتفاعها ٢ نق .

∴ المساحة الجانبية للاسطوانة = ٢ π نق ع = ٢ π نق × ٢ نق = ٤ π نق^{٢} ،

وهذا يساوي مساحة سطح الكرة .

∴ مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢} .

مثال (١) كرة طول نصف قطرها ٣سم ،أوجد حجمها ومساحة سطحها .

الحـل : حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

$$= \frac{٤}{\cancel{٣}_{١}} \times \frac{٢٢}{٧} \times \cancel{٣}^{١} \times ٣ \times ٣ = \frac{٧٩٢}{٧}\text{ سم}^{٣} = ١١٣\frac{١}{٧}\text{ سم}^{٣} .$$

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢} = ٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٣ × ٣ = $\frac{٧٩٢}{٧}$ سم^{٢} = ١١٣ $\frac{١}{٧}$ سم^{٢} .

مثال (٢) إذا كان حجم كرة $\frac{٤٣١٢}{٣}$ سم^{٣}، احسب طول نصف قطرها ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)،

ثم احسب مساحة سطحها .

الحل : حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \pi$ نق^{٣}

$\frac{٤٣١٢}{٣} = \frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧}$ نق^{٣} .

نق^{٣} = $\frac{٧ \times \cancel{٣}^{١} \times \cancel{٤٣١٢}^{١٩٦}}{\cancel{٢٢}_{١} \times \cancel{٤}_{١} \times \cancel{٣}_{١}}$ = ٣٤٣ سم^{٣}

٣٤٣	٧
٤٩	٧
٧	٧
١	

ومنه نصف قطر الكرة (نق) = $\sqrt[٣]{٣٤٣}$ = ٧سم .

مساحة السطح = ٤ π نق^{٢} = ٤ × $\frac{٢٢}{\cancel{٧}_{١}}$ × $\cancel{٧}^{١}$ × ٧ = ٦١٦سم^{٢} .

تمارين ومسائل

[١] أوجد حجم الكرة التي نصف قطرها ١٠سم.

[٢] أوجد مساحة سطح كرة نصف قطرها ١٤سم .

[٣] أوجد حجم ومساحة سطح كرة نصف قطرها :

أ) ٣,٥سم ، ب) ١٢سم ، جـ) $\frac{٣}{٢}$ م .

[٤] احسب نصف قطر كرة حجمها ٨,٥٠م^{٣} ، ثم أوجد مساحة سطحها .

[٥] إذا كانت مساحة سطح كرة ٢٤٦٤ سم^{٢} .احسب طول نصف قطرها،ثم أوجد حجمها.

[٦] كرة حجمها $\frac{١}{٧}$ ٩٠٥ سم^{٣} . أوجد مساحة سطحها .

[٧] أوجد حجم كرة إذا علمت أن مساحة سطحها : أ) ١٥٤سم^{٢} . ب) ٨١ π سم^{٢}.

[٨] لوح من المعدن منتظم السمك مساحته متر مربع،صُنعت منه كرة جوفاء قطرها ٢٨سم أوجد مساحة الجزء الباقي من اللوح .

[٩] غُمرت كرة من النحاس في اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها ٧سم تحوي ماء فارتفع سطح الماء فيها بمقدار ٣,٤ سم ، أوجد حجم كرة النحاس وطول نصف قطرها لأقرب سنتيمتر .

[١٠] باعتبار الأرض كرة نصف قطرها ٦٤٠٠ كليومتر ، أوجد :

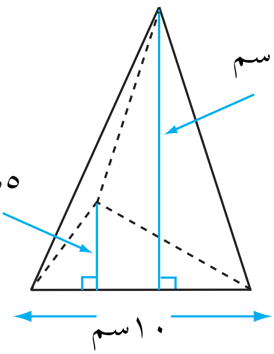
أ) حجم الكرة الأرضية   ب) مساحة سطحها .

جـ) إذا كان حوالي $\frac{٢}{٣}$ سطح الأرض تغمرها المياه . فما مساحة اليابسة؟

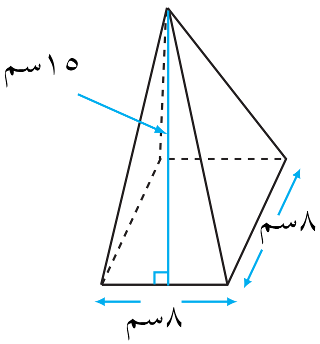
٨ : ٤ تمارين عامة ومسائل

[١]مساحة قاعدة هرم سداسي قائم تساوي ٥٤$\sqrt{٣}$ سم^{٢} وطول ضلعها ٦سم، وارتفاع الهرم الجانبي ١١سم ، احسب مساحتيه الجانبية والكلية .

[٢] أوجد المساحتين الجانبية والكلية للشكلين (٨ – ١٣ أ ، ب) .

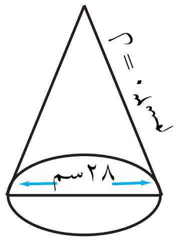


شكل (٨ –١٣أ)

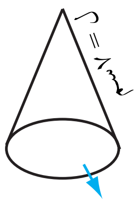


شكل (٨ –١٣ب)

[٣] احسب المساحتين الجانبية والكلية للأشكال (٨ –١٤ أ ، ب،جـ)

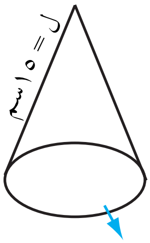


شكل (٨ –١٤أ)



مساحة القاعدة = ١٩٨سم^{٢}

شكل (٨ –١٤ب)



محيط القاعدة = ١٣٢سم

شكل (٨ –١٤جـ)

[٤] كرة نصف قطرها ٥م ، احسب حجمها ومساحة سطحها .

[٥] أوجد حجم ومساحة سطح كرة قطرها ٣٠سم .

[٦] حجم كرة ٣٣,٥٠٤ متراً مكعباً ، احسب نصف قطرها ، ثم احسب مساحة سطحها (π = ٣,١٤١) .

[٧] إذا كانت مساحة سطح كرة ٨٠٤ $\frac{٤}{٧}$ سم٢ ، فأوجد نصف قطرها(π = $\frac{٢٢}{٧}$) ، ثم أوجد حجمها .

[٨] صُهرت كرة ومكعب من معدن واحد وحولتا إلى إسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها $\frac{٣}{١١}$ ١٥سم ، أوجد نصف قطر قاعدة الإسطوانة ، علماً بأن قطر الكرة يساوي طول ضلع المكعب ويساوي ١٤سم ، وأنه لم يُفقد شئ أثناء عملية الصهر .

[٩] أكمل الجدول التالي ، حيث نق = نصف قطر قاعدة المخروط القائم وَ ع ارتفاعه ، ل طول راسمه (π = $\frac{٢٢}{٧}$) .

نق	ع	ل	مساحة القاعدة	حجم المخروط	المساحة الجانبية	المساحة الكلية
٧سم	٢٤سم	٢٥سم				
٦سم		١٠سم		$\frac{١}{٧}$ ٣٠١سم٣		
	١٥سم	١٧سم	$\frac{١}{٧}$ ٢٠١ سم٢			

٨ : ٥ اختبار الوحدة

[١] هرم رباعي قائم ارتفاعه ٨سم ، قاعدته مربع طول ضلعه ١٢سم ، وارتفاعه الجانبي يساوي ١٠سم ، احسب :

أ) حجم الهرم ب) المساحة الجانبية للهرم .

[٢] مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢سم ونصف قطر قاعدته ٥سم وطول راسمه ١٣سم، احسب : أ) مساحته الكلية ب) حجمه .

[٣] احسب حجم ومساحة سطح كرة قطرها ٢٠سم (π = ٣,١٤) .

الوحدة التاسعة

الإِحصاء

٩ : ١ قراءة الجداول والأشكال البيانية

تعرفت في الصفين السادس والسابع على بعض الأساليب الإِحصائية لقراءة وتبويب وتمثيل البيانات الإِحصائية وتفسير بياناتها ، في هذه الوحدة سوف نتعرف على اسلوبين لقراءة الجداول التكرارية والأشكال البيانية :

أولاً : قراءة جداول التكرارات :

الجدول التالي يمثل الألوان لفئة زهرة تم ملاحظتها ، فهو يمثل بيانات مبوبة بحسب صفة اللون ،

ويطلق على مثل هذا الجدول جدول تكرار الصفة أو بشكل عام يسمى جدول توزيع تكراري ،

لون الزهرة	أبيض	أحمر	أصفر	مجموع الزهور
التكرار	٢٠	٥٠	٣٠	١٠٠

تلاحظ : في الصف الثاني متغيراً إِحصائي هو التكرار أي عدد مرات ملاحظة اللون فمثلاً اللون الابيض تكررت ملاحظته (٢٠) مرة ويعني ذلك أن (٢٠) زهرة تم ملاحظة اللون الابيض عليها ..، وهكذا .

ما النسبة المئوية لكل تكرار على حدة ؟

النسبة المئوية لتكرار اللون الابيض = $\frac{٢٠}{١٠٠}$ = ٢٠ ٪

النسبة المئوية لتكرار اللون الأحمر = $\frac{٥٠}{١٠٠}$ = ٥٠ ٪

النسبة المئوية لتكرار اللون الأصفر = $\frac{٣٠}{١٠٠}$ = ٣٠ ٪

يطلق على نسبة التكرار المئوية « التكرار النسبي »

تلاحظ أن **مجموع التكرارات النسبية يساوي الواحد الصحيح**

مثال (١) الجـدول التالي يبين توزيع بيانات في جـدول تكراري يسمى « جدول بيانات كمية » والبيانات المبوبة عبارة عن درجات (٣٠) طالباً في اختبار شهري درجته الكبرى (١٠) .

الدرجـــة	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	مجموع الطلاب
التكرار	٣	٥	٦	٧	٦	٣	٣٠

أ) ما أصغر وأكبر درجة حصل عليها الطلاب ؟

ب) ما مجموع التكرارات (عدد الطلاب) المناظرة لأكبر وأصغر درجة ؟

جـ) ما مجموع الدرجات الكلية ؟

الحـــل :

أ) أصغر وأكبر درجة هما على الترتيب (٥) و (١٠) درجات .

ب) التكرار المناظر لأكبر درجة = ٣ طلاب .

التكرار المناظر لأصغر درجة = ٣ طلاب .

بالتالي فإن مجموعهما = ٣ + ٣ = ٦ طلاب .

جـ) لحساب مجموع الدرجات الكلية : نضرب كل درجة في التكرار المناظر ، ثم نجمع بعد ذلك .

∴ المجموع الكلي للدرجات = ٥ X ٣ + ٦ X ٥ + ٧ X ٦ + ٨ X ٧ + ٩ X ٦ + ١٠ X ٣

= ١٥ + ٣٠ + ٤٢ + ٥٦ + ٥٤ + ٣٠ = ٢٢٧ درجة .

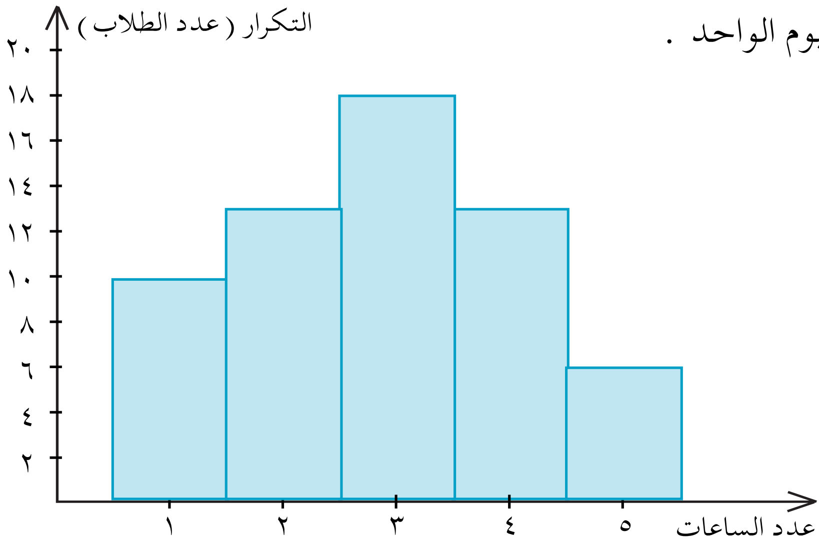
تدريــب أوجد المتوسط الحسابي في المثال (١) . الإجابة = ٧,٥٧

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع (حاصل ضرب الدرجات × تكراراتها)}}{\text{مجموع التكرارات}} .$$

ثانياً : قراءة الأشكال البيانية :

من أنــواع الأشــكال البيانيــة المدرج التكــراري والمضلــع التكــراري .

المدرج التكراري التالي يبين عدد الساعات التي يقضيها (٦٠) طالباً في الدراسة في اليوم الواحد .



شكل (٩ – ١)

تلاحظ أن أقل ساعات يقضيها الطلبة في الدراسة في اليوم هي ساعة واحدة ، وأكثر ساعات هي (٥) ساعات ، كما تلاحظ أن (١٣) طالباً يقضون ساعتين في الدراسة في اليوم .

كم عدد الطلبة الذين يدرسون (٤) ساعات أو أكثر في اليوم .

عدد الطلبة الذين يدرسون (٤) ساعات أو أكثر في اليوم = عدد الطلبة الذين يدرسون ٤ ساعات + عدد الطلبة الذين يدرسون ٥ ساعات = ١٣ + ٦ = ١٩ طالباً .

تدريـــب من مدرج التكرار المعطى في الشكل (٩–١) .

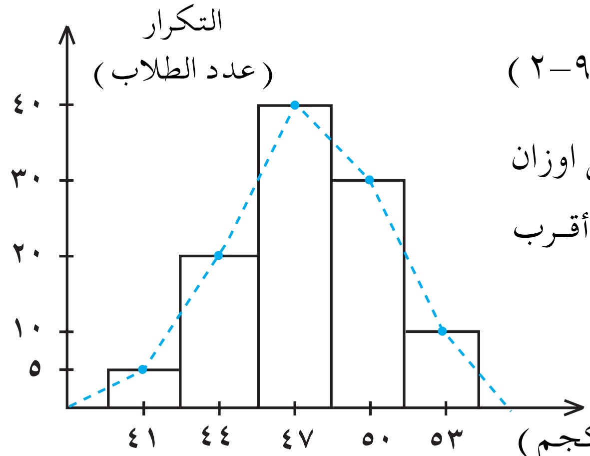
أ) انقل المعلومات إلى جدول تكراري فيه الصف الأول لعدد الساعــات والصف الأخر للتكرار المناظر .

ب) احسب المتوسط الحسابي باستخدام العلاقة :

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع (حاصل ضرب الساعات} \times \text{تكراراتها)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

مثال (٢) الشـــــــكل (٩–٢)

هو مضلع التكـرار ويمثــل اوزان عدد من الطلبة مقربة إلى أقـرب كجم .



شكل (٩ – ٢)

أ) كم عدد الطلبة الذين أوزانهم أقل من ٤٧ كجم .

ب) كم عدد الطلبة الذين أوزانهم ٤٧ كجم .

جـ) كم عدد الطلبة الذين أوزانهم أكثر من ٤٧ كجم .

الحــل :

أ) عدد الطلبة الذين أوزانهم أقل من ٤٧ كجم = ٥ + ٢٠ = ٢٥ طالباً .

ب) عدد الطلبة الذين أوزانهم ٤٧ كجم = ٤٠ طالباً .

جـ) عدد الطلبة الذين أوزانهم أكثر من ٤٧ كجم = ٣٠ + ١٠ = ٤٠ طالباً .

ملاحظة :

مضلع التكرار عبارة عن خط منقط (منكسر كل قطعة فيه) تربط بين نقطتين تنصف كل واحدة الضلع العلوي لكل مستطيل من مستطيلات مدرج التكرار أي أننا ننصف الأضلاع العلوية للمستطيلات ، ثم نصل بين كل منتصفين متتاليين .

تمارين ومسائل

[١] الجدول الآتي يبين توزيع عدد طلاب الرياضيات في المستويات الأربعة للعام ٢٠٠٠م – ٢٠٠١م بكلية التربية جامعة صنعاء .

المستوى	عدد الذكور	عدد الأناث	المجموع
الأول	٧٠	١٢٠	١٩٠
الثاني	٥٠	١٠٠	١٥٠
الثالث	٦٠	٧٠	١٣٠
الرابع	٤٠	٥٠	٩٠
المجموع	٢٢٠	٣٤٠	٥٦٠

أ) ما نوع البيانات المبوبة في الجدول السابق ؟

ب) ما النسبة المئوية للطالبات لجميع المستويات ككل ؟

جـ) ما النسبة المئوية للطلاب لجميع المستويات ككل ؟

[٢] الجدول الآتي يبين درجات(٣٠)طالباً في امتحان شهري درجته الكبرى(١٠)درجات؟

الدرجة	الفرز	التكرار
٥	||||	٤
٦	~~||||~~	٥
٧	~~||||~~ |	٦
٨	~~||||~~ |||	٨
٩	||||	٤
١٠	|||	٣
المجموع		٣٠

أ) ما الصفة التي على أساسها تم تنظيم البيانات السابقة في الجدول ؟

ب) كم المجموع الكلي للدرجات ؟ جـ) ما المتوسط الحسابي لهذه الدرجات ؟

[٣] جدول التكرار الآتي يمثل أوزان (١٠٠) طالب مقربة إلى أقرب كجم :

الوزن (كجم)	التكرار (عدد الطلاب)	النسبة المئوية	التكرار النسبي
٤١	٥	٥٪	٠,٠٥
٤٤	١٥		
٤٧	٤٥		
٥٠	٢٥		
٥٣	١٠		
المجموع	١٠٠ طالب		

أ) اكمل العمود الثالث والرابع في الجدول .

ب)ما مجموع التكرارات النسبية ؟ جـ) احسب المتوسط الحسابي .

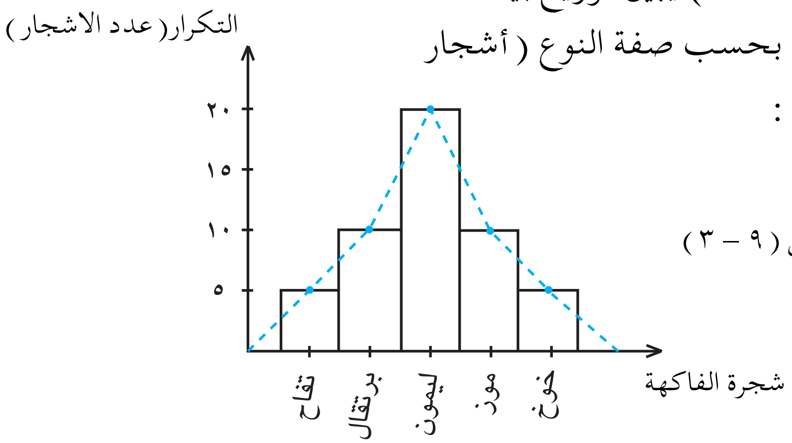
[٤] الجدول التالي يبين توزيع أوزان مجموعة من الاسمـــاك اصطـادها أحـد الصيادين في أحد الأيام من خليج عدن :

الوزن (كجم)	١	٢	٣	٤	المجموع
التكرار × الوزن	٥	٢٠	٤٥	٨٠	١٥٠ كجم

أ) كم عدد الاسماك المناظر للوزن ٤ كجم ؟

ب) إذا كان المتوسط الحسابي = ٣ كجم . فما مجموع التكرارات(مجموع الاسماك)؟

[٥] الشكل (٩ –٣) يبين توزيع بيانات إحصائية بحسب صفة النوع (أشجار مثمرة) :



شكل (٩ – ٣)

أ) ماذا تمثل المستطيلات البيانية ؟
ب) ماذا يمثل الشكل الناتج من توصيل الخطوط بين نقاط منصفات الأضلاع العلوية للمستطيلات ؟
جـ) ما عدد أشجار الموز ؟
ء) ما مجموع التكرارات ؟ (أي مجموع عدد الأشجار)
هـ) ما التكرار النسبي لأشجار الليمون ؟
و) انشئ جدولاً تكرارياً للأشجار وتكراراتها المناظرة من المعلومات المتوفرة في الشكل (٩ – ٣) .

٩ : ٢ جدولـــة البيانـــات

سبق وتعلمت كيفية تبويب بيانات إحصائية في جداول في الصف السابع، وهنا سوف تتعرف على كيفية جدولة بيانات إحصائية أولية بحسب تصنيف هذه البيانات .

فمثلاً يصنف أفراد المجتمع إلى ذكور وإناث وتصنف الأشجار المثمرة إلى أشجار موز ، برتقال ، تفاح ... الخ مثل هذه التصنيفات يسمى بيانات نوعية، أي أن جدولة هذا النوع من البيانات تكون بحسب صفة النوع .

كما تصنف البيانات التي تمثل قياسات لدرجة الحرارة أو الأطوال أو الأوزان... وهكذا كل هذه الأنواع من البيانات تسمى بيانات كمية .

تدريـــب صنف البيانات التالية إلى بيانات وصفية أو كمية :

أ) الحالة التعليمية(يقرأ، أمّي). ب) سرعة السيارة بالكيلومتر / ساعة .
جـ) الحالة الإجتماعية (متزوج ، أعزب ، مطلق ، أرملة) .
ء) الألوان : أحمر ، أخضر ، أزرق .

مثال (١) أحصى ياسر أعداد الماشية التي شاهدها أثناء زيارته لإحدى مزارع تربية الماشية فسرد البيانات كما يلي :

جمل خروف ماعز جمل بقرة خروف بقرة خروف شاه ماعز
ماعز شاه بقرة بقرة جمل شاه شاه ماعز بقرة ماعز
خروف شاه ماعز خروف بقرة ماعز ماعز خروف خروف شاه

إنشئ جدولاً لهذه البيانات .

الحل : البيانات الأولية السابقة يمكن تنظيمها في جدول يسمى جدول تكراري على النحو التالي :

نوع الماشية	الفرز	التكرار
جمل	|||	٣
بقرة	~~||||~~		٦
ماعز	~~||||~~ |||	٨
خروف	~~||||~~ ||	٧
شاه	~~||||~~		٦
المجموع		٣٠

تدريب ما النسبة المئوية لكل نوع من أنواع الماشية ؟

مثال (٢) الدرجات النهائية التي حصل عليها (٣٠) طالباً في مادة الإحصاء في إحدى كليات جامعة صنعاء .

٧٠	٨٥	٦٠	٩٠	٦٠
٧٠	٩٠	٦٥	٦٥	٦٥
٧٥	٩٥	٧٠	٨٥	٧٥
٦٠	٧٥	٧٥	٧٠	٨٠
٦٥	٨٥	٧٥	٧٠	٧٥
٨٥	٨٠	٨٠	٨٠	٨٠

نظم البيانات السابقة في جدول تكراري واحسب التكرار النسبي .

الحـــل : البيانات السابقة عبــارة عـن بيانات كمية ويمكن تنظيمها في جدول توزيع تكراري كما يلي :

الدرجة	الفـرز	التكرار	النسبة المئوية	التكرار النسبي
٦٠	|||	٣	٪١٠	٠,١
٦٥	||||	٤	٪١٣,٣	٠,١٣
٧٠	~~||||~~	٥	٪١٦,٧	٠,١٧
٧٥	~~||||~~ |	٦	٪٢٠	٠,٢٠
٨٠	~~||||~~	٥	٪١٦,٧	٠,١٧
٨٥	||||	٤	٪١٣,٣	٠,١٣
٩٠	||	٢	٪ ٦,٧	٠,٠٧
٩٥	|	١	٪ ٣,٣	٠,٠٣
المجموع		٣٠	٪١٠٠	١

نلاحظ أن مجموع التكرارات النسبية تساوي واحداً صحيحاً .

تماريــن ومسائــل

[١] صنف كلاً من البيانات التالية إلى نوعية وكمية :

أ) الزوايا بالدرجات .　　　　ب) العمر بالسنوات .

جـ) مجموعة أشكال هندسية حسب عدد اضلاعها .

ء) نزلاء أحد المستشفيات حسب الامراض التي يعانون منها .

[٢] لاحظت أروى عند زيارتها لجدها في المزرعة الأشجار المثمرة التالية :

تفاح	برتقال	موز	تفاح	برتقال
موز	برتقال	تفاح	تفاح	برتقال
تفاح	موز	برتقال	برتقال	تفاح
تفاح	تفاح	برتقال	تفاح	موز

أ) جدّول البيانات السابقة مبيناً تكرار كل نوع من الأشجار .

ب) ما النسبة المئوية للتفاح ؟

[٣] لديك البيانات التالية :

٢	٣	٢	٣	١	٤	٢	١
٣	٣	٤	٢	١	٢	٢	٣
٣	٢	٣	٣	٣	٢	٤	١
٢	٣	٤	٢	٤	٣	١	٢

أ) نظم هذه البيانات في جدول تكراري يحتوي العمود الأول على العدد والعمود الثاني على التكرار والعمود الثالث حاصل ضرب العدد في تكراره المناظر .

ب) ما مجموع التكرارات .

جـ) ما المجموع الكلي لحاصل ضرب العدد في تكراره ؟

ء) احسب المتوسط الحسابي لهذه الأعداد .

٩ : ٣ تمثيل البيانات الإحصائية

لتكن لديك البيانات التالية وطلب منك تمثيلها باستخدام المضلع التكراري :

٦	٥	٦	٧	١٠	٢	١	٨	٩	١٠
٦	٥	٥	٨	٤	٩	٣	٩	٨	١٢
٥	٤	٧	١٢	٢	٧	٨	١٠	٩	١١
١٠	٩	٤	٢	١١	٣	٥	٦	٧	٨

كي تمثل هذه البيانات بمضلع تكراري فإنك أولاً بحاجة إلى إنشاء جدول

تكرار لهذه البيانات ولكن الجدول سيكون طويلاً وغير واضح لذا يجب البحث عن طريقة يمكن بواسطتها اختصار الجدول وهذه الطريقة هي استخدام الفئات حيث يمكن تجزئة البيانات في مجموعات صغيرة تسمى كل وحدة منها فئة : فمثلاً المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ } تمثل فئة وتكتب ١ – ٣ ، . . . وهكذا .

الفئة هي مجموعة من البيانات تبدأ بملاحظة تسمى الحد الأدنى وتنتهي بملاحظة تسمى الحد الأعلى للفئة

فمثلاً : الفئة (١ – ٣) حدها الأدنى = ١ ، وحدها الأعلى = ٣ .

. . . وهكذا . ولكي نمثل البيانات بيانياً بحسب الفئة فإننا نمثل مركز الفئة على المحور السيني وتكرارات الفئة على المحور الصادي .

ويعرف مركز الفئة كالآتي :

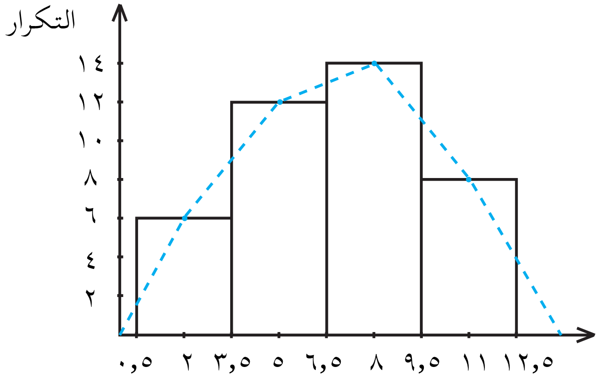
$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{٢}$$

يتم تبويب البيانات السابقة وفقاً لهذه المعلومات في جدول التكرار التالي :

الفئة	مركز الفئة	التكرار
١ – ٣	٢	٦
٤ – ٦	٥	١٢
٧ – ٩	٨	١٤
١٠ – ١٢	١١	٨
المجموع		٤٠

بناءً على هذا الجدول يتم رسم مضلع التكرار على النحو التالي [شكل (٩–٤)] المستطيلات عبارة عن مدرَّج التكرار .

والخط المنقط هو مضلع التكرار .



شكل (٩ – ٤)

ملاحظة :

الحدان الحقيقيان للفئة (١ – ٣) هما (٠,٥ – ٣,٥) ومركز هذه الفئة هو العدد ٢ وكذلك الحدان الحقيقيان للفئة (٤ – ٦) هما (٣,٥ – ٦,٥) ... وهكذا .

مثال (١) سُجلت درجة الحرارة في مدينة صنعاء لعشرين يوماً متتالية فكانت كما يلي :

١٨	١٨	١٦	٢٥	٢١
٢١	١٩	١٧	٢١	٢٦
٢٢	٢١	٢٦	٢٤	٢٢
٢٥	٢٠	١٧	١٦	١٧

إِنشئ جدولاً لهذه البيانات باستخدام الفئات .

الحـل :

إِبحث عن أصغر درجة وأكبر درجة للحرارة تجد ان اصغر درجة هي ١٦ وأكبر درجة هي ٢٦ فإِن عدد الدرجات التي تقع ضمن هذه الفئة تساوى ١١ درجة وهو امر يحتاج إِلى ١١ صفاً إِذا أخذت كل درجة على حدة ، لذا يمكن تكوين فئات من درجتين أو ثلاث، وليكن هذا الجدول مكوّناً من فئات ذات درجتين يبدأ بالفئة (١٦ – ١٧) وينتهي بالفئة (٢٦ – ٢٧) .

الفئة	مركز الفئة	الفــرز	التكــرار
١٦ – ١٧	١٦,٥	𝍸	٥
١٨ – ١٩	١٨,٥	|||	٣
٢٠ – ٢١	٢٠,٥	𝍸	٥
٢٢ – ٢٣	٢٢,٥	||	٢
٢٤ – ٢٥	٢٤,٥	|||	٣
٢٦ – ٢٧	٢٦,٥	||	٢

مثال (٢)

جدول التكرار التالي يبين أوزان (١٠٠) شخص مقربة إِلى أقرب كجم .

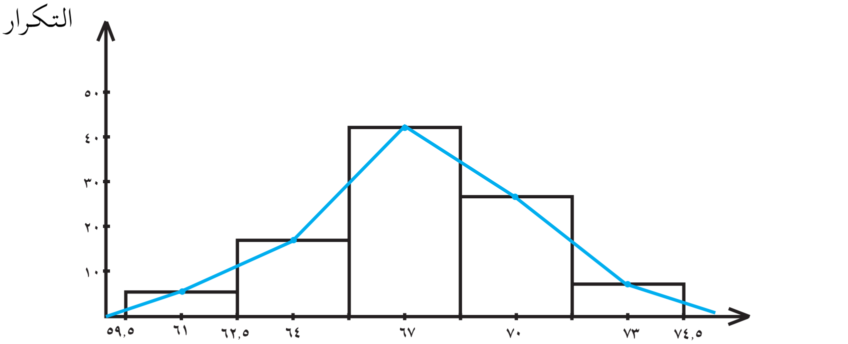
الفئة	مركز الفئة	التكرار	التكرار × مركز الفئة
٦٠ – ٦٢	٦١	٥	٣٠٥
٦٣ – ٦٥	٦٤	١٨	١١٥٢
٦٦ – ٦٨	٦٧	٤٢	٢٨١٤
٦٩ – ٧١	٧٠	٢٧	١٨٩٠
٧٢ – ٧٤	٧٣	٨	٥٨٤
المجموع		١٠٠	٦٧٤٥

أ) ارسم المضلع التكراري للبيانات الموضحة في الجدول أعلاه .

ب) أوجد المتوسط الحسابي للأوزان السابقة .

الحــل :

أ) المضلع التكراري للبيانات السابقة يوضح في الشكل (٩ – ٥) .



شكل (٩ – ٥)

ب) المتوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع (حاصل ضرب التكرار × مركز الفئة)}}{\text{مجموع التكرارات}}$

$= \frac{٥٨٤+١٨٩٠+٢٨١٤+١١٥٢+٣٠٥}{}$

$= \frac{٦٧٤٥}{١٠٠} = ٦٧٫٤٥ \approx ٦٧$ كجم تقريباً

من المقاييس التي تفيد في تنظيم بيانات في فئات مقياس يسمى المدى ويعرف المدى بالعلاقة :

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

مثال (٣) احسب المدى للبيانات الآتية :

١١ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٢ ، ٣٥ ، ٤٠

الحل : لحساب المدى : نرتب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً كما يلي :

٢ ، ١١ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٤٠ (تصاعدياً)

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة = ٤٠ – ٢ = ٣٨ .

تعـريـف

تسمى المسافة الواقعة بين القيمتين الدنيا والعليا للفئة « طول الفئة » أو « مدى الفئة »

وعادة نحسب طول الفئة بطرح الحد الأدنى للفئة من الحد الأعلى لها وإضافة (١) إلى الناتج .

فعلى سبيل المثال : إذا كانت الفئة هي : (١٦ – ١٧) فإن :

طول الفئة = (١٧ – ١٦) + ١ = ١ + ١ = ٢

ملاحظة : طول الفئة المناسب يعتمد على عدد الفئات المطلوبة وكلما كان صغيراً فإن دقة المعلومات عن البيانات الأصلية تزداد .

ملاحظة : يفضل أن يكون عدد الفئات ما بين (٥) إلى (١٥) .

تعـريـف

عدد البيانات الواقعة ضمن كل فئة يسمى تكرار الفئة

مثال (٤)

الجدول التكراري هو جدول تكرار لدرجات (٣٠) طالباً .

الفئة	١٠ – ١٩	٢٠ – ٢٩	٣٠ – ٣٩	٤٠ – ٤٩	المجموع
التكرار	٥	٨	١٠	٧	٣٠ طالباً

أ) ما تكرار الفئة الأولى ؟ ب) ما مركز الفئة (٣٠ – ٣٩) ؟

جـ) ما طول الفئة (٢٠ – ٢٩) ؟

الحـل :

أ) الفئة الأولى هي (١٠ – ١٩) حدها الأدنى (١٠) وحدها الأعلى (١٩) وتكرار هذه الفئة يتضح من الجدول = ٥ أي انه توجد خمس ملاحظات (بيانات) ضمن هذه الفئة .

ب) مركز الفئة (٣٠ – ٣٩) = $\frac{٣٠ + ٣٩}{٢} = \frac{٦٩}{٢} =$ ٣٤٫٥ .

جـ) طول الفئة (٢٠ – ٢٩) = (٢٩ – ٢٠) + ١

= ٩ + ١ = ١٠

تمارين ومسائل

[١] الجدول التكراري التالي لأعمار (٢٤) طالباً بالسنوات :

الفئة	٤ – ٦	٧ – ٩	١٠ – ١٢	١٣ – ١٥	١٦ – ١٨	المجموع
التكرار	٢	٣	١٠	٥	٤	٢٤
مركز الفئة	٥				١٧	

أ) أكمل الجدول . ب) مثل البيانات السابقة بمدرج التكرار .

جـ) ارسم المضلع التكراري . ء) ما تكرار الفئة (١٣ – ١٥) ؟

هـ) ما طول الفئة (٧ – ٩) ؟

[٢] لديك البيانات التالية :

٢١ ، ٣٥ ، ٦٨ ، ٢٤ ، ٥٥ ، ١١ ، ٦٦

أ) احسب المدى .

ب) احسب المتوسط الحسابي .

(جـ) ما الفرق بين المدى والمتوسط ؟

[٣] البيانات التالية هي أوزان (٢٥) قطعة معدنية لاقرب جرام .

١١	١٦	٥	١٨	١٤
٧	١٣	٧	٩	٤
٦	١٠	١٧	١٠	١١
١٢	٨	١١	١٢	١٤
١٣	١٥	١٤	١٠	١١

أ) كون جدولاً تكرارياً يحتوي على خمس فئات الفئة الأولى (٤ – ٦) والفئة الاخيرة (١٦ – ١٨) .

ب) ما تكرار الفئة الثالثة ؟

جـ)ما طول الفئة التي حدها الأدنى ٧ وحدها الأعلى٩(الفئة الثانية) .

[٤] ما طول كل فئة في الجدول التالي :

الفئة	١٥ – ٢٣	٢٤ – ٣٢	٣٣ – ٤١	٤٢ – ٥٠	٥١ – ٥٩
التكرار	٣	٦	٧	٥	٤
مركز الفئة	١٩	٢٨	٣٧	٤٦	٥٥

٩ : ٤ تمارين عامة

[١] يمثل الجدول التكراري التالي اوزان (٢٢) طالباً لأقرب كيلوجرام :

الوزن (كجم)	٤٨	٤٩	٥٠	٥١	٥٢	٥٣	المجموع
التكرار	١	٢	٦	٨	٣	٢	٢٢ طالباً
التكرار × الوزن	٤٨	٩٨	٣٠٠	٤٠٨	١٥٦	١٠٦	١١١٦كجم

أ) ما أصغر وزن وما أكبر وزن وما تكرار كلٍّ منهما ؟

ب) ما تكرار الوزن ٥١ كجم ؟ جـ) ما مجموع التكرارات(الطلاب) ؟

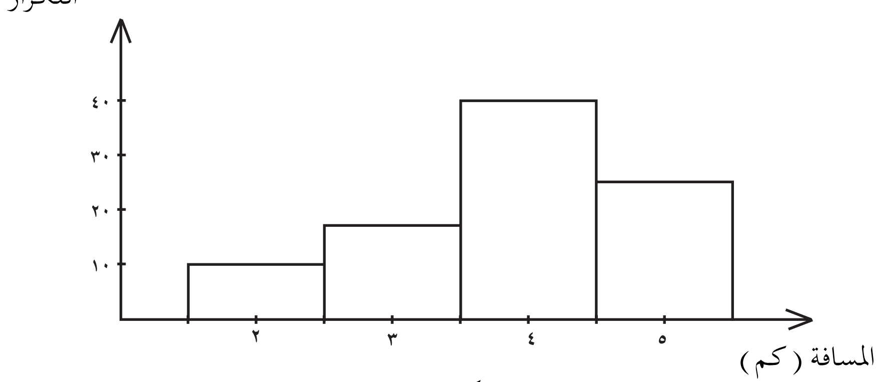
ء) ما المجموع الكلي للأوزان ؟ هـ) ما المتوسط الحسابي لأوزان الطلاب .

[٢] المدرج التكراري التالي يمثل أطوال رحلات سيارة أجرة في إِحدى المدن :

أ) ما أطول رحلة للسيارة وما التكرارات المناظرة ؟

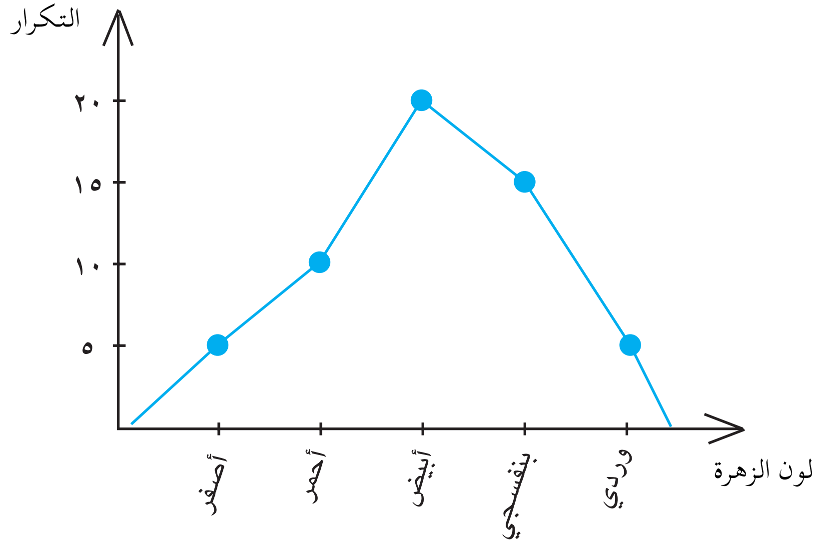
ب) ما تكرار أقصر رحلة قامت بها السيارة ؟

جـ) استخدم المدرج التكراري شكل (٩ – ٦) لبناء جدول تكراري لهذه البيانات .



شكل (٩ –٦)

[٣] مضلع التكرار التالي يمثل بيانات أخذت من حديقة للزهور :



شكل (٩ –٧)

أ) ما مجموع التكرارات (عدد الزهور التي تم مشاهدتها) ؟

ب) ما اللون الذي تكررت ملاحظته أكثر من غيره ؟

جـ) استخرج البيانات التي يمثلها مضلع التكرار لإنشاء جدول تكراري؟

[٤] البيانات الآتية تمثل عدد الضربات الركنية التي نفذها فريق كرة قدم في (٣٠) مباراة :

٢	٥	٧	٦	٣	١	٢	٥	٦	٧
٦	٥	٣	١	١	٢	٢	٧	٣	٤
٧	٧	٤	٤	١	٢	١	٤	٣	١

نظم هذه البيانات في جدول تكراري يحتوي : عدد الضربات الركنية، تكراراتها المناظرة ، التكرار النسبي لكل منها .

[٥] فيما يلي درجات طالب في الامتحان النهائي :

٧٨ ، ٧٠ ، ٨٥ ، ٩٢ ، ٦٨ ، ٨٣ ، ٨٧ ، ٧٧

أ) ما هو المدى ؟ ب) احسب المتوسط الحسابي ؟

[٦] لديك الجدول التكراري لبيانات عددية موزعة في فئات كما يلي :

الفئة	مركز الفئة	التكرار	مركز الفئة X التكرار
٤ – ١٢	٨	٦	٤٨
١٣ – ٢١	١٧	١٠	١٧٠
٢٢ – ٣٠	٢٦	٤	١٠٤
المجموع		٢٠	٣٢٢

أ) ما طول الفئة ؟ ب) ما تكرار الفئة (١٣ – ٢١) ؟

جـ) ما الحد الأعلى والحد الأدنى للفئة (٤ – ١٢) .

ء) احسب المتوسط الحسابي لهذه البيانات .

[٧] لديك الجدول التكراري التالي :

الفئة	مركز الفئة	التكرار
٥٩ – ٦١	٦٠	٥
٦٢ – ٦٤	٦٣	١٠
٦٥ – ٦٧	٦٦	٣٠
٦٨ – ٧٠	٦٩	١٥
٧١ – ٧٣	٧٢	٥

أ) ارسم المدرج التكراري . ب) ارسم مضلع التكرار .

جـ) احسب المتوسط الحسابي .

٩ : ٥ اختبار الوحدة

[١] درجات أحد الطلبة في الاختبارات الشهرية هي :

٥ ، ٨ ، ٢٠ ، ١٠ ، ١٥

أ) أوجد المدى لهذه الدرجات .

ب) احسب المتوسط الحسابي لهذه الدرجات .

[٢] فيما يلي اعداد المتفرجين (بالمئات) مباريات الدوري في ملاعب بعض محافظات الجمهورية خلال (١٨) مباراة :

١٧ ، ٢٣ ، ٢١ ، ٢٣ ، ٢٧ ، ١٥ ، ٥ ، ١٩ ، ١٧

١٢ ، ١٦ ، ٢٢ ، ٢٤ ، ٢٢ ، ٢٤ ، ١٨ ، ٢٢ ، ٩

لخص هذه البيانات عن طريق :

أ) إنشاء جدولاً تكرارياً (بدون فئات) .

ب) رسم مدرج تكراري .　　　جـ) رسم مضلع تكراري .

[٣] البيانات التالية هي أوزان (٢٠) قطعة معدنية لأقرب جم :

٥٥	٥٢	٤٠	٥٩	٣٥	٥١	٥٨	٦٠	٣٠	٥٥
٤٧	٥٧	٧٠	٧٢	٤٥	٤٦	٥٤	٧٣	٦٣	٤٣

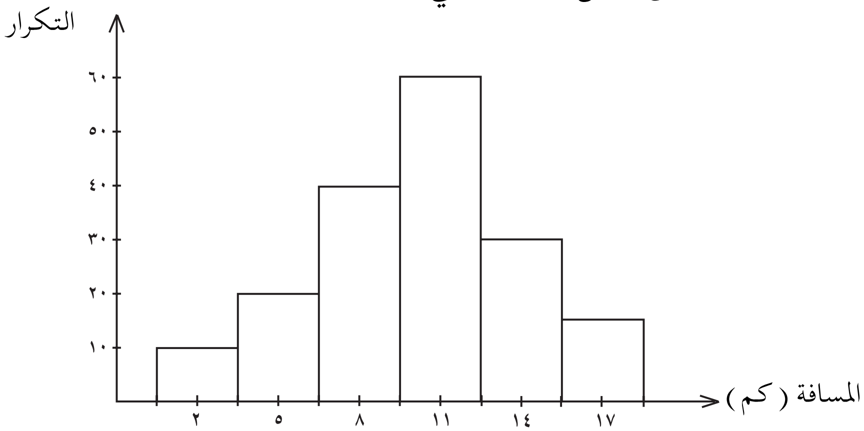
أ) كوّن جدولاً تكرارياً به اربع فئات بطول الفئة = ١١

(الفئة الأولى (٣٠–٤٠) .... وهكذا)

ب) ما الفئة الأكثر تكراراً ؟

جـ) ما مجموع التكرارات ؟

[٤] جدول التكرار التالي يبين المسافة وعدد مـــرات تكرارهـا في اليـــوم التي تحركها باص لنقل الركاب في العاصمة صنعاء .



شكل (٩ – ٨)

أ) ما مجموع التكرارات (الرحلات) ؟

ب) كوّن جدولاً تكرارياً بناء على مدرج التكرار

جـ) ارسم المضلع التكراري .

تم الكتاب بحمد الله