الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

8 أ

الرياضيات

للصف الثامن من مرحلة التعليم الأساسي

فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش

د. أمة الآله علي حمد الحوري
د. ردمان محمد سعيد
د. منصور علي صالح عطاء
أ. مريم عبدالجبار سلمان
د. محمد علي مرشد
أ. يحيى بكار مصفر
أ. عبدالباري طه حيدر
أ. عبده أحمد سيف
د. علي عبدالواحد

د. محمد عبدالرب محمد بشر
د. علي شاهر نعمان القرشي
د. محمد رشاد الكوري
د. عبدالله سلطان عبدالغني الصلاحي
أ. سالمين محمد باسلوم
أ. ذا النون سعيد طه
أ. مصطفى عبد الواحد العبسي
أ. جميلة إبراهيم احمد
أ. أحمد سالم باحويرث

الإخراج الفني

الصف الطباعي والتصميم / جلال سلطان علي إبراهيم.
إداخال تعديلات / علي عبدالله السلفي.

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني

١٤٣٥هـ / ٢٠١٤م

النشيد الوطني

رددي أيتهـا الدنيـا نشيـدي رددية وأعيـدي وأعيـدي
واذكري في فرحتي كل شهيد وامنحيه حللاً من ضوء عيدي

رددي أيتهـا الدنيـا نشيـدي
رددي أيتهـا الدنيـا نشيـدي

وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي أنت عهدٌ عالقٌ في كل ذمّة
رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُهُ من كل شمس أخْلُدِي خافِقَةً في كل قِمّة
أمتي .. أمتي .. إمنحيني البأس يا مصدر بأسي واذخُريني لك يا أكرم أمة

عشتُ إيماني وحبِّي أُمميًّا
ومسيري فوق دربي عربيا
وسيبقى نبضُ قلبي يمنيا
لن ترى الدنيا على أرضي وصيا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

د. عبدالله عبده الحامدي.	أ/ علي حسين الحيمي.
د/ صالح ناصر الصوفي.	د/ أحمد علي المعمري.
أ. د/ محمد عبدالله الصوفي.	أ. د/ صالح عوض عرم.
أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.	د/ إبراهيم محمد الحوثي.
د/ عبدالله علي أبو حورية.	د/ شكيب محمد باجرش.
د/ عبدالله لملس.	أ. د/ داوود عبدالملك الحدابي.
أ/ منصور علي مقبل.	أ/ محمد هادي طواف.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.	أ. د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
أ. د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.	أ/ محمد عبدالله زبارة.
أ. د/ محمد حاتم المخلافي.	أ/ عبدالله علي إسماعيل.

د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

قررت اللجنة العليا للمناهج طباعة هذا الكتاب .

بسم الله الرحمن الرحيم

تقــديــم :

في إطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية.

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات.

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها: الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبمايتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي.

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها.

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدروسة لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية.

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول
وزير التربية والتعليم
رئيس اللجنة العليا للمناهج

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمــة

الحمد لله رب العالمين،والصلاة والسلام على خاتم النبيين ، وآله وصحبه أجمعين .

لقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المناهج التعليمية لمرحلة التعليم الأساسي وفق أسس علمية وتربوية . وبعد كتاب الصف السابع يأتي كتاب الصف الثامن لمواكبة هذا التطوير .

وفي هذا الكتاب يجد أبناؤنا الطلبه مادة الرياضيات معروضة لهم باساليب وقوالب جديدة تساعدهم على سرعة الفهم والاستيعاب ، وتسهل لهم التعامل مع الماد ة وتحفزهم على حبها ، كما تنمي فيهم القدرات التفكيرية وتوسع ثقافتهم العلمية .

إن الكتاب غني بالشرح والأمثلة إلى جانب الأنشطة والتدريبات لكل درس، والتمارين العامة لكل وحدة دراسية ، ولذا على أبنائنا الطلبة بذل أقصى جهودهم والاستفادة من توجيهات المدرسين ، والدراسة المتمعنة للمادة المقدمة وتتبعها بدقة وحل أكبر قد ر من التمارين والمسائل ، وهذا من شأنه ترسيخ المعرفة الرياضية في أذهانهم وإكسابهم المهارات الكافية للأستمرار في التعلم .

وفي هذا الكتاب نقد م لأبنائنا الطلبة مادة الرياضيات بأسلوب واضح سهل يتناسب ومستويات الطلبة وقدراتهم وبدقة علمية مع مراعاة جوانبها التربوية، ولذا تضمنت وحدا ت الكتاب تعاريف رياضية دقيقة ولكنها مبسطة ، واحتوت على برهنة رياضية ولكنها متدرجة . وترابطت المواضيع في بناء منطقي متسلسل يساعد أبنائنا على التقد م الراسخ في تعلم المادة كما تم تقديم المادة بلغة مبسطة شيقة ومدعومة بالأشكال والتوضيحات الكافية ترغيباً لهم في المادة ، وعلى طريق تحقيق الطموح العلمي المنشود .

والله وراء القصد وهو ولي التوفيق ،،،

المؤلفــون

المحتويات

الموضوع		الصفحة

تابع المحتويات

الموضوع		الصفحة
الوحدة الثالثة : المقادير الجبرية		
٣–١	مراجعة	٧٧
٣–٢	ضرب مقدار جبري في حد جبري	٨٠
٣–٣	قسمة مقدار جبري على حد جبري	٨٤
٣–٤	ضرب المقادير الجبرية	٨٩
٣–٥	قسمة المقادير الجبرية	٩٣
٣–٦	التحليل باستخراج العامل المشترك الأكبر	٩٨
٣–٧	تحليل الفرق بين مربعين	١٠٣
٣–٨	تمارين ومسائل عامة	١٠٧
٣–٩	اختبار الوحدة	١٠٩
الوحدة الرابعة : المعادلات والمتراجحات		
٤–١	معادلة الدرجة الأولى في متغير واحد	١١١
٤–٢	متراجحة الدرجة الأولى في متغير واحد	١١٦
٤–٣	معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد	١٢٢
٤–٤	مسائل تطبيقية	١٢٦
٤–٥	تمارين ومسائل عامة	١٣٢
٤–٦	اختبار الوحدة	١٣٦
الوحدة الخامسة: الهندسة التحليلية والتحويلات الهندسية		
٥–١	البعد بين نقطتين على مستقيم يوازي أحد المحورين	١٣٧
٥–٢	إحداثي منتصف قطعة مستقيمة على مستقيم يوازي أحد المحورين	١٤٤
٥–٣	الإنسحاب	١٤٩
٥–٤	تمارين ومسائل عامة	١٥٨
٥–٥	اختبار الوحدة	١٦٠

الوحــــدة الأولــــى

المجموعات والعلاقات

١ : ١ مراجعــــــة

المجموعة هي تجمّع من الأشياء المحدّدة تحديداً تاماً، وتسمى هذه الأشياء عناصر المجموعة ونكتبها بطريقتين :

١) طريقة السرد : وهي كتابة جميع عناصر المجموعة بين الحاصرتين { } مع وضع فاصلة (،) بين كل عنصر وآخر ، على أن نراعي عدم تكرار العنصر نفسه ، كما لا يشترط ترتيب كتابة العناصر.

٢) طريقة ذكر الصفة المميزة : وفي هذه الطريقة لا تكتب العناصر بل تُكتب الصفة المميزة التي تميز عناصر هذه المجموعة .

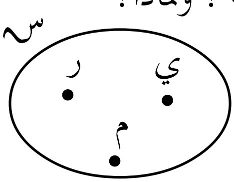
وهناك مجموعات منتهية ومجموعات غير منتهية ، كما أن المجموعات قد تتساوى .

مثال (١) إذا كانت س هي مجموعة حروف كلمة « يريم » .

أ) فاكتبها بطريقة السرد، ثم مثّلها بأشكال ڤــن.

ب) هل هذه المجموعة منتهية أو غير منتهية ؟ ولماذا؟

الحــل : أ) س = { ي ، ر ، م } ،



شكل (١ – ١)

والشكل (١ – ١) يوضح تمثيلها .

ب) هذه المجموعة منتهية ، لأنه يمكن حصر عناصر ها وهي (٣) .

مثال (٢) لتكن سہ = { ٤ ، ٥ } ،

ا) اكتب المجموعة سہ بطريقة ذكر الصفة المميزة .

ب) هل مجموعة أرقام العدد ٤٤٥ تساوي المجموعة سہ ؟ ولماذا؟

الحــل : ا) سہ هي مجموعة أرقام العدد ٥٤ .

هل توجد إجابات أخرى ؟ أذكرها .

ب) مجموعة أرقام العدد ٤٤٥ هي { ٤ ، ٥ } ،

وتساوي المجموعة سہ لأن كل عنصر في سہ ينتمي إلى هذه المجموعة،

كما أنّ كل عنصر فيها ينتمي إلى سہ .

تماريــن ومسائــل

[١] ضع أحد الرمزين $\in$ ، $\notin$ في $\boxed{}$ لتصبح كل من العبارات التالية صحيحة :

ا) ٧ $\boxed{}$ { ١٧ ، ٢٧ ، ٣٧ }، ب) ا $\boxed{}$ { ا ، ب ، جـ }،

جـ) ٢٣ $\boxed{}$ { ٣ ، ٢ ، ١ } ، ء) ٤٤ $\boxed{}$ { ٤ } ،

هـ) م $\boxed{}$ مجموعة حروف كلمة « ذمار » .

[٢] اكتب كلاً من المجموعات التالية بطريقة السرد :

سہ هي مجموعة أرقام العدد ٧٠٠ .

صہ هي مجموعة حروف كلمة « بابل » .

ع هي مجموعة الأعداد الصحيحة الأكبر من ٤ والأصغر من ١١ .

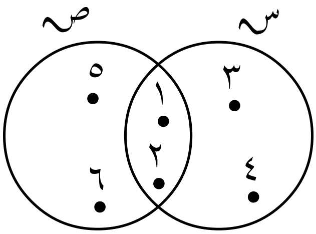
[٣] اكتب كلاً من المجموعات التالية بطريقة الصفة المميزة :

صہ = { ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ... } ، ع = { ١٥ ، ١٧ ، ١٩ }،

سہ = { ا ، ل ، ي ، م ، ن } .

[٤] مــــن الشكــــل (١ – ٢):

اكتب عناصر كل من سـ، صـ.



شكل (١ – ٢)

[٥] أي المجموعات الآتية مجموعة خالية:

سـ هي مجموعة طلبة فصلك الذين تقل أعمارهم عن ٥ سنوات .

صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة من (–١٢) إلى (–٢٤) .

ع هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين ٥ ، ٦ .

[٦] بيّن أي المجموعات الآتية منتهية وأيها غير منتهية :

أ) مجموعة عوامل العدد ٢٢ .

ب) مجموعة الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على ٦ .

جـ) مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من ٨.

د) مجموعة الأطفال في الوطن العربي.

[٧] أوجد قيمة س لكي تصبح المساواة في كل مما يأتي صحيحة:

أ) {٤} = {س} ، ب) {٨ ، س} = {٨ ، ١٠}

جـ) {١٩ ، ٢٠ ، س} = {١١ ، ٢٠ ، ١٩}.

[٨] لتكن سـ هي مجموعة عوامل العدد ٦ ،

صـ هي مجموعة أرقام العدد ٣١٢ ، ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٦} .

ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (X) أمام العبارة الخاطئة فيما يلي مع ذكر السبب:

أ) سـ = صـ ☐ ب) سـ = ع ☐

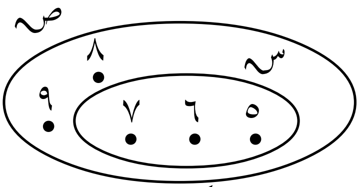
جـ) صـ ≠ ع ☐

١ : ٢ المجموعات الجزئية

لتكن لدينا س = { ٥ ، ٦ ، ٧ } ، ص = { ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }،

هل كل عنصر في س ينتمي إلى ص ؟

هل كل عنصر في ص ينتمي إلى س ؟



شكل (١ – ٣)

تلاحظ أن س $\subset$ ص .

ولكن ص ليست مجموعة جزئية من المجموعة س ،

لأن ٨ $\in$ ص ، ٨ $\notin$ س . ونكتب ذلك رمزياً ص $\not\subset$ س .

تدريب

إذا كانت ل = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } ، ك = { ٢ ، ٨ } ،

هل ك $\subset$ ل أم ك $\not\subset$ ل ؟ ولماذا؟

لتكن س هي مجموعة طلبة فصلك ،

ص هي مجموعة طلبة فصلك الذين لديهم أدوات هندسية .

$\therefore$ ص $\subset$ س . لماذا ؟

وإذا كان كل طلبة فصلك لديهم أدوات هندسية فإن ص = س ،

$\therefore$ المجموعة س هي مجموعةجزئية من نفسها .

$\therefore$ س $\subset$ س . ومما سبق نستنتج أن :

كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها

وإذا كان جميع طلبة فصلك ليس لديهم أدوات هندسية فإن المجموعة ص مجموعة خالية ، أي أن ص = $\emptyset$ ، وبما أن ص $\subset$ س ، فإن $\emptyset \subset$ س

ومما سبق نستنتج أن :

المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من أي مجموعة

مثال (١) اكتب جميع المجموعات الجزئية للمجموعة {١ ، ٢} .

الحـــل : المجموعات الجزئية للمجموعة {١ ، ٢} ، هي : المجموعة الخالية $\varnothing$ ، المجموعات ذات عنصر واحد : {١} ، {٢} ،
المجموعات ذات عنصرين : {١ ، ٢} .
إذن المجموعات الجزئية للمجموعة {١ ، ٢} ، هي : $\varnothing$ ، {١} ، {٢} ، {١ ، ٢} .

مثال (٢) اكتب جميع المجموعات الجزئية للمجموعة {أ ، ب ، جـ}

الحـــل : نتبع الخطوات السابقة نفسها:

المجموعة الخالية : $\varnothing$.

المجموعات ذات عنصر واحد : {أ} ، {ب} ، {جـ} .

المجموعات ذات عنصرين: {أ ، ب} ، {أ ، جـ} ، {ب، جـ} .

المجموعات ذات ثلاثة عناصر: {أ ، ب ، جـ} .

∴ المجموعات الجزئية للمجموعة {أ ، ب، جـ} هي:
$\varnothing$ ، {أ} ، {ب} ، {جـ} {أ ، ب}،{أ ، جـ}،{ب، جـ} ، {أ ، ب ، جـ} .

من الأمثلة السابقة تلاحظ أن :

المجموعة{١ ، ٢}عدد عناصرها (٢) وعدد المجموعات الجزئية لها٤ =٢^{٢}

والمجموعة { أ ، ب ، جـ } عدد عناصرها (٣) وعدد المجموعات الجزئية لها ٨ = $٢^{٣}$.

وبمقارنة عدد المجموعات الجزئية للمجموعتين تلاحظ أن الأساس ثابت وهو (٢) بينما الأس يدل على عدد عناصر المجموعة.

وبشكل عام :

لأي مجموعة عدد عناصرها (د) فإن عدد المجموعات الجزئية لها = $٢^{د}$.

مثال (٣) كم عدد المجموعات الجزئية لكل من:

أ) مجموعة ذات ثلاثة عناصر ، ب) مجموعة ذات ستة عناصر.

الحـــل : أ) بما أن عدد عناصر المجموعة = ٣ ،

∴ عدد المجموعات الجزئية لهذه المجموعة = $٢^{٣}$ = ٨ مجموعات جزئية.

ب) بما أن عدد عناصر المجموعة = ٦ ،

∴ عدد المجموعات الجزئية لهذه المجموعة = $٢^{٦}$ = ٦٤ مجموعة جزئية.

تماريـن ومسائـل

[١] إذا كانت س = { ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ } ، ص = { ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ } ، ع = { ٢٠ ، ٤٠ } ، ضع $\supset$ أو $\not\supset$ في $\boxed{}$ لتصبح العبارة صحيحة فيما يلي:

أ) ع $\boxed{}$ ص ، ب) س $\boxed{}$ ص ، جـ) س $\boxed{}$ س ،

ء) ص $\boxed{}$ س ، هـ) $\emptyset$ $\boxed{}$ س ، و) س $\boxed{}$ ع .

[٢] إذا كانت سـ={١ ، ٢ ، ٣ ، ٤، ٧}، صـ={٤ ، ٧} ، ع={٤ ، ٥ ، ٧}،
فضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة الخاطئة
فيما يلي ، مع ذكر السبب :

أ) صـ ⊂ سـ □ ، ب) سـ ⊂ سـ □، جـ) صـ ⊂ ع □ ،
ء) ع ⊄ سـ □ ، هـ) ∅ ⊂ سـ □، و) ∅ ⊄ ع □.

[٣] كم عدد المجموعات الجزئية لكل من:

أ) مجموعة ذات أربعة عناصر. ب) مجموعة ذات سبعة عناصر .
جـ) مجموعة ذات خمسة عناصر .

[٤] اكتب جميع المجموعات الجزئية لكل من المجموعات التالية:

أ) {٢ ، ٥}، ب) {٤ ، ٥ ، ٦} ، جـ) {٤٠} .

[٥] إذا كانت سـ هي مجموعة حروف كلمة « اليمن » ،
صـ هي مجموعة حروف كلمة « أيمن » ،
ع هي مجموعة حروف كلمة « يلملم » .
فضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (X) أمام العبارة الخاطئة في كل مما يلي:

أ) صـ ⊂ سـ □، ب) ع ⊂ ع □ ، جـ) سـ ⊂ ع □،
ء) ∅ ⊂ سـ □، هـ) {ي ، ن ، ل} ⊂ ع □، و) سـ ⊄ صـ □.

[٦] إذا كانت سـ = {أ ، ب، جـ ، ء} .

أ) كم عدد المجموعات الجزئية للمجموعة سـ ؟
ب)اكتب ثمان مجموعات جزئية فقط لهذه المجموعة على أن تكون ∅ منها .

[٧] إذا كانت سـ = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧}، بيّن مع ذكر السبب أي المجموعات الآتية جزئية من سـ :

أ) ص = {١ ، ٧}، ب) ع = {٣ ، ٤ ، ٥} ، جـ) ل = {١٥٣٧}،

ء) ك = ∅ ، هـ) م هي مجموعة الأعداد الفردية الأصغر من ٨ .

[٨] أوجد قيمة س لتصبح كل من العبارات التالية صحيحة :

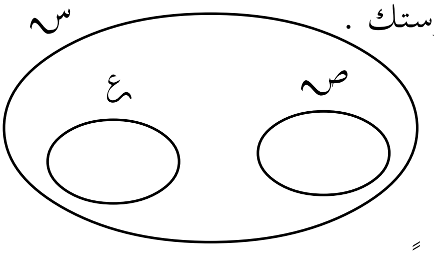
أ) {٤ ، س} ⊃ {٤ ، ٥} ، ب) {١٥} ⊃ {س ، ٤} ،

جـ) {س ، ٩ ، ٨} ⊃ {١١ ، ١٠ ، ٨ ، ٩} .

١ : ٣ المجموعة الشاملة

تأمل المجموعات التالية :

س هي مجموعة طلبة مدرستك، ص هي مجموعة طلبة الصف السابع بمدرستك، ع هي مجموعة طلبة الصف الثامن بمدرستك .



شكل (١ – ٤)

لإيجاد مجموعة تشمل المجموعات الثلاث، تلاحظ أن :

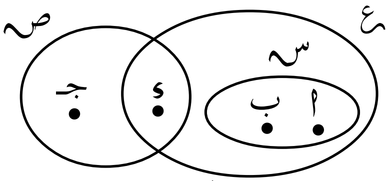
ص ⊃ س، ع ⊃ س، س ⊃ س

أي أن : س تحوي المجموعات الثلاث معاً كما هو موضح في الشكل (١ – ٤) .

وبما أن س تشمل هذه المجموعات فتسمى مجموعة « شاملة »

أما إذا كان لدينا المجموعات التالية : س = {أ ، ب}، ص = {جـ ، ء}، ع = {أ ، ء ، ب} ، تلاحظ أن : س ⊃ ع ، ص ⊅ ع ،

انظر الشكل (١ – ٥) .



شكل (١ – ٥)

أي لاتوجد مجموعة من المجموعات الثلاث تحوي كل من س، ص، ع . فهل يمكن إيجاد مجموعة شاملة شَ للمجموعات الثلاث؟

نكوّن المجموعة {أ ،ب ،جـ ، ء} والتي تحوي كل من المجموعات الثلاث ، فنعتبرها مجموعة شاملة ويمكن أن نكوّن مجموعات أخرى تحوي المجموعات الثلاث نعتبرها أيضاً شاملة مثل :{ أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ} ، { أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ، و} .... الخ . ومما سبق يمكن القول أن :

المجموعة الشاملة لمجموعات معطاة هي المجموعة التي تحوي كل هذه المجموعات ويرمز لها بالرمز شَ .

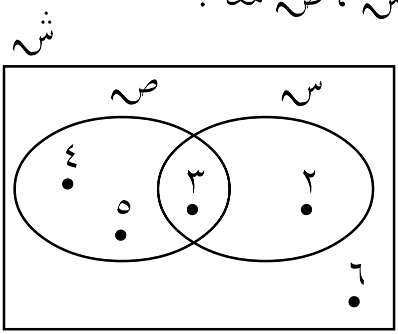
مثال اكتب مجموعة شاملة للمجموعتين :

س = { ٢ ، ٣ } ، ص= { ٣ ، ٤ ، ٥ }،مثل هذه المجموعات بأشكال ڤن .

الحـــل : نبحث عن مجموعة تحوي س ، ص معاً .

شَ= { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ،

وعند الرسم تُمثّل المجموعة الشاملة بمستطيل،وتُمثّل المجموعات الجزئية منها بمنحنيات مغلقة بسيطة داخل هذا المستطيل كما هو موضح في الشكل (١–٦) .



شكل (١ – ٦)

تماريـن ومسائـل

[١] أي المجموعات التالية مجموعة شاملة للمجموعات الثلاث التالية :

ل = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ } ، م = {٨ ، ١٢} ،

ن = { ٤ ، ٨ ، ١٢ } .

مثّل هذه المجموعات بأشكال ڤـن .

[٢] اكتب مجموعة شاملة لكل مما يأتي :

أ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } ، **ب** = { النحاس ، الفضة ، الذهب } .

[٣] كوّن مجموعة شاملة للمجموعات التالية :

س = { م ، ن } ، ص = { ٢ ، ٤ ، ٨ } ، ع = { م ، ن ، ٨ } ،

ثم مثّل س ، ص ، ع ، ش بأشكال فن.

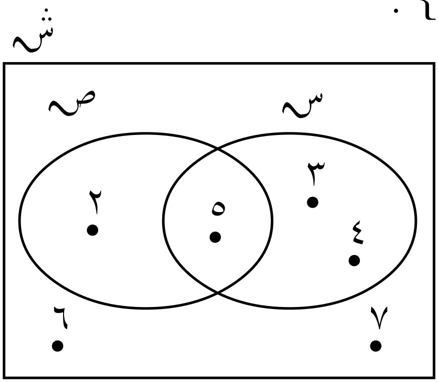
[٤] كوّن مجموعة شاملة للمجموعات التالية :

س = { م ، ن } ، ص = { ٢ ، ٤ ، ٨ } ، ع = { م ، ن ، ٨ } .

[٥] كوّن مجموعة شاملة للمجموعات التالية :

س = { اليمن ، السعودية } ، ص = { لبنان ، المغرب ، الكويت } .

ع = { الامارات ، قطر ، سوريا } .



شكل (١ – ٧)

[٦] من الشكل (١ – ٧) :

اكتب بطريقة السرد المجموعات :

س ، ص ، ش .

[٧] اذكر ثلاث مجموعات يمكن أن تكون شاملة للمجموعة :

{ ١٢ ، ١٤ ، ١٦ } .

١ : ٤ خواص عمليتي التقاطع والاتحاد

سبق أن تعلمت في الصف السابع تقاطع واتحاد مجموعتين وعرفت أن :

تقاطع مجموعتين س ، ص هي مجموعة جميع العناصر التي تنتمي إلى كل من س ، ص في ان واحد ونرمز لها بالرمز « س ∩ ص » .

إتحاد مجموعتين س ، ص هي مجموعة جميع العناصر التي تنتمي إلى س أو ص ، ونرمز لها بالرمز « س ∪ ص » .

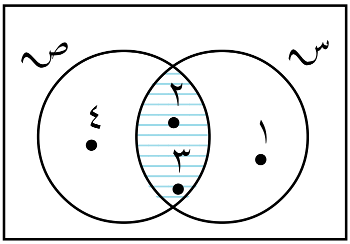
مثـــال لتكن س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ } .

أوجد س ∩ ص ، س ∪ ص ، ومثلهما بأشكال ڤن .

الحـــل :

س ∩ ص = { ١ ، ٢ ، ٣ } ∩ { ٢ ، ٣ ، ٤ } .

= { ٢ ، ٣ } انظر الشكل (١ – ٨)

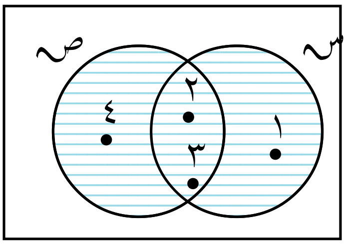


شكل (١ – ٨)

س ∪ ص = { ١ ، ٢ ، ٣ } ∪ { ٢ ، ٣ ، ٤ }

= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

انظر الشكل (١ – ٩) .



شكل (١ – ٩)

وسنقوم الآن بدراسة خواص هذه العمليات .

أولاً : الخاصية الإبدالية :

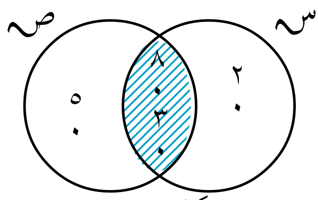
تدريب (١) لتكن س = { ٢ ، ٣ ، ٨ } ، ص = { ٣ ، ٥ ، ٨ } .

أ) أوجد س ∩ ص ، ص ∩ س ، قارن إجابتك . ماذا تلاحظ ؟

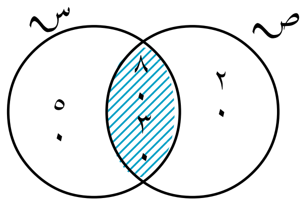
ب) أوجد س ∪ ص ، ص ∪ س ، قارن إجابتك . ماذا تلاحظ ؟

تلاحظ أن : س ∩ ص = ص ∩ س ، [انظر شكل (١ – ١٠)]

وكذلك س ∪ ص = ص ∪ س ، [انظر شكل (١ – ١١)]

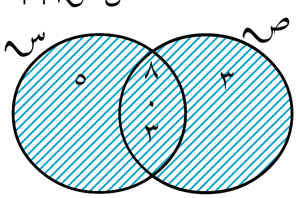


شكل (١ – ١٠)



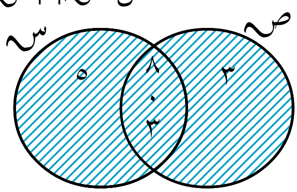
شكل (١ – ١١)

المنطقة المظللة تمثّل س ∩ ص



المنطقة المظللة تمثّل س ∪ص

المنطقة المظللة تمثّل ص ∩ س



المنطقة المظللة تمثّل ص ∪ س

إذن : عمليتي التقاطع والاتحاد إبداليتين . ونعبّر عن ذلك رمزياً كالتالي :

> **لأي مجموعتين س ، ص ، فإن :**
>
> **س ∩ ص = ص ∩ س ، س ∪ ص = ص ∪ س .**

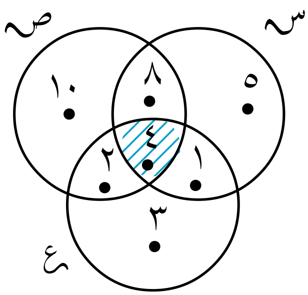
ثانيا : الخاصية التجميعية :

تأمل الأمثلة التالية :

إذا كانت س = { ١ ، ٤ ، ٥ ، ٨ } ، ص = { ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٠ } ،

ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، فأوجد :

أ) (س ∩ ص) ∩ ع ، ب) س ∩ (ص ∩ ع) .



شكل (١ – ١٢)

قارن الإجابتين ماذا تلاحظ ؟

أ) نوجد أولاً : س ∩ ص = { ٤ ، ٨ }

ثم نوجد : (س ∩ ص) ∩ ع

= { ٤ ، ٨ } ∩ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } = { ٤ } .

ب) نوجد أولاً : ص ∩ ع = { ٢ ، ٤ }

ثم نوجد : س ∩ (ص ∩ ع) = { ١ ، ٤ ، ٥ ، ٨ } ∩ { ٢ ، ٤ }

= { ٤ } .

بمقارنة الإجابتين ، تلاحظ أن : (س ∩ ص) ∩ ع = س ∩ (ص ∩ ع)

إذن عملية التقاطع عملية تجميعية ، ونعبر عن ذلك رمزياً كالتالي :

لأي ثلاث مجموعات س ، ص ، ع ، فإن :

(س ∩ ص) ∩ ع = س ∩ (ص ∩ ع) .

تأمل الأمثلة التالية :

إذا كانت س = { ١ ، ٤ ، ٥ ، ٨ } ، ص = { ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٠ } ، ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، فأوجد :

أ) (س ∪ ص) ∪ ع ، ب) س ∪ (ص ∪ ع) ،

قارن الإجابتين ماذا تلاحظ ؟

أ) نوجد أولاً : س ∪ ص = { ١ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ، ٢ ، ١٠ } ،

ثم نوجد (س ∪ ص) ∪ ع

= { ١ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ، ٢ ، ١٠ } ∪ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

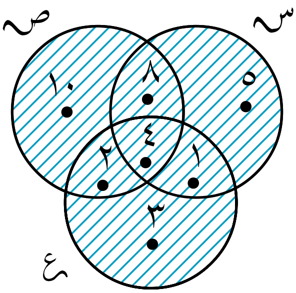
= { ١ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ، ٢ ، ١٠ ، ٣ } .

ب) نوجد أولاً : ص ∪ ع = { ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٠ ، ١ ، ٣ } ،

ثم نوجد س ∪ (ص ∪ ع)

= {١ ، ٤ ، ٥ ، ٨} ∪ {٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٠ ، ١ ، ٣}

= {١ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ، ٢ ، ١٠ ، ٣} .



شكل (١ – ١٣)

وبمقارنة الإجابتين تلاحظ أن :

(س ∪ ص) ∪ ع = س ∪ (ص ∪ ع) ،

إذن عملية الاتحاد عملية تجميعية ، ونكتب ذلك رمزياً كالتالي :

لأي ثلاث مجموعات س ، ص ، ع ، فإن :

(س ∪ ص) ∪ ع = س ∪ (ص ∪ ع)

ثالثاً : الخاصية التوزيعية :

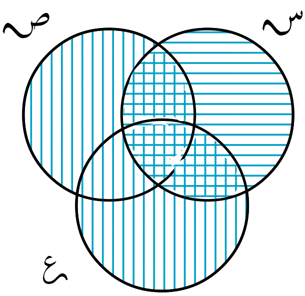
تدريب (٢) إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ،
ص = {٣ ، ٤ ، ٧ ، ٩} ، ع = {٤ ، ٥ ، ٧} .

أ) أوجد : س ∩ (ص ∪ ع) ، (س ∩ ص) ∪ (س ∩ ع)
قارن إجابتك .. ماذا تلاحظ ؟

ب) أوجد : س ∪ (ص ∩ ع) ، (س ∪ ص) ∩ (س ∪ ع)
قارن إجابتك .. ماذا تلاحظ ؟

أ) ستلاحظ أن : س ∩ (ص ∪ ع) = (س ∩ ص) ∪ (س ∩ ع) ،
انظر الشكلين (١ – ١٤) ، (١ – ١٥) .

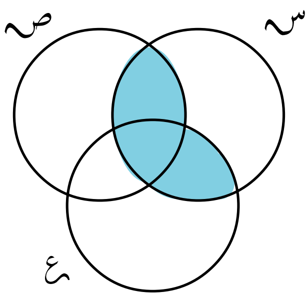
ب) ستلاحظ أن : س ∪ (ص ∩ ع) = (س ∪ ص) ∩ (س ∪ ع)
انظر الشكلين (١ – ١٦) ، (١ – ١٧) .



شكل (١ – ١٤)

المنطقة المظللة أفقياً ورأسياًتمثل

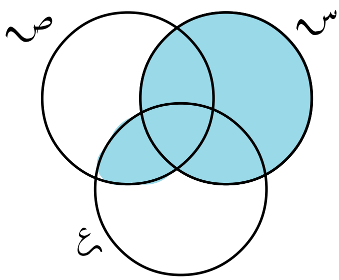
س ∩ (ص ∪ ع)



شكل (١ – ١٥)

المنطقة المظللة تمثل

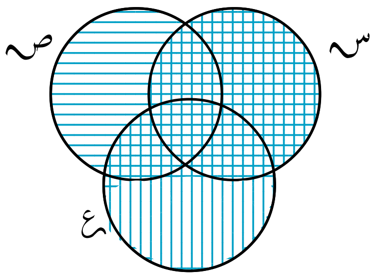
(س ∩ ص) ∪ (س ∩ ع)



شكل (١ – ١٦)

المنطقة المظللة تمثل

س ∪ (ص ∩ ع)



شكل (١ – ١٧)

المنطقة المظللة أفقياً ورأسياً تمثل

(س ∪ ص) ∩ (س ∪ ع)

إذن عمليتا الاتحاد والتقاطع توزيعيتان على بعضهما البعض .

لأي ثلاث مجموعات س، ص، ع ، فإن :

س ∩ (ص ∪ ع) = (س ∩ ص) ∪ (س ∩ ع)

س ∪ (ص ∩ ع) = (س ∪ ص) ∩ (س ∪ ع) .

تمارين ومسائل

[١] إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {١ ، ٤ ، ٥} ،
ع = {٢ ، ٤ ، ٧} . تحقق من صحة ما يلي:

أ) س ∩ ص = ص ∩ س ، ب) س ∪ ص = ص ∪ س ،

جـ) (س ∩ ص) ∩ ع = س ∩ (ص ∩ ع) ،

د) (س ∪ ص) ∪ ع = س ∪ (ص ∪ ع) ،

هـ) س ∩ (ص ∪ ع) = (س ∩ ص) ∪ (س ∩ ع) ،

و) س ∪ (ص ∩ ع) = (س ∪ ص) ∩ (س ∪ ع) .

[٢] إذا كانت س = {أ ، ب ، جـ ، د} ، ص = {أ ، جـ ، هـ} ،
ع = {جـ ، د ، و} ، أوجد ما يلي :

أ) س ∩ ص ، ب) س ∪ ع .

جـ) (س ∩ ص) ∩ ع ، د) س ∪ (ص ∪ ع)

هـ) س ∩ (ص ∪ ع) ، و) س ∪ (ص ∩ ع) .

[٣] إذا كانت **أ** = {١ ، ٢ ، ٣} ، **ب** = {٣ ، ٦ ، ٧} ،
جـ = {٢ ، ٧ ، ٨} .

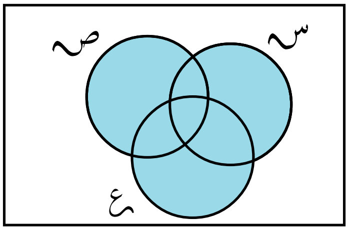
أ) أوجد **أ** ∩ **ب** ، **ب** ∪ **جـ** . ب) مثّل **أ** ∩ (**ب** ∪ **جـ**) بأشكال فِن .

[٤] إذا كانت س هي مجموعة أرقام العدد ٥٤٣٣ ، ص هي مجموعة عوامل العدد ١٢ ، ع هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من ٦ ،

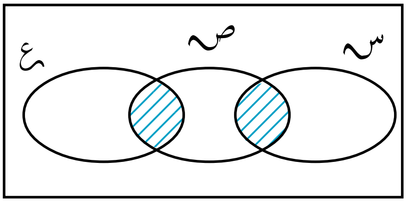
أ) اكتب بطريقة السرد كلاً من س ، ص ، ع ،

ب) أوجد : س ∪ (ص ∩ ع) .

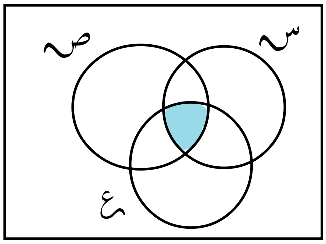
[٥] اكتب ما تمثله المنطقة المظللة في كل شكل من الأشكال التالية :



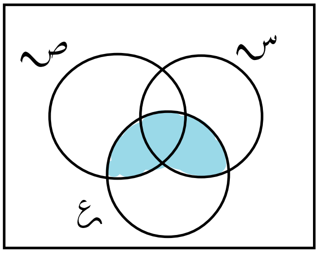
شكل (١ –١٨أ)



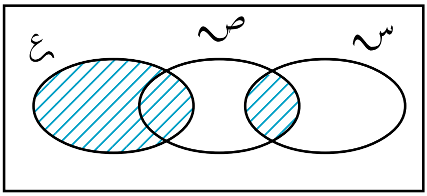
شكل (١ –١٨ب)



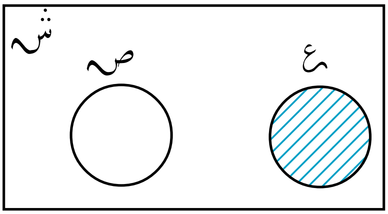
شكل (١ –١٨ جـ)



شكل (١ – ١٨ ء)



شكل (١ –١٨هـ)



شكل (١ – ١٨ و)

[٦] إذا علمت أن: س ∪ ص = {ب ، جـ ، ء}، س ∪ ع = { جـ ، ء ، هـ ، و }،

فأوجد : س ∪ (ص ∩ ع) (استخدم خاصية التوزيع) .

[٧] إذا علمت أن : أ ∩ ب = { ٢ ، ٤ ، ٧ } ، أ ∩ جـ = { ٤ ، ٦ ، ١٠ }،

أوجد : أ ∩ (ب ∪ جـ) . (استخدم خاصية التوزيع) .

١ : ٥ العـــلاقـــــات

تعلمت في الصف السابع أن حاصل ضرب مجموعة سـ في نفسها هو مجموعة كل الأزواج المرتبة ، التي مسقطها الأول من سـ ومسقطها الثاني من سـ أيضاً.

مثلاً : إذا كانت سـ = { ا ، ب ، جـ } ،

فإن سـ × سـ = { (ا ، ا)، (ب ، ب) ، (جـ ، جـ) ، (ا ، ب) ، (ب ، ا) ، (ا ، جـ) ، (جـ ، ا) ، (جـ ، ب) ، (ب ، جـ) }.

كما تعلمت أيضاً أن العلاقة ع من مجموعة سـ إلى نفسها هي مجموعة جزئية من سـ × سـ أي أن ع ⊂ سـ × سـ .

تدريب (١) إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، فأوجد :

ا) سـ × سـ ، ب) ع علاقة « أصغر من » على المجموعة سـ .

جـ) ارسم المخطط السهمي لهذه العلاقة .

وفي هذا الدرس سنقوم بدراسة بعض أنواع العلاقات على مجموعة.

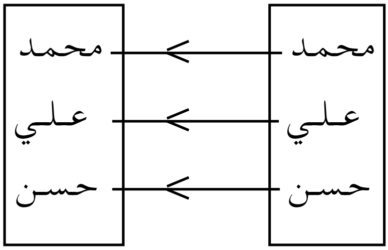
أولاً– العلاقة الانعكاسية على مجموعة :

في كشف طلاب الصف الثامن لاحظ المدرس وجود مجموعة من الطلاب أسماؤهم كالتالي : { محمد محمد ، علي علي ، حسن حسن } .

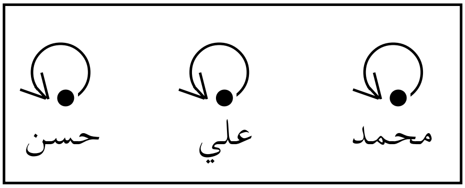
فإذا تأملت هذه المجموعة تجد أن كل طالب ووالده لهما الاسم نفسه، فإذا كتبنا هذه العلاقة بصورة أزواج مرتبة ، فسيكون المسقط الأول اسم الطالب والمسقط الثاني اسم والده ، فتكون هذه العلاقة كالتالي :

{ (محمد ، محمد) ، (علي، علي) ، (حسن ، حسن) } .

وعند تمثيل هذه العلاقة بمخطط سهمي ، نرسم سهماً يربط محمد بنفسه، وسهماً يربط علي بنفسه ، وسهماً يربط حسن بنفسه كما هو موضح في الشكلين (١–١٩أ ، ب) :



شكل (١ –١٩أ)



شكل (١ –١٩ ب)

تلاحظ أن كل عنصر في هذه المجموعة على علاقة مع نفسه نسمي مثل هذه العلاقة علاقة إنعكاسية .

العلاقة الانعكاسية ع على المجموعة س هي علاقة تربط كل عنصر بنفسه أي أن لكل أ ∈ س ، فإن (أ ، أ) ∈ ع .

مثال (١) لتكن ص = { ٢ ، ٤ ، ٨ } .

أوجد علاقة ع على ص حيث ع « أكبر من أو يساوي » هل ع انعكاسية ؟ ولماذا ؟

الحـل :

ع = {(٢ ، ٢)، (٤ ، ٤)، (٨ ، ٨)، (٤ ، ٢)، (٨ ، ٤)، (٨ ، ٢)}،

تلاحظ أن **كل** عنصر من عناصر ص يرتبط بنفسه بالعلاقة ع أي أن :

٢ ∈ ص ، (٢ ، ٢) ∈ ع .

٤ $\in$ ص ، (٤ ، ٤) $\in$ ع .

٨ $\in$ ص ، (٨ ، ٨) $\in$ ع .

$\therefore$ العلاقة ع انعكاسية على ص .

تلاحظ أنه لكي تكون ع انعكاسية على المجموعة {٢ ، ٤ ، ٨} يجب أن يكون ضمن عناصرها الأزواج المرتبة : (٢ ، ٢) ، (٤ ، ٤) ، (٨ ، ٨)

تكون العلاقة ع ليست انعكاسية على س ، إذا وجد ٱ $\in$ س ولكن (ٱ ، ٱ) $\notin$ ع .

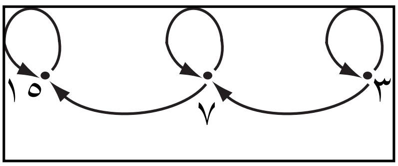
مثال (٢) إذا كانت **ل** = { ٣ ، ٧ ، ١٥ } ، بين أي العلاقتين التاليتين انعكاسية على **ل** وأيها ليست انعكاسية على **ل** ، مع ذكر السبب ، ثم ارسم المخطط السهمي لهذه العلاقات .

ع$_{١}$ = {(٣ ، ٣) ، (٣ ، ٧) ، (٧ ، ١٥) ، (٧ ، ٧) ، (١٥ ، ١٥)}

ع$_{٢}$ = { (١٥ ، ١٥) ، (١٥ ، ٧) ، (٣ ، ٣) } .

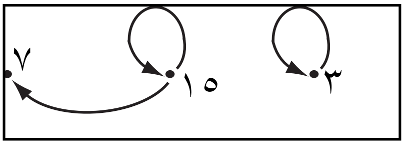
الحـل : ع$_{١}$ علاقة انعكاسية ، لأن كل عنصر ينتمي إلى **ل** مرتبط بنفسه .

ويمثلها المخطط السهمي في الشكل (١ – ٢٠) .



شكل (١ – ٢٠)

ع$_{٢}$ ليست انعكاسية على **ل** ، لأن ٧ $\in$ **ل** بينما (٧ ، ٧) $\notin$ ع$_{٢}$ ، ويمثلها المخطط السهمي في الشكل (١ – ٢١) .



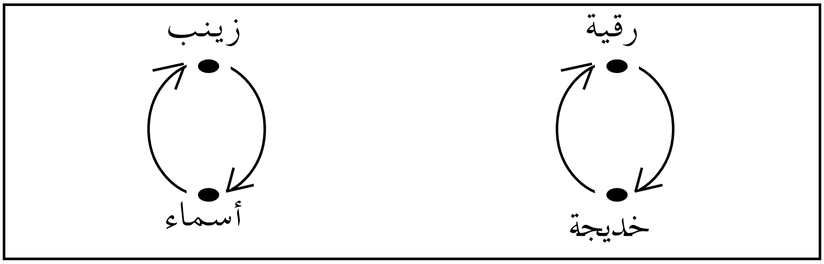
شكل (١ – ٢١)

ثانياً : العلاقة المتناظرة (المتماثلة) :

إذا كانت خديجة « أخت » رقية ، فإن رقية « أخت » خديجة ، وإذا كانت أسماء « أخت » زينب ، فإن زينب « أخت » أسماء ، وعند كتابة هذه العلاقة كأزواج مرتبة نحصل على :

} (خديجة ، رقية) ، (رقية ، خديجة) ، (أسماء ، زينب) ، (زينب ، أسماء) { .

وعند رسم المخطط السهمي لهذه العلاقة « أخت » نرسم سهم يربط خديجة برقية وأخر يربط رقية بخديجة ، وبالمثل مع أسماء وزينب كما هو موضح بالمخطط السهمي في الشكل (١ – ٢٢) :



شكل (١ –٢٢)

علاقة « أخت »

مثل هذه العلاقة تسمى علاقة متناظرة . ونعرفها كما يلي :

تكون العلاقة ع متناظرة على المجموعة س ، إذا كان لكل (أ ، ب) ∈ ع ، فإن (ب ، أ) ∈ ع ، حيث أ ، ب ∈ س .

مثال (٣) إذا كانت س = } ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ { ، وكانت ع علاقة على س حيث :

ع = {(٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٢ ، ٣)}

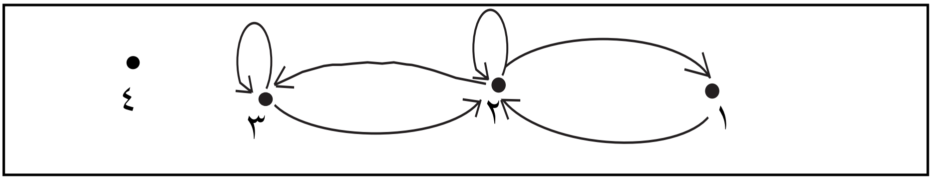
هل ع متناظرة ؟ ولماذا؟.

ارسم المخطط السهمي لهذه العلاقة .

الحل : ع علاقة متناظرة لأن (١ ، ٢) ∈ ع ،وأيضاً (٢ ، ١) ∈ ع،

وبالمثل (٣ ، ٢) ∈ ع ، وأيضاً (٢ ، ٣) ∈ ع .

الشكل (١ – ٢٤) يوضح هذه العلاقة .



شكل (١ –٢٣)

ملاحظة: تكون العلاقة ع ليست متناظرة، إذا وجد (أ ، ب) ∈ ع بينما (ب ، أ) ∉ ع ، أي إذا توفر (أ ، ب) ولم يتوفر (ب ، أ) .

مثال (٤) إذا كانت ك = {أ ، ب ، جـ} ، بيّن نوع كل من العلاقات التالية :

أ) ع١ = {(أ ، ب) ، (أ ، أ) ، (ب ، ب) ، (ب ، أ) ، (جـ ، جـ)}

ب) ع٢ = {(أ ، أ) ، (ب ، ب) ، (جـ ، جـ) ، (جـ ، أ)}

جـ) ع٣ = {(أ ، ب) ، (ب ، جـ) ، (أ ، أ)}

د) ع٤ = {(جـ ، جـ)}

الحل : أ) ع١ علاقة انعكاسية لأن كل عنصر في ك مرتبط بنفسه .

أي أن (ا ، ا)، (ب، ب) ، (جـ ، جـ) $\in$ ع$_1$

ع$_1$ علاقة متناظرة لأن(ا ، ب) $\in$ ع$_1$ ، وأيضاً (ب، ا)$\in$ ع$_1$.

ب) ع$_2$ انعكاسية لأن كل عنصر في ك مرتبط بنفسه ،

ع$_2$ ليست متناظرة لأن(جـ ، ا)$\in$ ع$_2$ ولكن(ا، جـ) $\notin$ ع$_2$.

جـ) ع$_3$ ليست انعكاسية لأن ب $\in$ ك ، (ب، ب) $\notin$ ع$_3$.

ع$_3$ ليست متناظرة لأن(ا ، ب)$\in$ع$_3$ بينما (ب، ا) $\notin$ ع$_3$.

ى) ع$_4$ ليست انعكاسية لأن ب $\in$ ك ولكن (ب، ب) $\notin$ ع$_4$.

ع$_4$ متناظرة لتساوي المسقطين في الزوج (جـ ، جـ) .

تمارين ومسائل

[١] إذا كانت ص = { ٧ ، ٩ ، ١٥ } أيّ العلاقات التالية انعكاسية؟ ولماذا؟

ا) ع$_1$ = {(٧ ، ٧)، (٧، ٩)، (٩ ، ٩)، (٩ ، ١٥)، (١٥ ، ١٥)}،

ب) ع$_2$ = { (٧ ، ٧) ، (٩ ، ١٥) ، (٧ ، ١٥)، (١٥ ، ١٥) } ،

جـ) ع$_3$ = { (١٥ ، ٩) ، (٩ ، ١٥) ، (٧، ٩) ، (٧ ، ٧) } .

[٢] إذا كانت س = { ا، ب ، جـ ، ى } أي العلاقات التالية متناظرة ؟ ولماذا؟

ا) ع$_1$ = { (ا ، ا)، (ب ، ب) ، (جـ ، جـ) } ،

ب) ع$_2$ = { (ا ، ا)، (جـ ، ى) ، (ا ، ب) ، (جـ ، جـ) } ،

جـ) ع$_3$ = { (جـ ، جـ) } ، ى) ع$_4$ = { (ا ، ب) } .

[٣] إذا كانت ل = { ١ ، ٢ ، ٣ } بيّن نوع العلاقات التالية (انعكاسية ، متناظرة) مع ذكر السبب :

ا) ع$_1$ = { (١ ، ١) ، (٣، ٢) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) }

ب) $ع_٢$ = {(٣ ، ١) ، (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣)}

جـ) $ع_٣$ = {(٣، ٣) ، (١ ، ١) ، (٢، ٢)} ، ء) $ع_٤$ = ل × ل .

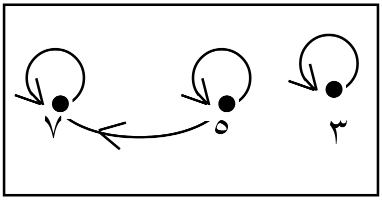
[٤] إذا كانت س = {٤ ، ٥ ، ٦} ، ع علاقة على المجموعة س ، حيث

ع = {(٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٥)} .

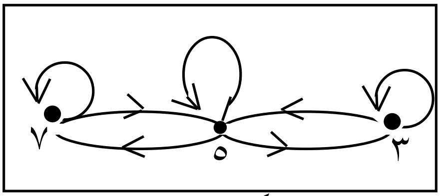
أ) ارسم المخطط السهمي لهذه العلاقة ، ب) هل ع انعكاسية ؟ ولماذا؟

جـ) هل ع متناظرة ؟ ولماذا ؟ .

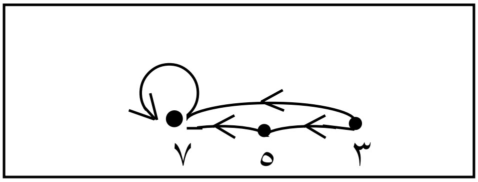
[٥] في الأشكال (١ –٢٤) ، (١ –٢٥) ، (١ –٢٦) : ثلاث علاقات على المجموعة ص ={٣ ، ٥ ، ٧} ، موضحة بالمخططات السهمية التالية :



شكل (١ –٢٤)



شكل (١ –٢٥)



شكل (١ –٢٦)

أ) اكتب الأزواج المرتبة للعلاقات $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$.

ب) ما نوع كل علاقة ؟ ولماذا؟

[٦] إذا كانت ص = {أ ، ب ، جـ} اكتب علاقة :

أ) انعكاسية على ص ، ب) متناظرة على ص .

جـ) انعكاسية ومتناظرة على ص ، ء) انعكاسية وليست متناظرة على ص.

هـ) متناظرة وليست انعكاسية على صـ .

و) ليست انعكاسية وليست متناظرة على صـ .

[٧] إذا كانت صـ= { ١ ، ٢ ، ٣، ٧ } ، وكانت ع علاقة على صـ كالتالي :-

ع = { (أ ، ب) ، حيث أ ، ب ∈ صـ ، أ + ب عدد زوجي } .

أ) اكتب هذه العلاقة ، ب) ارسم المخطط السهمي لهذه العلاقة .

جـ) بيّن نوع هذه العلاقة مع ذكر السبب .

١ : ٦ تمارين ومسائل عامة

[١] اكتب المجموعات التالية بطريقة الصفة المميزة :

أ) س = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، .... } ،

ب) صـ= { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، .... } ،

جـ) ع = { -٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } ،

[٢] ضع أحد الرموز ∈ أو ∉ أو ⊂ أو ⊄ أو = في □ لتصبح العبارات التالية صحيحة :

أ) ٧ □ { ٦ ، ٧ ، ٨ } ، ب) ∅ □ { م ، ن ، هـ } ،

جـ) { ٢ ، ٧ } □ { ٧ ، ٢ } ، د) { ٦٥ } □ { ٥ ، ٦ } .

[٣] اكتب كل المجموعات الجزئية لكل من المجموعات التالية :

أ) { ٣ ، ٥ ، ٨ } ، ب) { أ ، ب ، جـ } .

[٤] اكتب مجموعة شاملة لكل مجموعة من المجموعات التالية :

أ) { ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٥ } ، ب) { ٢ ، ٤ ، ٨ } ،

جـ) { ٤ ، ٥ ، ٦ } .

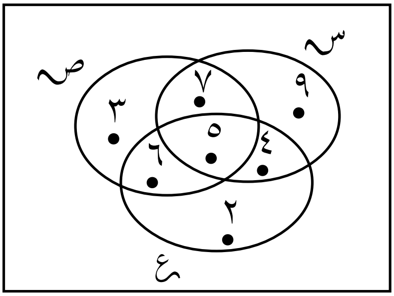
[٥] اكتب ثلاث مجموعات شاملة للمجموعة : { ك ، ل ، م } .

[٦] إذا كانت س = { ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ص ∪ ع = { ٥ ، ٦ ، ٧ } ،
فأوجد س ∪ (ص ∪ ع) ، س ∩ (ص ∪ ع) .

[٧] معتمداً على الشكل (١ – ٢٧)
تحقق من صحة كل مما يلي :

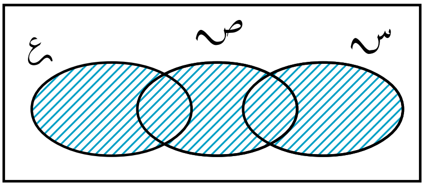
أ) (س ∪ ص) ∩ ع
= (س ∩ ع) ∪ (ص ∩ ع)

ب) ع ∪ (س ∩ ص)
= (ع ∪ س) ∩ (ع ∪ ص)

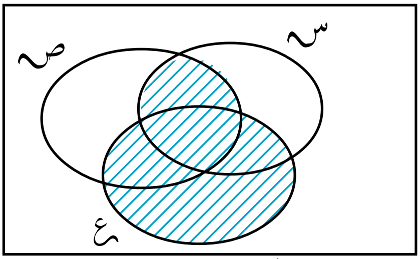


شكل (١ – ٢٧)

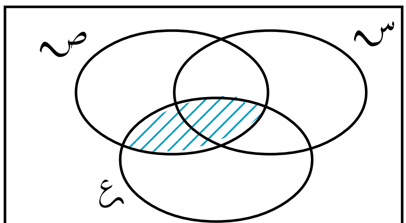
[٨] باستخدام عمليتي التقاطع والاتحاد ، اكتب ما تمثله الأجزاء المظللة في الأشكال(١–٢٨ أ ، ب ، جـ ، ء) :



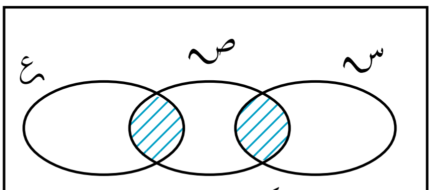
شكل (١ –٢٨ أ)



شكل (١ –٢٨ب)



شكل (١ –٢٨جـ)



شكل (١ – ٢٨ء)

[٩] باستخدام خاصية توزيع التقاطع على الاتحاد أوجد س ∩ (ص ∪ ع)
إذا كانت : س ∩ ص = { أ ، ب ، جـ } ، س ∩ ع = { ن ، ء ، هـ } .

[١٠] اذكر متى تكون : أ) س ∩ ص = س ، ب) ص ∩ س = ص ،
جـ) س ∩ ص = ∅ ، ء) س ∪ ص = ص .

[١١] إذا كانت ل = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ } ، ع علاقة « يقسم » على المجموعة ل ، اكتب هذه العلاقة وارسم مخططها السهمي .

[١٢] اذكر متى تكون العلاقة ع المعرفة على س :
أ) ليست انعكاسية . ، ب) ليست متناظرة .

[١٣] إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، بيّن نوع العلاقات التاليــة مع ذكر السبب :

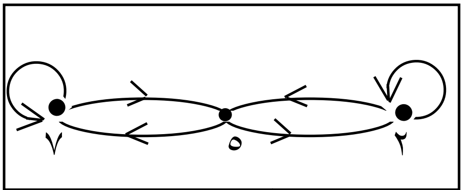
$ع_١$ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

$ع_٢$ = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

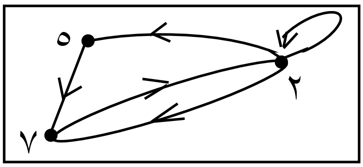
$ع_٣$ = { (٢ ، ٢) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

$ع_٤$ = { (١ ، ١) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

[١٤] بيّـن نوع العلاقة التي يمثلها كل مخطط سهمي في الشكلين (١ – ٢٩) ، (١ – ٣٠) ، ووضح السبب :



شكل (١ – ٢٩)



شكل (١ – ٣٠)

[١٥] إذا كانت ص = { م ، ن ، هـ } ، اكتب علاقة على ص :

أ) انعكاسية ، ء) انعكاسية وليست متناظرة ،

ب) متناظرة ، هـ) متناظرة وليست انعكاسية .

جـ) انعكاسية ومتناظرة ، و) ليست انعكاسية وليست متناظرة .

١ : ٧ اختبار الوحدة

[١] اكتب كل المجموعات الجزئية للمجموعة، س = {العوامل الأولية للعدد ٣٠ }

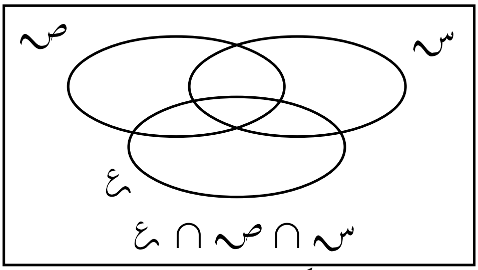
[٢] إذا كانت س = { ب ، ء ، جـ } ، ص = { ء ، هـ ، و } ،
ع = { ا ، ب ، ء } ،
عيّن مجموعة شاملة لهذه المجموعات ثم مثّل المجموعات الأربع بأشكال ڤن .

[٣] إذا كانت ك = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ } ، ل = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } ،
م = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }، أوجد ما يأتي :

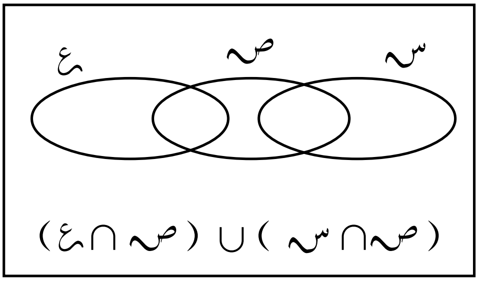
ا) ل ∩ ك ، ك ∩ ل ، وقارن بينهما .

ب) ك ∪ ل ∪ م ومثلها بأشكال ڤن ، جـ) ك ∪ (ل ∩ م) .

[٤] لوّن المنطقة التي تمثل المجموعة أسفل كل من الشكلين (١ – ٣١) ، (١–٣٢) التاليين :



شكل (١ –٣١)



شكل (١ –٣٢)

[٥] إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ } ، وكانت ع علاقة على س معرفة كالتالي :
ع = {(٢ ، ٢)، (٢ ، ٦)، (٣ ، ٣)، (٥ ، ٥)، (٦ ، ٢)، (٦، ٦)}،

ا) هل هذه العلاقة انعكاسية ولماذا؟ ، ب) هل هذه العلاقة متناظرة ولماذا؟

جـ) ارسم المخطط السهمي لهذه العلاقة .

[٦] إذا كانت س ∩ ص = { ا ، ب } ، س ∩ ع = { ب ، جـ } .
باستخدام خاصية التوزيع أوجد : س ∩ (ص ∪ ع) .

الوحدة الثانية الأعداد النسبية

٢ : ١ مجموعة الأعداد النسبية

تعرفت في دراستك السابقة على مجموعة الأعداد الطبيعية (ط)
ومجموعة الأعداد الصحيحة (صـ) ، اللتين رمزنا لهما على النحو التالي :

ط = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... } ،

صـ = { ... ، −٣ ، −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... } لاحظ

أن ط ⊂ صـ .

تأمل مجموعة الحل للمعادلتين الآتيتين :

(١) ٢ س = −٤   ٢) ٣ س + ١ = صفر .

المعادلة (١) : ٢ س = −٤ حلها س = $\frac{-٤}{٢}$ = −٢ ، يتضح أن المعادلة

ليس لها حل في مجموعة الأعداد الطبيعية لذلك لجانا إلى توسيع مجموعة الأعداد الطبيعية إلى مجموعة الأعداد الصحيحة فوجدنا فيها حل لمثل هذه المعادلة .

أما المعادلة(٢) : ٣ س + ١ = صفر ، حلها س = $\frac{-١}{٣}$ ، يتضح أن المعادلة

ليس لها حل في مجموعة الأعداد الصحيحة لذلك لابد من توسيع مجموعة الأعداد الصحيحة إلى مجموعة أعداد جديدة ، تضم أعداد مثل :

$\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{٤}{٢}$ ، $\frac{-١٠}{٢}$ ، $٢\frac{١}{٣}$ ، $-٢\frac{٢}{٥}$ ، ... الـخ

تأمل الأعداد السابقة : ماذا تلاحظ ؟

تلاحظ أن بعضها أعداد كسرية موجبة وبعضها سالبة ، ومثل هذه الأعداد تنتمي إلى مجموعة تسمي مجموعة الأعداد النسبية، ونرمز لها بالرمز (ن) .

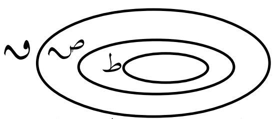
مجموعة الأعداد النسبية (ن) : هي المجموعة التي يمكن كتابة عناصرها بصورة : $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب لايساوى صفراً.

ويعبر عنها رمزياً كالتالي : ن = $\{\frac{أ}{ب}$: أ ، ب $\in$ ص، ب $\neq$ ٠$\}$.

من التعريف السابق نستنتج أن :

١) كل عدد صحيح هو عدد نسبي (ص $\subset$ ن) لأنه يمن كتابة أي عدد صحيح على الصورة $\frac{أ}{ب}$،فمثلاً العدد ٥ يمكن كتابته بالصورة $\frac{٥}{١}$، وكذلك −٩ يمكن كتابته بالصورة $\frac{-٩}{١}$ ، وهكذا.

هل كل عدد نسبي عدد صحيح ؟



٢) يكون العدد النسبي موجباً عندما يكون العددان أ ، ب لهما نفس الإشارة ، أي أن : $\frac{+أ}{+ب} = \frac{-أ}{-ب} = \frac{أ}{ب}$.

٣) يكون العدد النسبي سالباً عندما يكون العددان أ ، ب مختلفان في الإشارة، أي أن : $\frac{-أ}{ب} = \frac{أ}{-ب} = -\frac{أ}{ب}$.

٤) يكون العدد النسبي صفراً عندما يكون العدد أ = صفر ، أي أن :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٠}{\text{ب}} = ٠ \text{ .}$$

مثال (١) اكتب الأعداد النسبية الآتية على صورة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$:

$$٤ \text{ ، } -٣ \text{ ، } ٢\frac{-١}{٤} \text{ ، } ٣\frac{٢}{٧} \text{ .}$$

الحل : $٤ = \frac{٤}{١}$ ، $-٣ = -\frac{٣}{١}$.

$-٢\frac{١}{٤} = -\frac{٤ \times ٢ + ١}{٤} = \frac{-٩}{٤}$ (بضرب المقام في العدد الصحيح (٢) وإضافة إلى البسط)

$٣\frac{٢}{٧} = \frac{٧ \times ٣ + ٢}{٧} = \frac{٢٣}{٧}$ (بضرب المقام في العدد الصحيح (٣) وإِضافته إلى البسط) .

مثال (٢) بين أي الأعداد الآتية عدد نسبي ، مع ذكر السبب :

$$\frac{١}{٣} \text{ ، } -\frac{٢}{٥} \text{ ، } \frac{٠}{٢} \text{ ، } \frac{٢}{\sqrt{٥}} \text{ ، } \frac{٣}{٥} \text{ ، } \frac{\sqrt{٣}}{٥} \text{ ، } \frac{\sqrt{١٦}}{٥} \text{ .}$$

الحل : $\frac{١}{٣}$ عدد نسبي ، لأن ١ $\in$ ص ، ٣ $\in$ ص ، ٣ $\neq$ ٠ .

$\frac{٠}{٢}$ عدد نسبي ، لأن ٠ $\in$ ص ، ٢ $\in$ ص ، ٢ $\neq$ ٠ .

$\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ عدد غير نسبي ، لأن $\sqrt{٥} \notin$ ص .

$\frac{\sqrt{٣}}{٥}$ عدد غير نسبي ، لأن $\sqrt{٣} \notin$ ص .

$\frac{\sqrt{١٦}}{٥}$ عدد نسبي ، لأن $\sqrt{١٦} = ٤ \in$ ص ، ٥ $\in$ ص ، ٥ $\neq$ ٠ .

مثال (٣) اكتب الأعداد النسبية الآتية في أبسط صورة .

أ) $\frac{١٥}{٢٠}$ ، ب) $\frac{-١٤}{-٢١}$ ، جـ) $-\frac{٢٧}{٤٥}$.

الحـــل : لكتابة العدد النسبي في أبسط صورة ، نقسم كل من بسطه ومقامه على القاسم المشترك الأكبر لهما :

أ) القاسم المشترك الأكبر للعددين ١٥ ، ٢٠ هو العدد ٥،

$$\therefore \frac{١٥}{٢٠} = \frac{١٥ \div ٥}{٢٠ \div ٥} = \frac{٣}{٤} .$$

ب) القاسم المشترك الأكبر للعددين ‎-١٤ ، ‎-٢١ هو العدد ٧،

$$\therefore \frac{-١٤}{-٢١} = \frac{-١٤ \div ٧}{-٢١ \div ٧} = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣} .$$

جـ) القاسم المشترك الأكبر للعددين ‎-٢٧ ، ٤٥ هو العدد ٩ ،

$$\therefore \frac{-٢٧}{٤٥} = \frac{-٢٧ \div ٩}{٤٥ \div ٩} = \frac{-٣}{٥} .$$

تمارين ومسائل

[١] ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة ،وعلامة (X) أمام العبارة الخاطئة في كل مما يأتي ، مع ذكر السبب :

أ) كل عدد صحيح هو عدد نسبي . (   )

ب) كل عدد صحيح هو عدد طبيعي . (   )

جـ) كل عدد طبيعي هو عدد صحيح . (   )

ء) كل عدد نسبي هو عدد نصحيح . (   )

[٢] اكتب الأعداد التالية على صورة $\frac{أ}{ب}$.

٢٣ ، −١٢ ، $٢\frac{١}{٣}$ ، $-٣\frac{٢}{٥}$ ، صفر .

[٣] بيّن أياً من الأعداد النسبية الآتية موجبة ، وأيها سالبة :

$\frac{٣}{٥}$ ، $-\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{-٤}{-٥}$ ، $\frac{٨}{١٧}$ ، $\frac{-١٣}{-٧٦}$ ، $-\frac{٢٣}{٣٩}$.

[٤] بيّن أياً من الأعداد الآتية نسبية وأيها غير نسبي ، مع ذكر السبب :

$\frac{-٣}{٥}$ ، $٢\frac{٢}{٩}$ ، $\frac{٠}{٨}$ ، -١٥ ، $\sqrt{٤}$ ، $\frac{٧}{\sqrt{٢}}$ ، $\sqrt{١٠}$ ، $\frac{\sqrt{٢٥}}{٣}$.

[٥] اكتب الأعداد النسبية التالية في أبسط صورة :

$\frac{٢٨}{٤٢}$ ، $\frac{-١٢}{-٣٦}$ ، $\frac{٣٦}{٤٨}$ ، $\frac{-١٨}{٥٤}$ ، $\frac{-٤٢}{-٧٦}$ ، $\frac{٣٥}{٧٥}$.

[٦] اكتب الأعداد النسبية التالية في أبسط صورة ،وبين اياً منها عدد صحيح :

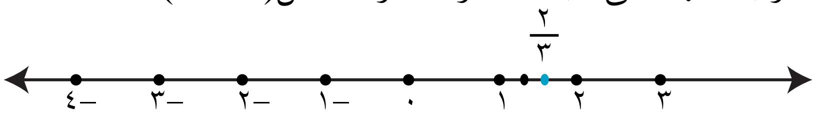
$\frac{١٢}{-٣}$ ، $\frac{١٠}{٤}$ ، $\frac{٢٠}{١٥}$ ، $\frac{٣}{١٥}$ ، $\frac{٣٢}{٨}$.

٢ : ٢ تمثيل الأعداد النسبية على خط الأعداد

درست في الصف السابع تمثيل الأعداد الصحيحة على خط الأعداد ، حيث مثلت الأعداد الموجبة على يمين الصفر والأعداد السالبة على يسار الصفر ، وباطريقة نفسها يتم تمثيل الأعداد النسبية على خط الأعداد .

مثال (١) مثل الأعداد النسبية $\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{١٣}{٥}$ على خط الأعداد .

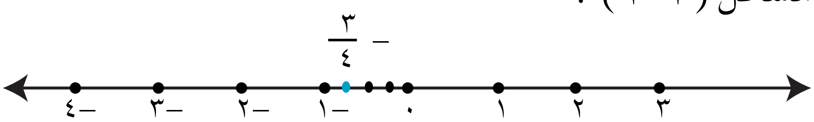
الحـــل : النقطة التي تمثل العدد $\frac{٢}{٣}$ تقع يمين الصفر بين العددين الصفر والواحد على خط الأعداد . ولتمثيل هذا العـــدد ($\frac{٢}{٣}$) نقسم المسافة بين الصفر والواحد بقدر المقام ، أي إلى ثلاثة أجزاء متساوية، ونأخذ جزئين منها على يمين الصفر [انظر الشكل(٢ – ١)] .



شكل (٢ – ١)

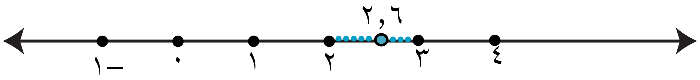
النقطة التي تمثل العدد $-\frac{٣}{٤}$ ،تقع على يسار الصفر بين الصفر وسالب واحد .

ولتمثيل هذا العدد ($-\frac{٣}{٤}$) نقسم المسافة بين الصفر وسالب واحد بقدر المقام ، أي إلى أربعة أجزاء متساوية .ونأخذ منها ثلاثة أجزاء على يسار الصفر [انظر الشكل (٢–٢) .



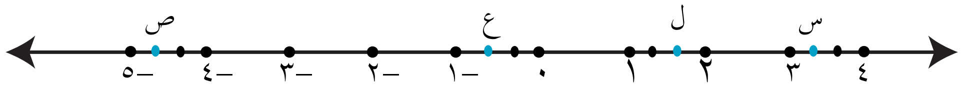
شكل (٢ –٢)

العدد $\frac{١٣}{٥} = ٢\frac{٣}{٥} = ٢٫٦$ فالنقطة التي تمثل العدد ٢٫٦ تقع على يمين الصفر بين العددين ٢ ، ٣، ولتمثيل هذا العدد ($\frac{١٣}{٥}$) على خط الأعداد نقسم المسافة بين العددين ٢ ، ٣ إلى اقسام متساوية ونأخذ أجزاء منها يمين العدد ٢ [انظر الشكل (٢ – ٣)] .



شكل (٢ – ٣)

مثال (١) اكتب الأعداد النسبية التي تمثلها النقاط س ، ص ، ع ، ل على خط الأعداد التالي :



شكل (٢ – ٤)

الحل :

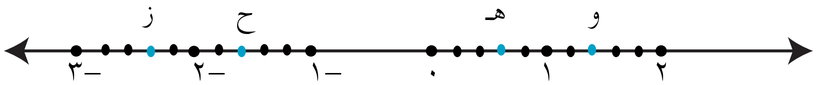
– النقطة س تمثل العدد $٣\frac{١}{٣}$. – النقطة ص تمثل العدد $-٤\frac{٢}{٣}$.

– النقطة ع تمثل العدد $-\frac{٢}{٣}$. – النقطة ل تمثل العدد $١\frac{٢}{٣}$.

تماريـن ومسائـل

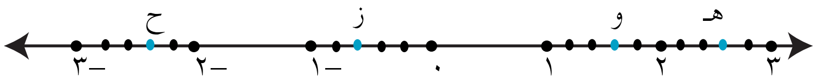
(١) اكتب الأعداد النسبية التي تمثل النقاط هـ ، و ، ز ، ح على الأشكال التالية (أ ، ب) للشكل (٢ – ٥) :

أ)



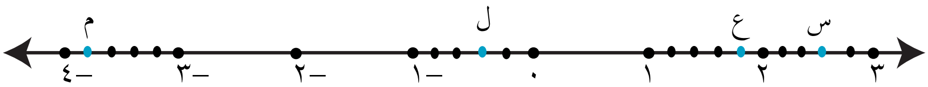
شكل (٢ –٥أ)

ب)



شكل (٢ –٥ب)

[٢] اعتماداً على الشكل (٢–٦) ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (X) أمام العبارة الخاطئة ، مع تصحيح الخطأ أينما وجد :



شكل (٢ –٦)

أ) النقطة س تمثل العدد $٢\frac{١}{٢}$. (   )

ب) النقطة ع تمثل العدد $-١\frac{٣}{٤}$. (   )

جـ) النقطة ل تمثل العدد $-\frac{٢}{٣}$. (   )

ء) النقطة م تمثل العدد $-٣\frac{٤}{٥}$. (   )

(٣) مثل الأعداد الآتية على خط الأعداد :

أ) $٣\frac{١}{٢}$ ، $-٢\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-٤}{٢}$.   ب) $\frac{٩}{٥}$ ، $٣\frac{٣}{٥}$ ، $-١\frac{٣}{٥}$.

جـ) $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{-٦}{٣}$.   ء) $٣\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٨}{٢}$ ، $٢\frac{-٣}{٤}$.

٢ : ٣ الصورة العشرية للأعداد النسبية

لكتابة أي عدد نسبي بصورة عشرية نقسم بسط العدد على مقامه .

مثال (١) اكتب الأعداد النسبية الآتية بصورة عشرية .

أ) $\frac{٣}{٤}$.　　ب) $\frac{-٧}{٣٢}$.　　جـ) $\frac{-٥}{٦}$.　　ء) $\frac{٥٧}{١١}$.

الحـــل :

أ) $\frac{٣}{٤} = ٠,٧٥$

٠,٧٥
٤ | ٣٠
٢٨
٢٠
٢٠
٠٠

ب) $\frac{-٧}{٣٢} = -٠,٢١٨٧٥$

٠,٢١٨٧٥
٣٢ | ٧٠
٦٤
٦٠
٣٢
٢٨٠
٢٥٦
٢٤٠
٢٢٤
١٦٠
١٦٠
٠٠٠

جـ) $\frac{٥}{٦} \approx ٠{,}٨٣٣٣$

$$\begin{array}{r|l} & ٠{,}٨٣٣٣ \\ \hline ٦ & ٥٠ \\ & \underline{٤٨} \\ & ٢٠ \\ & \underline{١٨} \\ & ٢٠ \\ & \underline{١٨} \\ & ٢٠ \\ & \underline{١٨} \\ & ٠٢ \end{array}$$

نلاحظ أن عملية القسمة غير منتهية وأن

هناك رقم [وهو٣] يتكرر دون انتهاء لذلك

نضع شرطة فوق هذا الرقم الرقم في خارج

القسمة للدلالة على أنه متكرر الظهور .

فيكون $\frac{٥}{٦} = ٠{,}٨\overline{٣}$

د) $\frac{٥٧}{١١} \approx ٥{,}١٨١٨$

$$\begin{array}{r|l} & ٥{,}١٨١٨ \\ \hline ١١ & ٥٧ \\ & \underline{٥٥} \\ & ٢٠ \\ & \underline{١١} \\ & ٩٠ \\ & \underline{٨٨} \\ & ٢٠ \\ & \underline{١١} \\ & ٩٠ \\ & \underline{٨٨} \\ & ٢ \end{array}$$

نلاحظ أن عملية القسمـــة غير منتهية

وأن رقمين يتكرران دون انتهاء لذلك نضع

شرطة فوق الرقم في خارج القسمة للدلاله

على أنهما متكررا الظهور .

$\therefore \quad \frac{٥٧}{١١} = ٥{,}\overline{١٨}$

نلاحظ من المثال السابق أن هناك حالتين في خارج عملية القسمة الأعداد النسبية هي :

١ – عملية قسمة منتهية مثل القسمة في الأعداد : $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٧}{٣٢}$.

٢ – عملية القسمة غير منتهية وانما يتكرر ظهور رقم أو اكثر في خارج القسمة بشكل دوري كما في الأعداد – $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{٥٧}{١١}$.

وبصورة عامة .

١) العدد الدوري هو ذلك العدد الذي يتكرر فيه ظهور رقم أو أكثر .

٢) الصورة العشرية لأي عدد نسبي هو كسر عشري منته أو دوري .

كتابة العدد النسبي الدوري بصورة $\frac{أ}{ب}$:

الأمثلة التالية توضح كتابة العدد النسبي الدوري بصورة $\frac{أ}{ب}$:

مثال (٢) اكتب العددين النسبيين الدوريين التاليين على صورة $\frac{أ}{ب}$

أولاً : $٠,\overline{٧}$ ثانياً : $٢,\overline{٣}١$.

الحـــل : أولاً : نفرض أن : س = $٠,\overline{٧}$ (بضرب الطرفين في ١٠)

فتكون ١٠ س = $٧,\overline{٧}$ (لأن س = $٠,\overline{٧}$ أو $٠,\overline{٧٧}$)

∴ ١٠ س – س = $٧,\overline{٧}$ – $٠,\overline{٧}$

٩س = ٧

∴ س = $\frac{٧}{٩}$ (بقسمة الطرفين على ٩)

∴ $٠,\overline{٧}$ = $\frac{٧}{٩}$.

ثانياً : نفرض أن : س $=$ $٢,\overline{٣١}$ (بضرب الطرفين في ١٠٠)

فيكون ١٠٠س $=$ $٢٣١,\overline{٣١}$ (لأن س $=$ $٢,\overline{٣١}$ أو $٢,٣١\overline{٣١}$)

١٠٠ س $-$ س $=$ $٢٣١,\overline{٣١}$ $-$ $٢,\overline{٣١}$

٩٩ س $=$ ٢٢٩

$$س = \frac{٢٢٩}{٩٩} = ٢\frac{٣١}{٩٩}$$

$$\therefore\ ٢,\overline{٣١} = ٢\frac{٣١}{٩٩}\ .$$

تمارين ومسائل

[١] اكتب الأعداد النسبية الآتية بصورة عشرية :

$$\frac{٣}{٥}\ ،\ \frac{٤}{٨}\ ،\ \frac{-٥}{٨}\ ،\ \frac{-٤}{٩}\ ،\ \frac{١٢}{١٧}\ ،\ \frac{٥}{١٧}$$

[٢] حدد أيّاً من الأعداد النسبية التالية منتهياً وأيها دورياً :

$$\frac{٦٤٥}{٨٦٠}\ ،\ \frac{٣٦٤}{٥٧٢}\ ،\ \frac{-١١٥}{٢٧٦}\ ،\ \frac{٤٦٣}{١٨٥٢}\ ،\ \frac{-١٢٨٤}{١٦٠٥}\ .$$

[٣] اكتب الأعداد النسبية الدورية التالية على صورة $\frac{أ}{ب}$.

$٠,\overline{٣}$ ، $-٠,\overline{٢٢}$ ، $٢,\overline{٥}$ ، $٠,\overline{٢٨}$.

$-$ $٦,\overline{٤}$ ، $٨,\overline{١٣}$ ، $٦,\overline{٤٢}$ ، $٥,\overline{٣١٢}$.

٢ : ٤ مقارنة الأعداد النسبية

عند المقارنة بين العددين الصحيحين ٤ ، ٣ ،فأننا نقول أن ٤ أكبر من ٣ .

وبما أن كل عدد صحيح هو عدد نسبي ، فيمكن وضع العددين ٤ ، ٣ على الصورة $\frac{٤}{١}$ ، $\frac{٣}{١}$ ،وواضح أن $\frac{٣}{١} < \frac{٤}{١}$ ،لاحظ أن العددين مقاميهما موجبين ($٠ < ١$) ، ولهما المقام نفسه (١) ، ولذا تمت المقارنة بين بسطيهما ($٣ < ٤$) . وكذلك $\frac{٥}{٧} > \frac{٤}{٧}$ [العددان لهما المقام نفسه (٧) وهو موجب، فتمت المقارنة بين بسطيهما ($٥ > ٤$)].

وبشكل عام لمقارنة الأعداد النسبية نتبع الآتي :

أ) نجعل مقامات الأعداد النسبية موجبة .
ب) نوحد المقامات المختلفة للأعداد النسبية ثم نقارن بين بسوطها والعدد النسبي الأكبر هو الذي بسطه أكبر .

مثال (١) قارن بين الأعداد النسبية الآتية :

أ) $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ب) $\frac{٥}{-٨}$ ، $\frac{٥}{-٦}$ جـ) $\frac{٣}{٥}$ ، ٠,٧٥

الحـل : أ) العـــددان $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٥}{٦}$ مقاماهـما موجبة ($٠ < ٤$ ، $٠ < ٦$)

والمقامان مختلفان فلابد من توحيدهما من أجل المقارنة ،نوحدالمقامات بإِيجادالمضاعف المشترك الأصغر للعددين ٤ ، ٦ وهو ١٢ (كما هو واضح من العملية الثالثة) .

∴ المضاعف المشترك الأصغر هو ٢ × ٢ × ٣ = ١٢

٤ ، ٦	٢
٢ ، ٣	٢
١ ، ٣	٣
١ ، ١	

∴ $\frac{٣}{٤} = \frac{٩}{١٢}$ ، $\frac{٥}{٦} = \frac{١٠}{١٢}$

∵ $١٠ > ٩$

∴ $\frac{١٠}{١٢} > \frac{٩}{١٢}$ ، ومنه $\frac{٥}{٦} > \frac{٣}{٤}$.

ب) العددان $\frac{٥}{-٨}$ ، $\frac{٥}{-٦}$ نجعل المقامين موجبة فنحصل على: $\frac{-٥}{٨}$ ، $\frac{-٥}{٦}$.

نلاحظ أن المقامين مختلفان ، فلابد من توحيدهما .

المضاعف المشترك الأصغر للعددين ٨ ، ٦ هو ٢٤

٨ ، ٦	٢
٤ ، ٣	٢
٢ ، ٣	٢
١ ، ٣	٣
١ ، ١	

= ٢ × ٢ × ٢ × ٣ = ٢٤

∴ $\frac{-٥}{٨} = \frac{-١٥}{٢٤}$ ، $\frac{-٥}{٦} = \frac{-٢٠}{٢٤}$.

∵ $-٢٠ < -١٥$

∴ $\frac{-٢٠}{٢٤} < \frac{-١٥}{٢٤}$ ، ومنه $\frac{-٥}{٦} < \frac{-٥}{٨}$.

جـ) بما أن العدد النسبي الأول $\frac{٣}{٥}$ بصورة عادية والثاني ٠,٧٥ بصورة عشرية نحول أحدهما إلى الآخر .

اما $\frac{٣}{٥}$ = ٠,٦ = ٠,٦٠ .

∴ ٠,٦٠ < ٠,٧٥

أي $\frac{٣}{٥}$ < ٠,٧٥ .

أو ٠,٧٥ = $\frac{٧٥}{١٠٠}$ بتوحيد المقامات مع $\frac{٣}{٥}$

∴ م.م.أ = ١٠٠

$\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٦٠}{١٠٠}$ ، ٠,٧٥ = $\frac{٧٥}{١٠٠}$

∴ $\frac{٣}{٥}$ < ٠,٧٥

مثال (٢) اكتب ثلاثة أعداد نسبية تقع بين $\frac{١}{٤}$ ، $-\frac{١}{١٢}$.

الحـــل : المضاعف المشترك الأصغر للمقامات هو ١٢ .

∴ $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{١٢}$

∵ $\frac{٣}{١٢} > \frac{٢}{١٢} > \frac{١}{١٢} > \frac{٠}{١٢} > \frac{-١}{١٢}$

∴ الأعداد الواقعة بين $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{-١}{١٢}$ هي $\frac{٢}{١٢}$ ، $\frac{١}{١٢}$ ، $\frac{٠}{١٢}$.

مثال (٣) رتّب الأعداد النسبية الآتية تنازلياً مرة وتصاعدياً مرة أخرى :		الحــــل

$\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٧}{١٥}$.

الحل

أولاً : الترتيب التنازلي للأعداد :

H G P G

المضاعف المشترك الأصغر للمقامات هو ١٥ .

$$\therefore \quad \frac{٣}{٥} = \frac{٩}{١٥} \;،\; \frac{-٢}{٣} = \frac{-١٠}{١٥} \;،\; \frac{٢}{٣} = \frac{١٠}{١٥} \;،\; \frac{٧}{١٥} = \frac{٧}{١٥}$$

$$\because \quad \frac{١٠}{١٥} > \frac{٩}{١٥} > \frac{٧}{١٥} > \frac{-١٠}{١٥} \;،$$

أي أن $\frac{٢}{٣} > \frac{٣}{٩} > \frac{٧}{١٥} > -\frac{٢}{٣}$

الترتيب التنازلي هو : $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٧}{١٥}$ ، $\frac{-٢}{٣}$.

ثانياً : الترتيب التصاعدي للأعداد هو :

$\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{٧}{١٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٢}{٣}$

تمارين ومسائل

[١] اكتب ثلاثة أعداد مكافئة لكل من الأعداد النسبية الآتية :

أ) $\frac{٢}{٥}$ ، ب) $\frac{-٥}{٧}$ ، جـ) $\frac{-٣}{-١١}$ ، ء) $\frac{٣٦}{٨٤}$.

[٢] قارن كل زوج من الأعداد النسبية الآتية :

أ) $\frac{٢٢}{٢٧}$ ، $\frac{١٩}{٢٧}$ ، ب) $-\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{٣}{٨}$ ،

جـ) $-٠,٧$ ، $٠,\overline{٨}$ ، ء) $-\frac{٤}{٥}$ ، $-\frac{٣}{٤}$ ،

هـ) $٠,٥$ ، $٠,٣٧$ ، و) $-٠,١٧$ ، $-٠,١٠٧$.

[٣] رتّب الأعداد النسبية الآتية تصاعدياً :

أ) $١\frac{٢}{٣}$ ، $-٣\frac{٣}{٥}$ ، ٠,٤ ، ب) ٠,٧٥ ، $\frac{-١}{-٢}$ ، $-\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ،

[٤] رتّب الأعداد النسبية الآتية تنازلياً :

أ) $\frac{١}{٥}$ ، ٠,٥ ، $\frac{٧}{١٠}$ ، ب) $-٢,٢٥$ ، $٢\frac{٢}{٣}$ ، $-٢\frac{٢}{٣}$ ، $٢\frac{١}{٤}$.

[٥] اكتب عددين نسبيين يقعان بين كل عددين من الأعداد النسبية الآتية:

أ) $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ، ب) $\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{-٣}{٤}$ ، جـ) $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{-١}{٥}$ ،

ء) ٠,٢٥ ، $\frac{٢}{٤}$ ، هـ) ٠,٥ ، $\frac{١}{٣}$ ، و) ٠,٣ ، ٠,٤ .

٢ : ٥ جمع الأعداد النسبية وخواصها

سبق لك التعرف على الأعداد الكسرية وإجراء العمليات الأربع عليها ، وهذه الأعداد هي عبارة عن أعداد نسبية موجبة ، والآن تتعرف أولاً على عملية جمع الأعداد النسبية السالبة والموجبة ، وهي لاتختلف كثيراً عن عملية جمع الأعداد الكسرية .

مثال (١) احسب : $\frac{٥}{٨} + \frac{(-٧)}{٨}$

الحل : $\frac{٥}{٨} + \frac{(-٧)}{٨} = \frac{٥ + (-٧)}{٨} = \frac{\cancel{-٢}^{\,-١}}{\cancel{٨}_{\,٤}} = \frac{-١}{٤}$

مثال (٢) أوجد ناتج : $\frac{-٤}{٩} + \frac{٥}{١٢}$.

الحل : بما أن مقامي الكسرين مختلفين ، فلابد أولاً من توحيد مقاميهما بإيجاد الكسر المكافئ لهما وذلك بإيجاد المضاعف المشترك الأصغر للمقامين ٩ ، ١٢ وهو العدد ٣٦ .

$$\therefore \frac{-٤}{٩} + \frac{٥}{١٢} = \frac{(-١٦) + ١٥}{٣٦} = \frac{-١}{٣٦} .$$

مثال (٣) أوجد ناتج : $\frac{-١}{٦} ٤ + (-١٢{,}٧٥)$.

الحل : $- \frac{١}{٦} ٤ + (-١٢{,}٧٥) = - \frac{١}{٦} ٤ + (-\frac{\cancel{٧٥}^{٣}}{\cancel{١٠٠}_{٤}} ١٢)$.

المضاعف المشترك الأصغر للعددين ٦ ، ٤ هو ١٢ .

$$\therefore - \frac{١}{٦} ٤ + (-\frac{٣}{٤} ١٢) = - \frac{٢}{١٢} ٤ + (-\frac{٩}{١٢} ١٢) = - \frac{١١}{١٢} ١٦ .$$

خواص عملية الجمع على الأعداد النسبية :

ا) خاصية الانغلاق :

من أمثلة جمع الأعداد النسبية السابقة نلاحظ أن جمع أي عددين نسبيين هو عدد نسبي .

لكل عددين نسبيين $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ء}$ ، (ب ≠ ٠ ، ء ≠ ٠)

يكون $\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{ء} \in ن$.

وعليه فإن : مجموعة الأعداد النسبية مغلقة تحت عملية الجمع .

وهذا يعني أن ناتج جمع أي أعداد نسبية دائما هو عدد نسبي .

ب) خاصية الإبدال :

لاحظ أن : $(\frac{-٢}{٣}) + \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} + (\frac{-٢}{٣})$ ،

$(\frac{-٢}{٥}) + (\frac{-٣}{١٠}) = (\frac{-٣}{١٠}) + (\frac{-٢}{٥})$.

لأي عددين نسبيين $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ء}$ حيث ب ≠ ٠ ، ء ≠ ٠ ،

يكون $\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{ء} = \frac{جـ}{ء} + \frac{أ}{ب}$ ،

أي أن : عملية جمع الأعداد النسبية إبدالية .

جـ) خاصية التجميع :

لاحظ أن : $(\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}) + \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٤} + (\frac{٣}{٤} + \frac{٢}{٤})$

لأي ثلاثة أعداد نسبية : $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ء}$ ، $\frac{هـ}{و}$ (ب ≠ ٠ ، ء ≠ ٠ ، و ≠ ٠)

يكون $(\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{ء}) + \frac{هـ}{و} = \frac{أ}{ب} + (\frac{جـ}{ء} + \frac{هـ}{و})$

أي أن : عملية جمع الأعداد النسبية تجميعية .

ء) العنصر المحايد الجمعي :

لاحظ أن : $٠ + \frac{(-٣)}{٧} = \frac{(-٣)}{٧} + ٠ = \frac{-٣}{٧}$

إذا كان $\frac{أ}{ب} \in ن$ (ب $\neq$ ٠) .

فأن $٠ + \frac{أ}{ب} = \frac{أ}{ب} + ٠ = \frac{أ}{ب}$

الصفر هو العنصر المحايد الجمعي في مجموعة الأعداد النسبية .

هـ) النظير الجمعي :

تعلم أن النظير الجمعي للعدد (٣) هو(-٣) والنظير الجمعي (-٧)هو (٧) وبالمثل فإن النظير الجمعي للعدد ($\frac{١}{٢}$) هو العدد النسبي ($\frac{-١}{٢}$) والنظير الجمعي للعدد ($-\ ٢\frac{١}{٥}$) هو ($٢\frac{١}{٥}$) .

إذا كان $\frac{أ}{ب} \in ن$ (ب $\neq$ ٠)

فأن نظيره الجمعي $\frac{-أ}{ب}$ ، ومجموع : $\frac{أ}{ب} + \frac{(-أ)}{ب} =$ صفر

مجموع العدد النسبي ونظيره يساوى العنصر المحايد الجمعي .

تماريـن ومسائـل

أوجد ناتج ما يلي :

[١] أ) ٢٢ + ٢٤ ، ب) ٧٥ + (- ٥٠) ، جـ) (-٦٣) + ٩٨ ،

ء) (-٥٤) + (-٣٦) ، هـ) (-٣٧٢) + ٢٤٥ ، و) ٢٦٣ + (-٤٩٥) .

[٢] أ) $\frac{٢}{٥} + \frac{٤}{٥}$ ، ب) $\frac{-٤}{٧} + \frac{(-٣)}{٧}$ ، جـ) $\frac{-٢}{٣} + \frac{٥}{٩}$ ،

د) $\frac{-٥}{٦} + \frac{(-٣)}{٨}$ ، هـ) $\frac{١}{٣} + \frac{(-٧)}{٨}$ ، و) $(-٣) + \frac{٤}{٥}$.

[٣] أ) $٥\frac{١}{٨} + (-١٥\frac{٧}{١٢})$ ، ب) $(-٢٤\frac{١}{٦}) + (-١٧\frac{١١}{١٦})$

جـ) $٩,٣ + (-١٠,٥)$ ، د) $٥٧,٠٢ + (-٣٠,٥)$.

هـ) $(-٧٠,٠٤) + (-٢٠,٦)$ و) $٩٩,١٩ + (-٢٧٠,٠٩)$

[٤] ما ناتج جمع : أ) ١٣,٥ ، $١\frac{١}{٢}$ ، ب) $٢٠\frac{٣}{٨}$ ، −١٤,١٦ .

[٥] أكمل ما يلي ، مع ذكر السبب :

أ) $٧\frac{١}{٤} + (-٢\frac{٣}{٥}) = (-٢\frac{٣}{٥}) + \ldots$

ب) $(-٩,٥) + (-٢\frac{٣}{٨}) = (-٢\frac{٣}{٨}) + \ldots$ ،

جـ) $١٢\frac{٦}{٧} + \ldots = ٠$ ، د) $\ldots + (-٢,٣) = ٠$

[٦] احسب ما يلي بإستخدام خواص جمع الأعداد النسبية :

أ) $٢\frac{٣}{٤} + ٥\frac{١}{٤} + (-١٠\frac{٥}{١٢})$ ، ب) $\frac{١}{٦} + \frac{٢}{٣} + \frac{٥}{٦}$ ،

جـ) $(-٢\frac{٣}{٤}) + (-١٢\frac{١}{٦}) + (-٢\frac{٣}{٤})$ ،

د) $١٢\frac{٤}{٩}\ (-١٢\frac{١}{٦}) + ٢\frac{١}{٢}$.

٢ : ٦ طـــرح الأعــداد النسبيـــة

والآن بعد أن اتضح لك أن مجموعة الأعداد الصحيحة هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية ، وقد عرفت أن لكل عدد نسبي نظيره الجمعي، ولذلك فإن عملية طرح الأعداد النسبية لاتختلف عن عملية طرح الأعداد الصحيحة، فهي عبارة عن إضافة النظير الجمعي للعدد النسبي المطروح إلى العدد النسبي المطروح منه .

مثال (١) أوجد ناتج ما يلي : أ) $\frac{٣}{٥} - \frac{٢}{٥}$ ، ب) $\frac{-٥}{٨} - \frac{٧}{١٢}$.

الحـــل : أ) $\frac{٣}{٥} - \frac{٢}{٥} = \frac{٣}{٥} + (-\frac{٢}{٥}) = \frac{١}{٥}$

ب) تذكر المضاعف المشترك الأصغر للعددين ٨ ، ١٢ هو ٢٤ .

$\therefore \quad \frac{-٥}{٨} - \frac{٧}{١٢} = \frac{-٥}{٨} + (\frac{-٧}{١٢}) = \frac{-١٥ + (-١٤)}{٢٤}$

$= \frac{-٢٩}{٢٤} = -١\frac{٥}{٢٤}$.

مثال (٢) احسب ما يلي : أ) ١٥,٠٥ – ١٢,٤ ،

ب) $٤\frac{١}{٢} - ٩\frac{١}{٤}$ ، جـ) $٤,٣ - ٣\frac{٧}{١٠}$.

الحـــل : أ) ١٥,٠٥ – ١٢,٤ = ٢,٦٥ .

ب) $\frac{١}{٢}$ ٤ − $\frac{١}{٤}$ ٩ = $\frac{٢}{٤}$ ٤ + (− $\frac{١}{٤}$ ٩) = − $\frac{٣}{٤}$ ٤

جـ) ٤,٣ − $\frac{٧}{١٠}$٣ = ٤,٣ + (−$\frac{٧}{١٠}$ ٣) = ٤,٣ + (− ٣,٧) = ٠,٦

تمارين ومسائل

أوجد ناتج ما يلي :

[١] أ) ٢٥ − ٤٦ ، ب) −٢٢٦ − ١٤٥ ، جـ) ٥٠٠ − (−٢٥٠)،

ء) $\frac{١}{١٢}$ − $\frac{١}{٢٠}$ ، هـ) $\frac{-٣}{١٤}$ − $\frac{٢}{٢١}$ ، و) −٤١٥ − (−١٢٥).

[٢] أ) $\frac{١}{٤}$٢ − $\frac{١}{٢}$ ٢ ، ب) $\frac{٣}{٨}$١٢ − (− $\frac{١}{٦}$ ٤) ،

جـ) − $\frac{٢}{٩}$ ١٥ − ($\frac{-١}{٤}$ ٧) ، ء) ٦,٢٥ − ٢٢,٤ .

[٣] أ) $\frac{٥}{٦}$١٩ − $\frac{٣}{٤}$ ٢٢ ، ب) ١٨,٦ − $\frac{٢}{٣}$١٤ ،

جـ) − $\frac{٣}{٨}$ ٤٩ − (−٣٢,٥) ، ء) ٣٤,٥ − (−٤٦,٣)

[٤] طريقان مجموع طوليهما $\frac{٤}{٩}$٧٢كم، فإذا كان طول أحدهما $\frac{١}{٢}$٣٣كم.
فما طول الآخر ؟

[٥] حديقتان مجموع مساحتيهما $\frac{٥}{٨}$ ٧٢٨٤م٢ . فإذا كانت مساحة إحداهما ٣٥٢٠,٧٥م٢ ، فما مساحة الأخرى ؟

٢ : ٧ ضرب الأعداد النسبية

تدريـــب أوجد حاصل ضرب ما يلي : ٤×٧ ، -٤×٧ ، $٤ \times (-٧)$ ،

$(-٤) \times (-٧)$ ، $\frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٧}$ ، $\frac{٤}{٣} \times \frac{٧}{٢}$.

تذكر قواعد الضرب في مجموعة الأعداد الصحيحة ، والأعداد الكسرية

عند ضرب الأعداد النسبية فأننا نطبق القواعد نفسها التي نستخدمها في ضرب الأعداد الكسرية والأعداد الصحيحة ، أي أن :

لكل عددين نسبيين $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ء}$ ، يكون $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{ء} = \frac{أ جـ}{ب ء}$ ، حيث ب ، ء $\neq$ ٠

حاصل ضرب عددين نسبيين موجبين أو سالبين هو عدد نسبي موجب .

حاصل ضرب عددين نسبيين أحدهما موجب والآخر سالب هو عدد نسبي سالب .

مثـــال أوجد حاصل ضرب ما يلي :

أ) $\frac{٢}{٩} \times \frac{٣}{٥}$ ، ب) $(-\frac{٣}{٤}٣) \times (-\frac{١}{٣}٥)$ ،

جـ) $(-٢,٥) \times ٣,٦$ ، ء) $١٠,٢ \times (-\frac{١}{٢}٧)$.

الحـــل :

أ) $\frac{٢}{\cancel{٩}_{٣}} \times \frac{\cancel{٣}^{١}}{٥} = \frac{٢}{١٥}$

ب) نحول $\left(-٣\frac{٣}{٤}\right)$ ، $\left(-٥\frac{١}{٣}\right)$ إلى الصورة $\frac{أ}{ب}$ ، ثم نقوم بعملية الضرب على النحو التالي :

$$\left(-٣\frac{٣}{٤}\right) \times \left(-٥\frac{١}{٣}\right) = \left(\frac{\cancel{-١٥}^{\,-٥}}{\cancel{٤}_{\,١}}\right) \times \left(\frac{\cancel{-١٦}^{\,-٤}}{\cancel{٣}_{\,١}}\right) = \frac{٢٠}{١} = ٢٠ \,.$$

ج) $(-٢,٥) \times ٣,٦ = -٩,٠٠$

$= -٩$

$$\begin{array}{r} (-٢,٥) \\ \times \quad ٣,٦ \\ \hline -١٥٠ \\ -٧٥٠ \\ \hline -٩,٠٠ \end{array}$$

د) $١٠,٢ \times \left(-٧\frac{١}{٢}\right) = ١٠\frac{\cancel{٢}^{\,١}}{\cancel{١٠}_{\,٥}} \times \left(-٧\frac{١}{٢}\right)$

$$= \frac{٥١}{\cancel{٥}_{\,١}} \times \left(-\frac{\cancel{١٥}^{\,٣}}{٢}\right) = \frac{-١٥٣}{٢} = -٧٦\frac{١}{٢}$$

خواص عملية الضرب على الأعداد النسبية :

أ) خاصية الانغلاق :

لاحظ من أمثلة الضرب أن حاصل ضرب أي عددين نسبيين هو عدد نسبي .

لكل عددين نسبيين $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ء}$ ، حيث ب ، ء $\neq ٠$

يكون $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{ء} \in ن$

وعليه فإن مجموعة الأعداد النسبية مغلقة تحت عملية الضرب .

ب) خاصية الإبدال :

لاحظ أن : $٢\frac{٣}{٥} \times ١\frac{١}{٤} = ١\frac{١}{٤} \times ٢\frac{٣}{٥}$.

لأي عددين نسبيين $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ء}$ (ب ≠ ، ء ≠ ٠) ،

يكون $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{ء} = \frac{جـ}{ء} \times \frac{أ}{ب}$

أي أن عملية ضرب الأعداد النسبية إبدالية .

جـ) خاصية التجميع :

لاحظ أن : $\left(\frac{٢}{٣} \times \frac{(-٣)}{٤}\right) \times \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٣} \times \left(\frac{(-٣)}{٤} \times \frac{١}{٢}\right)$

لأي ثلاثة أعداد نسبية $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ء}$ ، $\frac{هـ}{و}$ (حيث ب ≠ ٠ ، ء ≠ ٠ ، و ≠ ٠)

يكون $\left(\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{ء}\right) \times \frac{هـ}{و} = \frac{أ}{ب} \times \left(\frac{جـ}{ء} \times \frac{هـ}{و}\right)$

أي أن عملية ضرب الأعداد النسبية تجميعية .

ء) خاصية التوزيع :

لاحظ أن : $\frac{(-٢)}{٣} \times \left(\frac{٣}{٥} + \frac{١}{٢}\right)$

$$= \frac{(-٢)}{\cancelto{١}{٣}} \times \frac{\cancelto{١}{٣}}{٥} + \frac{(\cancelto{-١}{-٢})}{٣} \times \frac{١}{\cancelto{١}{٢}} .$$

$$= \frac{-٢}{٥} + \frac{(-١)}{٣} = \frac{-٦ + (-٥)}{١٥} = \frac{-١١}{١٥}$$

ولاحظ أن: $\frac{(-٢)}{٣} \times \left(\frac{٣}{٥} + \frac{١}{٢} \right) = \frac{(-٢)}{٣} \times \left(\frac{٦ + ٥}{١٠} \right)$

$$= \frac{\overset{-١}{(\cancel{-٢})}}{٣} \times \frac{١١}{\underset{٥}{\cancel{١٠}}} = \frac{-١١}{١٥}$$

$$\therefore \frac{-٢}{٣} \times \left(\frac{٣}{٥} + \frac{١}{٢} \right) = \left(\frac{-٢}{٣} \times \frac{٣}{٥} \right) + \left(\frac{-٢}{٣} \times \frac{١}{٢} \right)$$

$$= \left(-\frac{٢}{٥} \right) + \left(-\frac{١}{٣} \right) = \left(\frac{-٦}{١٥} \right) + \left(\frac{-٥}{١٥} \right) = \frac{-١١}{١٥}$$

لأي ثلاثة أعداد نسبية: $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ء}$ ، $\frac{هـ}{و}$ ، (حيث ب $\neq$ ٠ ،

ء $\neq$ ٠ ، و $\neq$ ٠) ،

يكون $\frac{أ}{ب} \times \left(\frac{جـ}{ء} + \frac{هـ}{و} \right) = \frac{أجـ}{بء} + \frac{أهـ}{بو}$.

أن عملية ضرب الأعداد النسبية توزيعية على عملية جمع الأعداد النسبية .

هـ) المحايد الضربي :

لاحظ أن : $١ \times \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} \times ١ = \frac{٢}{٣}$ ،

$$١ \times \frac{(-١)}{٥} = \frac{(-١)}{٥} \times ١ = \frac{-١}{٥} .$$

لأي عدد نسبي $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ ، ب $\neq$ ٠ ،

فإن $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} \times ١ = ١ \times \frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$

أي أن : الواحد الصحيح هو العنصر المحايد الضربي في مجموعة الأعداد النسبية .

و) النظير الضربي : لاحظ أن : $\frac{\overset{١}{\cancel{(-٢)}}}{\underset{١}{\cancel{٧}}} \times \frac{\overset{١}{\cancel{(٧)}}}{\underset{١}{\cancel{-٢}}} = ١$

$$-\frac{\overset{١}{\cancel{١٥}}}{\underset{١}{\cancel{٩}}} \times -\frac{\overset{١}{\cancel{٩}}}{\underset{١}{\cancel{١٥}}} = -١ \times -١ = ١$$

لأي عدد نسبي $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ ، (ب $\neq$ ٠ ، ا $\neq$ ٠) ،

فإن $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ب}}{\text{ا}} = ١$

أي أنه : إذا ضرب أي عدد نسبي في مقلوبه ، فإن حاصل الضرب يساوى العنصر المحايد الضربي .

ز) الضرب في الصفر :

لاحظ أن $\frac{٤}{٧} \times ٠ = ٠ \times \frac{٤}{٧} = \frac{٠}{٧} = ٠$

لأي عدد نسبي $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ ، (ب $\neq$ ٠) ، فإن $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} \times ٠ = ٠ \times \frac{\text{ا}}{\text{ب}} = ٠$

تمارين ومسائل

أوجد ناتج ما يلي :

[١] أ) $(-١٨) \times ٨$ ، ب) $(-٢٥) \times (-١٢)$ ،

جـ) $(-\frac{٥}{٧}) \times (-\frac{٢}{٣})$ ، ء) $(-\frac{١}{٤}) \times \frac{٤}{٩}$.

[٢] أ) $٢\frac{١}{٢} \times (٣\frac{-٢}{٥})$ ، ب) $(-٣\frac{١}{٧}) \times (-٤\frac{٢}{١١})$ ،

جـ) $(-٢\frac{٣}{٤}) \times (-١\frac{٥}{١١})$ ، ء) $(-٣{,}٥) \times ٤\frac{١}{٤}$.

[٣] أ) $(-٣\frac{٣}{٨}) \times (-٥\frac{٥}{٩})$ ، ب) $(-٢{,}٦) \times ٣{,}٠١$ ،

جـ) $٦{,}٢٥ \times (-٣{,}١٤)$ ، ء) $(-٤{,}١٥) \times (-١{,}١٢)$.

[٤] أ) $٧\frac{١}{٢} \times (-٢\frac{١}{٣}) \times ١$ ، ب) $(-١\frac{١}{٧}) \times (-٢{,}٥) \times (-٢\frac{٢}{٥})$ ،

جـ) $(-١{,}٥) \times ٢{,}٧٥ \times \frac{٤}{٩}$ ، ء) $٢{,}١ \times (-١{,}٢) \times (-٠{,}٥)$.

[٥] احسب مساحة المستطيل الذي طوله $١٢\frac{١}{٤}$م وعرضه ٦,٧٥م .

[٦] احسب مساحة المربع الذي طول قطره (١٠,٨)سم .

[٧] أكمل الفراغات التالية لتصبح كل من العبارات التالية صحيحة، مع ذكر السبب :

أ) $٢\frac{٣}{٥} \times ٣\frac{١}{٢} = ٣\frac{١}{٢} \times ...$

ب) $\dots \times (-٥\frac{١}{٤}) = (-٥\frac{١}{٤}) \times ١٢\frac{٤}{٩}$ ،

جـ) $\frac{٢}{٣} \times \dots = ١$ ، د) $-٨ \times \dots = ١$.

[٨] أوجد ناتج ما يلي :

أ) $٣\frac{١}{٢} \times (٢\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣})$ ، ب) $(-٤\frac{٢}{٣})(٢\frac{١}{٥} + ١,٨)$

جـ) $٥,٥ \times (٢\frac{١}{٢} + ٣\frac{٣}{٨})$ ،

د) $(-٦\frac{٢}{٦}) \times [(-٢,٢٥) + (-٤,٧٥)]$.

٢ : ٨ قسمة الأعداد النسبية

تعلم من قسمة الأعداد الصحيحة أن : $١٢ \div ٦ = ٢$. أي أن :

$$١٢ \div ٦ = \cancel{١٢}^{٢} \times \frac{١}{\cancel{٦}_{١}} = ٢ .$$

لاحظ أن $\frac{١}{٦}$ هو النظير الضربي للعدد ٦ .

تأمل الأمثلة التالية : $(-١٦) \div ٤ = (-١٦) \times \frac{١}{٤} = -٤$ ، حيث أن العدد $\frac{١}{٤}$ هو النظير الضربي للعدد ٤ ، فمثلاً :

$\frac{٤}{٩} \div \frac{٢}{٣} = \frac{\cancel{٤}^{٢}}{\cancel{٩}_{٣}} \times \frac{\cancel{٣}^{١}}{\cancel{٢}_{١}} = \frac{٢}{٣}$ ،حيث أن العدد $\frac{٣}{٢}$ هو النظير الضربي للعدد $\frac{٢}{٣}$.

وكذلك عند قسمة الأعداد النسبية ، نجد أن :

لكل عددين نسبيين $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$ ، (ب $\neq$ ٠ ، ء $\neq$ ٠)،

فأن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \div \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ء}}{\text{جـ}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{ء}} \neq ٠$

لاحظ أن : $\frac{\text{ء}}{\text{جـ}}$ **هو النظير الضربي للعدد** $\frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$.

مثـــــال أوجد خارج قسمة ما يلي :

أ) $\frac{٤}{٥} \div \frac{٥}{٨}$ ، ب) $(-٣\frac{٦}{١١}) \div \frac{٣}{٤}$ ،

جـ) $(-٢\frac{١}{٧}) \div (-٢,٥)$ ، ء) $١٤,٤ \div (-١,٢)$.

الحـــل :

أ) $\frac{٤}{٥} \div \frac{٥}{٨} = \frac{٤}{٥} \times \frac{٨}{٥} = \frac{٣٢}{٢٥}$

ب) $\frac{(-٣٩)}{١١} \div \frac{٣}{٤} = \frac{(-\cancel{٣٩}^{١٣})}{١١} \times \frac{٤}{\cancel{٣}_{١}} = \frac{-٥٢}{١١} = -٤\frac{٨}{١١}$

جـ) $(-٢\frac{١}{٧}) \div (-٢,٥) = (-٢\frac{١}{٧}) \div (-٢\frac{١}{٢})$

$= (-\frac{١٥}{٧}) \div (\frac{-٥}{٢})$

$= (-\frac{\cancel{١٥}^{٣}}{٧}) \times (\frac{-٢}{\cancel{٥}_{١}}) = \frac{٦}{٧}$

ء) $١٤,٤ \div (-١,٢) = ١٤٤ \div (-١٢) = -١٢$

تمارين ومسائل

أوجد ناتج ما يلي :

[١] أ) $-٢٤ \div ٦$ ب) $٤٧ \div (-٥)$ جـ) $\frac{١}{٢} \div \frac{٣}{٤}$

(٢) أ) $٢\frac{١}{٤} \div (-٢\frac{١}{٧})$ ب) $(-٣\frac{١}{٦}) \div (-٢\frac{١}{٩})$

جـ) $(-٤\frac{٣}{٨}) \div ٣\frac{٣}{٧}$ ، د) $(-٤\frac{٥}{٦}) \div (-١\frac{٧}{٢٩})$.

[٣] أ) $(-٣٠,٨٥) \div (-٢\frac{١}{٢})$ ، ب) $١٢٠,١٥ \div (-٨,٩)$ ،

جـ) $(-٨٩٩٢) \div ٦٤$ ، د) $٢٠,٧٥ \div (-٢\frac{٣}{٨})$ ،

[٥] عددان حاصل ضربهما $(-٩\frac{١}{٧})$ ، فإذا كان أحدهما يساوى $(-٢\frac{٢}{٧})$ ، فما هو العدد الأخر ؟

[٦] احسب طول ضلع المستطيل الذي محيطه $٧٥\frac{٤}{٩}$سم وعرضه $١٧\frac{١}{٢}$سم .

[٧] بُنيت حضانة للأطفال في أحد الأحياء على مساحة ٨٦٥م^{٢} . فأحسب طول الحضانة إذا علمت أن عرضها يساوى ٢٢,٢٥م حيث أن الحضانة على شكل مستطيل .

٢ : ٩ الجذر التربيعي والجذر التكعيبي لعدد نسبي

أ) الجذر التربيعي :

تعلم من دراستك السابقة أن : $٢ \times ٢ = ٢^٢ = ٤$ ، وأن العدد ٢ هو الجذر التربيعي للعدد ٤ وكذلك $٣ \times ٣ = ٣^٢ = ٩$ وأن العدد ٣ هو الجذر التربيعي للعدد ٩ .

وهناك مجموعة غير منتهية من الأعداد المربعة الكاملة مثل :

{ ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، .... } .

وقد تعرفت على كيفية إيجاد جذر أي عنصر من عناصر هذه المجموعة باستخدام التحليل .

والآن كيف يمكنك إيجاد جذور أعداد مثل ٠,١٦ ، ٠,٤٩ ؟

وللجواب على هذا السؤال تأمل ما يلي :

$$٠,١٦ = \frac{١٦}{١٠٠} = \frac{٤ \times ٤}{١٠ \times ١٠} = \frac{٤^٢}{١٠^٢}$$

وهذا يعني أن: $\sqrt{٠,١٦} = \sqrt{\frac{٤^٢}{١٠^٢}} = \frac{\sqrt{٤^٢}}{\sqrt{١٠^٢}} = \frac{٤}{١٠} = ٠,٤$

وبالمثل : $\sqrt{٠,٤٩} = \sqrt{\frac{٤٩}{١٠٠}} = \frac{\sqrt{٧^٢}}{\sqrt{١٠^٢}} = \frac{٧}{١٠} = ٠,٧$.

وبشكل عام :

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ عدد نسبي ، $ب > ٠$ ، $أ \geq ٠$ فإن: $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$

مثال (١) أوجد الجذر التربيعي لما يلي :

أ) ٠,٨١   ب) ٧٠,٥٦

الحـــل : أ) $\sqrt{٠,٨١} = \sqrt{\frac{٨١}{١٠٠}} = \frac{\sqrt{٩^{٢}}}{\sqrt{١٠^{٢}}} = \frac{٩}{١٠} = ٠,٩$

ب) $\sqrt{٧٠,٥٦} = \sqrt{\frac{٧٠٥٦}{١٠٠}}$

بتحليل العدد ٧٠,٥٦ إلى عوامله الاولية فإن :

٧٠٥٦	٢
٣٥٢٨	٢
١٧٦٤	٢
٨٨٢	٢
٤٤١	٣
١٤٧	٣
٤٩	٧
٧	٧
١	

$$\sqrt{\frac{٧٠٥٦}{١٠٠}} = \sqrt{\frac{٢^{٤} \times ٣^{٢} \times ٧^{٢}}{١٠^{٢}}}$$

$$\therefore \sqrt{٧٠,٥٦} = \sqrt{\frac{٢^{٤} \times ٣^{٢} \times ٧^{٢}}{١٠^{٢}}}$$

$$= \frac{٢^{\frac{٤}{٢}} \times ٣^{\frac{٢}{٢}} \times ٧^{\frac{٢}{٢}}}{١٠^{\frac{٢}{٢}}}$$

$$= \frac{٢^{٢} \times ٣ \times ٧}{١٠} = \frac{٨٤}{١٠} = ٨,٤$$

مثال (٢) أوجد الجذر التربيعي لكل مما يأتي :

أ) $٢ \frac{١}{٤}$ ب) $٥ \frac{١٩}{٢٥}$

الحل :

أ) $\sqrt{٢\frac{١}{٤}} = \sqrt{\frac{٩}{٤}} = \frac{\sqrt{٩}}{\sqrt{٤}} = \frac{٣}{٢} = ١\frac{١}{٢}$

ب) $\sqrt{٥\frac{١٩}{٢٥}} = \sqrt{\frac{١٤٤}{٢٥}} = \frac{\sqrt{١٤٤}}{\sqrt{٢٥}} = \frac{١٢}{٥} = ٢\frac{٢}{٥}$

لعلك لاحظت أن الأمثلة السابقة اقتصرت على الأعداد النسبية ، المربعة ولكن هناك أعداد نسبية غير مربعة ، يمكن إيجاد جذورها التربيعية بشكل تقريبي باستخدام الطريقة العامة لإيجاد الجذر التربيعي .

مثال (٣) أوجد $\sqrt{٥٤١,٨}$ مقربا إلى منزلة عشرية واحدة .

الحل :

١ – نجزئ منازل العدد إلى أزواج كما هو موضح $\overline{٠٥}\ \overline{٤١}\ ,\ \overline{٨٠}\ \overline{٠٠}$.

٢ – نأخذ دائماً أول زوج على يسار العدد وفي هذه العملية هو $\overline{٠٥}$ ونوجد جذره التربيعي لأكبر عدد صحيح وهو العدد ٢ ، ونكتب العدد ٢ في ناتج الجذر، ثم نجري عملية الضرب ٢ × ٢ كما هو مبين في العملية ونطرح ناتج الضرب من الزوج الأول $\overline{٠٥}$.

	٢٣,٢٧
٢	$\overline{٠٥}\ \overline{٤١}\ ,\ \overline{٨٠}\ \overline{٠٠}$
٢ ×	٤
٤٣ ←ناتج جمع ٢,٢	١٤١
٣×	١٢٩
٤٦٢	٠١٢٨٠
٢×	٠٩٢٤
٤٦٤٧	٣٥٦٠٠
٧×	٣٢٥٢٩
	٠٣٠٧١

٣– ننزل الزوج الثاني $\overline{٤١}$ إلى يمين الباقي ونجمع ٢ ، ٢ ونضع الناتج تحتهما مباشرة . .

٤– نبحث عن العدد الذي إذا وضع إلى يمين العدد ٤ ثم نضرب في الناتج يكون حاصل الضرب ١٤١ أو أقل منه وهذا العدد هو ٣ نكتب العدد ٣ في الناتج .

٥ – ثم نضرب ٣ × ٤٣ كما هو موضح ونطرح ناتج الضرب من ١٤١ فيكون الباقي ١٢ ، ثم نجمع ٣ + ٤٣ فيكون الناتج ٤٦ تحت ٤٣ مباشرة.

٦– نكتب الفاصله العشرية في ناتج الجذر ثم تنزل الزوج $\overline{٨٠}$ إلى يمين الباقي١٢ .

٧ – نبحث عن العدد الذي إذا وضع إلى يمين العدد ٤٦ وضرب في الناتج يكون حاصل الضرب يساوى أو يقل عن ١٢٨٠ وهذا العدد هو ٢ نكتب هذا العدد أيضاً في ناتج الجذر على يمين العلامة العشرية .

٨ – نضرب ٢ × ٤٦٢ = ٩٢٤ ونطرح من العدد ١٢٨٠ فيكون الباقي ٣٥٦ .

٩ – نستمر في إجراء هذه الخطوات إلى أن نحصل في ناتج الجذر على عدد من المنازل العشرية يزيد منزلة واحدة عن عدد المنازل المطلوب تقريب الجذر إليه .

∴ $\sqrt{٥٤١{,}٨}$ = ٢٣٫٢٧ ≈ ٢٣٫٣ مقرباً إلى منزلة واحدة .

ب) الجذر التكعيبي لعدد نسبي :

تعلم من دراستك السابقة أن الجذر التكعيبي للعدد ٢٧ هو العدد ٣ ، لأن ٣ × ٣ × ٣ = $٣^{٣}$ = ٢٧ كما تعلم أن رمز الجذر التكعيبي هو $\sqrt[٣]{}$.

فما هو الجذر التكعيبي للعدد –٦٤ ؟

لاحظ أن (– ٤) × (– ٤) × (– ٤) = ١٦ × (– ٤) = –٦٤

$$\therefore \sqrt[٣]{-٦٤} = \sqrt[٣]{(-١)^{٣} \times (٤)^{٣}} = (-١) \times ٤ = -٤$$

مثال (٤) أوجد الجذر التكعيبي لكل مما يأتي :

أ) $٣\frac{٣}{٨}$ ، ب) $-٤\frac{١٧}{٢٧}$ ، جـ) ٠,٠٦٤ ، ء) ‎-١٣,٨٢٤ .

الحل :

أ) $$\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}} = \sqrt[٣]{\frac{٢٧}{٨}} = \sqrt[٣]{\frac{(٣)^{٣}}{(٢)^{٣}}} = \frac{٣}{٢} = ١\frac{١}{٢}$$

ب) $$\sqrt[٣]{-٤\frac{١٧}{٢٧}} = \sqrt[٣]{\frac{-١٢٥}{٢٧}} = \sqrt[٣]{\frac{(-١)^{٣} \times (٥)^{٣}}{(٣)^{٣}}}$$

$$= \frac{(-١) \times ٥}{٣} = \frac{-٥}{٣} = -١\frac{٢}{٣} .$$

جـ) $$\sqrt[٣]{٠,٠٦٤} = \sqrt[٣]{\frac{٦٤}{١٠٠٠}} = \sqrt[٣]{\frac{(٤)^{٣}}{(١٠)^{٣}}} = \frac{٤}{١٠} = ٠,٤$$

ء) $$\sqrt[٣]{-١٣,٨٢٤} = \sqrt[٣]{\frac{-١٣٨٢٤}{١٠٠٠}} = \sqrt[٣]{\frac{(-١)^{٣} \times (٢)^{٩} \times (٣)^{٣}}{(١٠)^{٣}}}$$

$$= \frac{(-١)^{\frac{٣}{٣}} \times (٢)^{\frac{٩}{٣}} \times (٣)^{\frac{٣}{٣}}}{(١٠)^{\frac{٣}{٣}}}$$

$$= \frac{(-١) \times ٢^{٣} \times ٣}{١٠}$$

$$= \frac{(-١) \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٣}{١٠}$$

$$= \frac{(-١) \times ٨ \times ٣}{١٠}$$

$$= \frac{-٢٤}{١٠} = -٢,٤$$

١٣٨٢٤	٢
٦٩١٢	٢
٣٤٥٦	٢
١٧٢٨	٢
٨٦٤	٢
٤٣٢	٢
٢١٦	٢
١٠٨	٢
٥٤	٢
٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	

تمارين ومسائل

[١] أوجد الجذر التربيعي لكل مما يلي :

أ) ٢٥٦ ، ب) $١٢ \frac{١}{٤}$ ، جـ) $١٩ \frac{٩}{٢٥}$ ،

د) $٤٦ \frac{٦}{٤٩}$ ، هـ) ١١,٥٦ ، و) ٣٣١,٢٤ .

[٢] استخدم الطريقة العامة لإيجاد ما يلي (مقرباً الناتج إلى رقمين عشريين) :

أ) $\sqrt{٥}$ ، ب) $\sqrt{١٩}$ ، جـ) $\sqrt{٣٥٧,٢١}$ ، د) $\sqrt{٢٥٤٦}$.

[٣] أحسب ناتج ما يلي :

أ) $\sqrt[٣]{٢١٦}$ ، ب) $\sqrt[٣]{-٧٢٩}$ ، جـ) $\sqrt[٣]{١٨ \frac{٢٦}{٢٧}}$ ،

د) $\sqrt[٣]{-١٣\frac{١٠٣}{١٢٥}}$ ، هـ) $\sqrt[٣]{-١٥,٦٢٥}$ ، و) $\sqrt[٣]{٣٢,٧٦٨}$.

[٤] مربع مساحته ٣٣,٦٤ سم^{٢} . أوجد طول ضلعه .

[٥] خزان مكعب الشكل حجمه ١٣,٨٢٤ م^{٣} ، احسب طول ضلعه .

٢ : ١٠ تمارين ومسائل عامة

أوجد ناتج ما يلي :

[١] أ) $٢٢\frac{١}{٢} + ١٢\frac{١}{٣}$ ، ب) $١٤\frac{٥}{٦} + (-\frac{٣}{٨})$ ،

جـ) $٢١\frac{٣}{٤} + (-١١\frac{٤}{٥})$ ، د) $-١٣,٢ + ١٥\frac{٤}{٧}$

[٢] أ) $-١٨\frac{٤}{٩} + (-١٠\frac{١}{٤}) + ١٦\frac{٥}{١٢}$ ، ب) $٢٥\frac{١}{٢} - (-١٢\frac{٢}{٥})$ ،

جـ) $٤٥\frac{٢}{١١} - ٦٣\frac{١}{٢}$ ، د) $-٧٢\frac{٣}{٨} - ٣٧\frac{٢}{٣}$.

[٣] أ) $٣٤\frac{٢}{٩} - ١٩,٦$ ، ب) $٦٢,٠٤ - ١٨,٤$

جـ) $-٥٠,٧٥ + ٧١,٥$ ، د) $١٤,٠٠٨ - (-٤٢,٢٥)$.

[٤] أ) $٢\frac{١}{٣} \times ١\frac{١}{١٠}$ ، ب) $(-٣\frac{١}{٨}) \times ٢\frac{٢}{٣}$ ،

جـ) $٢\frac{١}{٣} \times (-١\frac{١١}{٣٨})$ ، د) $(-٢\frac{٤}{٥}) \times (-١\frac{١}{١٤})$.

[٥] أ) $٢,٧ \div ٣\frac{٤}{٧}$ ، ب) $(-\frac{٢}{٣}) \div (-١\frac{٥}{١٦})$

جـ) $(-\frac{٣}{٨}) \div ٣,٨$ ، د) $٢١ \div (-\frac{٧}{٩})$.

[٦] أ) $١٢\frac{١}{٣} \times ١\frac{٨}{٣٧} \times (-٢\frac{١}{٢})$ ،

ب) $(-٣\frac{٤}{٧}) \times (-٢\frac{١}{١٠}) \div (-١\frac{١}{٦})$

[٧] أ) $٣\frac{٢}{٥} \times (٢\frac{١}{٢} + ١\frac{١}{٢})$ ، ب) $٢\frac{٢}{٩} \times (٥\frac{٤}{٥} - ٦\frac{١}{٤})$

[٨] أ) $٢,١ \times (٠,٩ + ٠,١)$ ، ب) $(-٣,٢) \times (٢,٥ - ٣)$.

[٩] اكتب الأعداد التالية على صورة $\frac{أ}{ب}$:

٧ ، -٥ ، $٠,٣$ ، $٢\frac{١}{٢}$ ، $٠,\overline{٣٦}$ ، $١,\overline{٢٣٥}$.

[١٠] اكتب الأعداد النسبية الآتية بصورة عشرية :

أ) $\frac{٤}{٨}$ ، ب) $\frac{-٤}{٩}$ ، جـ) $\frac{٧}{٣٢}$.

[١١] قارن بين كل زوج من الأعداد النسبية التالية :

أ) $\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{٥}{١٢}$ ، ب) $\frac{-٣}{٨}$ ، $\frac{-٧}{٨}$ ، جـ) $\frac{-٣}{-٤}$ ، $٠,٧٥$

[١٢] رتب الأعداد النسبية الآتية تنازلياً مرة وتصاعدياً مرة أخرى .

$\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٥}{٦}$.

[١٣] اكتب أربعة أعداد نسبية تكافئ العدد $\frac{٥}{٩}$.

[١٤] اكتب ثلاثة أعداد نسبية بين :

أ) ٤,٦٢٥ ، $٤\frac{٥}{٦}$ ، ب) $٢\frac{٢}{٧}$ ، ٢,٦ .

[١٥] احسب قيمة كل مما يلي :

أ) $\sqrt{٣\frac{١}{١٦}}$ ، ب) $\sqrt{٦,٧٦}$

جـ) $\sqrt[٣]{١\frac{-٩١}{١٢٥}}$ ، ء) $\sqrt[٣]{١,٧٢٨}$

[١٦]أرضية مربعة الشكل ، مساحتها ١٥٣,٧٦م^{٢} . احسب طول ضلعها . ثم احسب محيطها .

[١٧] مستطيل مساحته $٦\frac{١}{٤}$م^{٢} . احسب عرضه إذا كان طوله $٣\frac{٣}{٤}$م ، ثم احسب محيطه .

[١٨] متوازي مستطيلات أبعاده $٣\frac{١}{٢}$سم ، $٢\frac{٣}{٤}$سم ، $٤\frac{٢}{٣}$سم ، احسب حجمه ، ثم احسب مساحته الجانبية .

[١٩] غرفة مكعبة الشكل حجمها ٣٢,٧٦٨م^{٣} . احسب مساحة أرضية الغرفة .

إختبار الوحــدة

[١] اكتب الأعداد النسبية التالية على صورة $\frac{أ}{ب}$ ، ومثلها على خط

الأعداد : -٢ ، $٠,\overline{١٦}$ ، $٢,٥$ ، $-٢\frac{١}{٤}$.

[٢] ضع علامة ($\surd$) أمام العبارة الصحيحة ،وعلامة (X) أمام العبارة الخاطئة

في كل مما يأتي مع تصويب الخطأ أينما وجد :

أ) $\frac{-٢}{-٥}$ عدد نسبي . (   ) ب) ص $\supset$ ن . (   )

جـ) $\frac{٧٥}{١٠٠} = -\frac{٣}{٤}$. (   ) ء) $٠,\overline{٣} = \frac{١}{٣}$. (   )

[٣] ضع أحد الرموز> أو < أو = في $\boxed{}$ لتحصل على عبارات صحيحة .

أ) $\frac{٢}{٧} \boxed{} \frac{٥}{٧}$ ، ب) $\frac{-١٩}{-٢٦} \boxed{} \frac{-١٥}{-٢٦}$ ،

جـ) $\frac{-٣}{٨} \boxed{} -\frac{١٢}{٢٤}$ ، ء) $\frac{٣}{٧} \boxed{} \frac{٩}{٢٠}$.

[٤] أوجد ناتج ما يلي :

أ) $\frac{٧}{٩} - (-\frac{٣}{٩})$ ، ب) $\frac{١}{٤}٢ + ٣,٥٢$ ،

جـ) $\frac{-٦}{١١} \times \frac{١}{٣}٢$ ، ء) $\frac{١}{٥}٢ \div ٢,٣$.

[٥] احسب قيمة ما يلي : أ) $\sqrt{\frac{٧}{٩}٢}$ ، ب) $\sqrt[٣]{٠,٣٤٣}$.

الوحدة الثالثة
المقادير الجبرية

٣ : ١ مراجعة

تذكر أن المقدار الجبري عبارة عن تعبير جبري مكوّن من حد أو أكثر ،فمثلاً :

٣ س^{٢} ص ، ٢ ص + ع ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{جـ}}$ ، −٤ ، $\frac{\text{س}^{٢} + \text{٢ س} - \text{١}}{\text{س} + \text{١}}$ ، س مقادير جبرية. تلاحظ أن الحدود في هذه المقادير الجبرية، إما أن تكون أعداد أو متغيرات أو تشير إلى حاصل ضرب أو خارج قسمة لأعداد أو متغيرات.

تدريب

(١) أذكر مكونات الحدود الجبرية الآتية:

$\frac{\text{٤}}{\text{٥}}$ س ، − ٨ص ، ٦ س ص ، س^{٢}ص ، ٥ .

(٢) أذكر عدد الحدود في كل من المقادير الجبرية الآتية:

٧ س − ٩ص ، ٣ س ص ، ٢ أ ب + $\frac{\text{١}}{\text{٥}}$ جـ + ٣ .

مثال (١) بسّط المقدار الآتي:

٣ س + ٢ أ + ص + ٤ أ + ٢ س + ٥ص − أ .

الحل : ٣ س + ٢ أ + ص + ٤ أ + ٢ س + ٥ص − أ .

= (٣ س + ٢ س) + (٢أ + ٤أ − أ) + (ص + ٥ص)

= ٥ س + ٥ أ + ٦ ص

لاحظ أننا جمعنا الحدود الجبرية المتشابهة .

مثال (٢) أوجد المجموع :

١٤س − ٣ س^{٣} + ١٥ ، ٢س^{٣} − ١١س^{٢} + ٢ س ، ٦ س^{٣} − ٨ + ٣س^{٢} .

الحـــل : نرتب المقادير تنازلياً حسب أسس س ، ثم نجمع رأسياً :

	− ٣ س^{٣}		+ ١٤س	+ ١٥
	٢س^{٣}	− ١١س^{٢}	+ ٢ س	
	٦س^{٣}	+ ٣س^{٢}		− ٨
المجموع =	٥س^{٣}	− ٨س^{٢}	+ ١٦س	+ ٧

لاحظ أننا تركنا مكاناً فارغاً للحد الناقص في المقدار .

مثال (٣) ما زيادة المقدار ٣س^{٢} − ٥ + ٢ س عن المقدار ٧ س^{٢} − س −٣ ؟

الحـــل : نرتب المقدارين تنازلياً حسب أسس س ، ثم نطرح رأسياً .

٣س^{٢} + ٢ س −٥	⟸	٣س^{٢} + ٢ س − ٥
− (٧ س^{٢} − س − ٣)		− ٧ س^{٢} + س + ٣
مقدار الزيـادة =		− ٤س^{٢} + ٣ س − ٢

ويمكن أن نوجد ناتج الطرح مباشرة بتغيير إشارة كل حد من حدود المطروح

كما يلي :

٣س^{٢} + ٢ س − ٥
∓ ٧ س^{٢} ± س ± ٣
―――――――――――
−٤ س^{٢} + ٣ س −٢

تمارين ومسائل

[١] بسّط المقادير الآتية :

أ) ٥ ع ل + ٦ أ ب −٣ ع ل + ٩أ ب

ب) ٧ س ص + ٢ س ل م + ٥ س ص + س ص + س ل م

جـ) ٣ س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٤ س^{٢} − ٣ ص^{٢} − س^{٢} .

[٢] اجمع : ٣س^{٢} − س^{٣} + ٢ س −١ مع ٢ س^{٣} − ٧س + ٣ + ٢ س^{٢} .

[٣] اطرح : ١٦ + ٢ س^{٢} + ٣ س من ١٢س − ٣ س^{٢} + ١٥ .

[٤] اجمع :٣ ص^{٢} + ٢ ص مع ص^{٢} +٢،ثم اطرح الناتج من ٥ص^{٢} + ٣ص +١ .

[٥] من ٣ أ^{٣} ب^{٣} + ٢ أ ب + ٣ أ^{٢} ب^{٢} اطرح أ^{٢} ب^{٢} + ٥ أ^{٣} ب^{٣}+ أ ب ،
ثم أوجد القيمة العددية للناتج عندما أ = ١ ، ب = ٢ .

[٦] ما المقدار الذي إذا طرح من : ٢ ب + جـ −٢ أ ، كان الناتج مساوياً
٣ أ + ب − جـ ؟

[٧] ما زيادة المقدار : ٥ ص^{٢} −١٥ + ١٢ ص عن مجموع المقدارين :
ص + ٧ ص^{٢} +١ ، ٣ ص^{٢} − ٢ص + ٤ ؟

[٨] مستطيل طوله س سم ، وعرضه (س − ٢) سم . أوجد محيطه .

[٩] معين طول ضلعه (٣ س + ٥) سم ، فما محيطه؟

[١٠] مثلث أطوال أضلاعه س ، ٣ س + ٢ ، س + ٥ من السنتيمترات
أوجد محيطه.

[١١] إذا كان عمر فاطمة الآن س سنة ، وعمر سميرة يزيد عن عمر فاطمة بأربع سنوات .

أ) ما عمر سميرة الآن؟ ، ب) ما مجموع عمري فاطمة وسميرة الآن؟

جـ) ما عمر فاطمة بعد ٥ سنوات ؟ ، ء)ما عمر سميرة بعد ٥ سنوات؟

هـ) ما مجموع عمري فاطمة وسميرة بعد ٥ سنوات ؟

٣ : ٢ ضرب مقدار جبري في حد جبري

تدريب أوجد حاصل ضرب : ٢ س ، ٣ س^{٢} ص

لإيجاد حاصل ضرب حد جبري في مقدار جبري نستخدم خاصية التوزيع، فعند ضرب ٣ س في (٢ س+ ٤ س ص) ، فإننا نكتب حاصل الضرب على النحو التالي :

٣ س (٢ س+ ٤ س ص)

= (٣س × ٢ س + ٣ س × ٤س ص) (باستخدام خاصية التوزيع)

= ٦ س^{٢} + ١٢ س^{٢} ص .

عند ضرب حد جبري في مقدار جبري نضرب هذا الحد في كل حد من حدود المقدار الجبري (باستخدام خاصية التوزيع) .

مثال (١) أوجد ناتج الآتي :

أ) ٤ س (٢س + س ص) .

ب) (٢ أ^{٢} ب^{٢} – ٥ أ^{٣} ب + ٣ جـ^{٢}) (– ٤ أ ب جـ) .

الحـــل :

أ) ٤ س (٢ س + س ص) = (٤ س × ٢ س) + (٤ س × س ص)

= ٨ س^{٢} + ٤ س^{٢} ص .

ب) (٢ أ^{٢} ب^{٢} – ٥ أ^{٣} ب + ٣ جـ^{٢}) (–٤ أ ب جـ)

= (٢ أ^{٢} ب^{٢} × – ٤ أ ب جـ) – (٥ أ^{٣} ب × –٤ أ ب جـ) + (٣ جـ^{٢} × – ٤ أ ب جـ)

= (–٨ أ^{٣} ب^{٣} جـ + ٢٠ أ^{٤} ب^{٢} جـ – ١٢ أ ب جـ^{٣}) .

ويمكن أن تنظم عملية الضرب رأسياً كما يلي :

أ) ٢ س + س ص

× ٤ س

---

٨ س^{٢} + ٤ س^{٢} ص

ب) ٢ أ^{٢} ب^{٢} – ٥ أ^{٣} ب + ٣ جـ^{٢}

× –٤ أ ب جـ

–٨ أ^{٣} ب^{٣} جـ + ٢٠ أ^{٤} ب^{٢} جـ –١٢ أ ب جـ^{٣}

مثال (٢) إذا كانت : أ = ٢ ، ب = $\frac{١}{٢}$

فما القيمة العددية لحاصل الضرب ٤ أ^{٢} ب (أ + ب^{٢}) ؟

الحـــل : حاصل الضرب = ٤ أ^{٢} ب (أ + ب^{٢})

= ٤ أ^{٣} ب + ٤ أ^{٢} ب^{٣} .

∴ قيمة حاصل الضرب = ٤ × ٢^{٣} × $\frac{١}{٢}$ + ٤ × ٢^{٢} × ($\frac{١}{٢}$)^{٣}

= ٤ × ٨ × $\frac{١}{٢}$ + ٤ × ٤ × $\frac{١}{٨}$.

= ١٦ + ٢ = ١٨

ويمكن التعويض مباشرة ، ثم حساب قيمة المقدار ، ونترك هذا التعويض للطالب .

مثال (٣) مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٥ سم،ما مساحته بدلالة س؟

نفرض أن العرض = س سم

∴ الطول = (س + ٥) سم .

مساحة المستطيل = الطول × العرض

= (س + ٥) (س) = (س^{٢} + ٥ س) سم^{٢} .

تمارين ومسائل

[١] حاصل ضرب ٧ س ص في (٢ س^{٢} − $\frac{١}{٧}$ س ص^{٢}) هو:

أ) ١٤ س^{٢} ص^{٢} − س^{٢} ص^{٣} ، ب) ١٤ س ص − س^{٣} ص^{٢} ،

جـ) ١٤ س^{٣} ص − س^{٢} ص^{٣} ، ء) ١٤ س ص^{٣} − س^{٢} ص^{٢} .

[٢] أوجد ناتج الآتي:

أ) ا (٣ ا + ٤ ب جـ) ،

ب) $\frac{١}{٢}$ ل م (٤ ل م^{٢} − ٦ ل م + ١٨ ل^{٢}) ،

جـ) (س^{٢} − ٣ س ص − ٥ ص^{٢}) (− س ص) .

[٣] اختصر المقادير التالية لأبسط صورة:

أ) ٢ ا (ا + ٥) + ٣ ا (٤ ا^{٢} − ٣) − ٥ ا (٢ ا^{٢} + ا + ٣)،

ب) ٣ س (١ − ٢ س) − (س^{٢} − ٥ س + ٣) + ٢ س (س + ٣)

جـ) (٢٧ أ^٢ + ٩ أ ب^٢) ($\frac{١}{٩}$ أ) + أ ب^٢ (٢ أ + ٥ ب) .

[٤] أكمل الفراغات التالية لتصبح العبارة صحيحة :

أ) ٢ س (ص – ع) = (........ – ....) ،

ب) ٥ س (........ + ع^٢) = (١٥ س ص + ...) ،

جـ) (٢ م – ٤م^٢ + ...) (–٢ م^٣) = (.... + ... – ١٠م^٦) .

[٥] إذا كان ثمن المتر من القماش س ريالاً ، فما ثمن (١٠س + ٤) متراً من القماش؟

[٦] عددان طبيعيان أصغرهما ٥ أ والآخر يزيد عنه بمقدار ٤ ب ،فإذا كانت أ = $\frac{١}{٢}$ ، ب = ١ . فما القيمة العددية لحاصل ضربهما ؟

[٧] حديقة أطفال مستطيلة الشكل عرضها ٥ س متر ، وطولها يزيد عن عرضها بمقدار ٣ متر . فأوجد مساحتها .

[٨] مثلث طول قاعدته (س + ٥)سم وارتفاعه ٢ س سم . فما مساحته؟

[٩] متوازي أضلاع ارتفاعه ٣ ص سم وطول قاعدته (٢ ص^٢ +٥ص + ١)سم . فما مساحته ؟

[١٠] مثلث ارتفاعه ٨ س سم وطول قاعدته (س + $\frac{١}{٢}$ ص) سم ، أوجد مساحته .

[١١] ثلاثة أعداد أولها س ، وثانيها ضعف الأول ، وثالثها يزيد عن ثانيها بمقدار ٢ ص . فما حاصل ضربهما ؟ ثم احسب القيمة العددية لحاصل الضرب إذا كانت س = ٣ ، ص = $\frac{١}{٢}$.

٣ : ٣ قسمة مقدار جبري على حد جبري

تأمل ما يلي :

لإِيجاد خارج قسمة مقدار جبري على حد جبري نتبع الآتي :

(س^٢ص + ٤ س ع) ÷ س = (س^٢ ص + ٤ س ع) × $\frac{١}{س}$ (نحول القسمة إِلى ضرب) .

$$= \frac{س^٢ ص + ٤ س ع}{س} = \frac{س^٢ ص}{س} + \frac{٤ س ع}{س}$$

$$= \frac{س \times س \times ص}{س} + \frac{٤ \times س \times ع}{س} = (س ص + ٤ ع)$$

لاحظ إِننا قسمنا كل من حدي المقدار (س^٢ص + ٤ س ع) على الحد (س) ويمكن التأكد من صحة الحل بضرب المقسوم عليه (س) في خارج القسمة (س ص + ٤ ع) ، فنحصل على المقسوم (س^٢ص + ٤ س ع) .

وعموماً :

عند قسمة مقدار جبري على حد جبري لا يساوي الصفر ، نقسم كل حد من حدود المقدار الجبري على هذا الحد .

تذكر عند قسمة حد جبري على حد جبري نطرح أسس المتغيرات المتساوية بدلاً من اختصارها .

فمثلاً : $س^{٣} \div س^{٣} = \frac{س^{٣}}{س^{٣}} = س^{٣-٣} = س^{٠} = ١$.

ملاحظة :

$$س^{٠} = ١ \quad ، \quad س \neq ٠$$

مثال (١) أقسم (٦ $س^{٥}$ + ٤ $س^{٣}$ ص) على ٢ $س^{٢}$.

الحل : $(٦س^{٥} + ٤س^{٣} ص) \div ٢س^{٢} = \frac{٦ س^{٥} + ٤س^{٣} ص}{٢ س^{٢}}$

$$= \frac{٦ س^{٥}}{٢ س^{٢}} + \frac{٤س^{٣} ص}{٢ س^{٢}}$$

$$= \frac{٦}{٢} س^{٥-٢} + \frac{٤}{٢} س^{٣-٢} ص$$

$$= ٣ س^{٣} + ٢ س ص \ .$$

التحقق :

$(٣س^{٣} + ٢ س ص) \times ٢ س^{٢} = (٣س^{٣} \times ٢ س^{٢} + ٢ س ص \times ٢س^{٢})$

$= ٦س^{٥} + ٤س^{٣} ص$.

مثال (٢) أوجد ناتج الآتي:

أ) (٧ $ل^{٢}$ $م^{٣}$ + ١٤ $ل^{٣}$$م^{٢}$ + ٣٥ $ل^{٤}$ م) ÷ ٧ $ل^{٢}$ م ،

ب)($\frac{٣}{٤}$ س $ص^{٤}$ ^{٢} − $\frac{١}{٢}$ $س^{٣}$$ص^{٣}$) ÷ ($\frac{١}{٨}$ $س^{٣}$ ص) .

الحـــل : أ) (٧ ل^{٢} م^{٣} + ١٤ ل^{٣} م^{٢} + ٣٥ ل^{٤} م) ÷ ٧ ل^{٢} م .

$$= \frac{٧\ ل^{٢}\ م^{٣} + ١٤\ ل^{٣} م^{٢} + ٣٥\ ل^{٤} م}{٧\ ل^{٢}\ م} .$$

$$= \frac{٧\ ل^{٢}\ م^{٣}}{٧\ ل^{٢}\ م} + \frac{١٤\ ل^{٣} م^{٢}}{٧\ ل^{٢}\ م} + \frac{٣٥\ ل^{٤} م}{٧\ ل^{٢}\ م} ،$$

$$= \frac{٧}{٧}\ ل^{٢-٢}\ م^{٣-١} + \frac{١٤}{٧}\ ل^{٣-٢} م^{٢-١} + \frac{٣٥}{٧}\ ل^{٤-٢}\ م^{١-١}$$

$$= (\ م^{٢} + ٢\ ل\ م + ٥\ ل^{٢})$$

وعلى الطالب التحقق من صحة الحل

ب) ($\frac{٣}{٤}$ س^{٤} ص^{٢} – $\frac{١}{٢}$ س^{٣} ص^{٣}) ÷ ($\frac{١}{٨}$ س^{٣} ص)

$$= \frac{\frac{٣}{٤}\ س^{٤}\ ص^{٢} - \frac{١}{٢}\ س^{٣} ص^{٣}}{\frac{١}{٨}\ س^{٣} ص} .$$

$$= \frac{\frac{٣}{٤}\ س^{٤}\ ص^{٢}}{\frac{١}{٨}\ س^{٣} ص} - \frac{\frac{١}{٢}\ س^{٣} ص^{٣}}{\frac{١}{٨}\ س^{٣} ص} .$$

$$= \frac{٣}{٤} \times \frac{٨}{١}\ س^{٤-٣}\ ص^{٢-١} - \frac{١}{٢} \times \frac{٨}{١}\ س^{٣-٣}\ ص^{٣-١}$$

$$= ٦\ س\ ص - ٤\ ص^{٢} .$$

مثال (٣) مثلث مساحته (٨ س^{٢} + ٤ س ص) سم^{٢}، وارتفاعه ٨ س سم، احسب طول قاعدته .

الحل : مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

(٨ س^{٢} + ٤ س ص) = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × (٨ س) (بضرب الطرفين ×٢)

٢ (٨ س^{٢} + ٤ س ص) = ٢ × $\frac{١}{٢}$ القاعدة × (٨ س)

(١٦ س^{٢} + ٨ س ص) = القاعدة × ٨ س (بقسمة الطرفين على ٨ س)

∴ طول القاعدة = $\frac{١٦ س^{٢} + ٨ س ص}{٨ س}$ ،

$= \frac{١٦ س^{٢}}{٨ س} + \frac{٨ س ص}{٨ س} = \frac{١٦}{٨} س^{٢-١} + \frac{٨}{٨} س^{١-١} ص$

= (٢ س + ص) سم

تماريـن ومسائـل

[١] أوجد خارج قسمة كل مما يأتي :

أ) (٥ أ^{٢} + ١٠ أ ب) على ٥ ،

ب) (١٢ س^{٣} + ١٥ س^{٢} ص – ٦ س^{٢} ص^{٢}) على (–٣ س^{٢}) ،

جـ) ($\frac{٣}{٨}$ ء^{٤} هـ^{٢} – $\frac{٣}{٤}$ ء^{٢} هـ^{٤} + ٣ ء^{٢} هـ^{٢}) على $\frac{٣}{٨}$ ء^{٢} هـ^{٢} ،

ء)(١٢س^٥^ص^٣^ + ١٨س^٤^ص^٢^ – ٢٤س^٣^ص^٤^ – ٣س^٢^ص^٥^)على (٦س^٢^ص^٢^)

[٢] بسط كلا مما يأتي :

أ) $\frac{\text{٣س}^{٣} - \text{٤ س}^{٢}}{\text{س}}$ ، ب) $\frac{\text{٢٤س}^{٣}\text{ص ع} - \text{١٢ س ص}^{٢}}{\text{٣ س ص}}$ ،

جـ) $\frac{\text{٢٧ ل}^{٢}\text{ن} + \text{٩ ل}^{٣}\text{م ن}^{٢} - \text{٦ ل}^{٤}\text{ن}^{٢}}{-\text{٣ ل ن}}$.

[٣] اقسم (٦٤ س^٣^ ل – ٢٤س^٢^ ص ل^٣^ + ١٦ س ل) على (٨ س ل) .

[٤] أكمل الفراغات التالية لتكون العبارات صحيحة :

أ) (٣ س^٢^ ل + ٢٧ ل ص^٢^) ÷ ٣ ل = (........ + ٩ ص^٢^) ،

ب) (أ^٢^ ب^٢^ – ..... + ٥ أ^٢^جـ) ÷ ٤ أ^٢^ = (.....–٢ أ جـ + ...) ،

جـ) (٢٤ ل^٢^ م^٢^ – ٦ ل^٣^ + ...) ÷ (–٦ل^٢^) = –... + ... –٢ل م^٢^

[٥] أوجد خارج قسمة (٦س^٢^ + ١٨ ص + ١٢ ع) على ٣ ثم أوجد القيمة العددية لخارج القسمة إذا كانت س = ٢ ، ص = $\frac{١}{٣}$ ، ع = $\frac{١}{٢}$.

[٦] اضف خارج قسمة المقدار (س^٣^ص – ٧ س ص + ٢ س^٢^ ص^٢^) على (– س ص) إلى المقدار (٢ س ص – ٥ س^٢^ + ٣ ص^٢^) ، ثم أوجد القيمة العددية للناتج إذا كانت س = $\frac{-١}{٢}$ ، ص = $\frac{١}{٣}$.

[٧] متوازي أضلاع مساحته (١٥ س^٣^ ص – ١٠س^٢^ ص^٢^)سم^٢^ ، فإذا كان طول قاعدته (٥ س^٢^ ص) سم ، فما ارتفاعه؟

[٨] أقسم (١٦س^٣^ + ٨س – ١٢س^٢^) على (٤س) ، ثم اجمع الناتج مع (٣ س – س^٢^ + ٧) .

[٩] إذا كان حاصل ضرب عددين يساوي (٤ س^{٣} ص^{٢} + ١٢ س^{٢} ص^{٥}) ، وكان أحدهما (٤ س ص^{٢}) ، فما العدد الآخر؟

[١٠] عددان حاصل ضربهما (٦ س^{٢} ص + ٢ ص^{٢}) ، وأحدهما ٢ ص ، فما العدد الآخر ؟

[١١] حجم متوازي مستطيلات (١٦ ﺃ^{٢} ب + ٨ ﺃ^{٢} ب^{٢}) سم^{٣} ، فإذا كانت مساحة قاعدته (٨ ﺃ^{٢} ب) سم^{٢} ، فما ارتفاعه ؟

[١٢] متوازي أضلاع مساحته (٣٥ س^{٢} ص – ٤٢ س^{٣} ص^{٢}) سم^{٢} ، وارتفاعه (٧ س ص) سم ، فما طول قاعدته ؟

٣ : ٤ ضرب المقادير الجبرية

تدريب تذكر ما تعلمته عن ضرب حد جبري في مقدار جبري، وأكمل الفراغ :

س (س + ٧) = ... + ...

٢ ﺃ (٢ ب + جـ) = ... + ...

٣ ص (ﺃ + ٣ ب – ٢ جـ) = ... + ... – ....

ما هي الخاصية التي استخدمتها لإيجاد ما سبق ؟

ولايجاد حاصل ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر، نستخدم خاصية توزيع الضرب على الجمع أكثر من مرة كما في الأمثلة الآتية :

مثال (١) اضرب المقدار (س + ص) في المقدار (م + ن) .

الحل : (س + ص)(م + ن) = س(م + ن)+ص (م +ن)(خاصية التوزيع) .

= (س م + س ن) + (ص م + ص ن) (خاصية التوزيع) .

لا حظ أن حاصل ضرب مقدارين جبريين يساوي مجموع حاصل ضرب كل حد من المقدار الأول في كل حد من المقدار الآخر ويمكن اتمام عملية الضرب السابقة رأسياً كما يلي :

م + ن

X س + ص

س م + س ن حاصل ضرب س في (م + ن)

+ ص م + ص ن حاصل ضرب ص في(م + ن)

س م + س ن + ص م + ص ن = المجمــوع

مثال (٢) اضرب (س + ٣) في (س^{٣} – ٢س^{٢} + ٤)

الحـــل : أفقياً :

(س +٣) (س^{٣} – ٢س^{٢} + ٤) = س (س^{٣} – ٢س^{٢} +٤) + ٣(س^{٣} – ٢س^{٢} +٤)

= س^{٤} – ٢س^{٣} + ٤ س + ٣ س^{٣} – ٦س^{٢} + ١٢ (تجميع الحدود المتشابهة)

= س^{٤} + س^{٣} – ٦س^{٢} + ٤ س + ١٢

رأسياً : نرتب كلاً من المقدارين تنازلياً حسب أسس س على النحو التالي :

س^{٣} – ٢س^{٢} +٤

X س + ٣

س^{٤} – ٢ س^{٣} + ٤ س

٣س^{٣} – ٦س^{٢} + ١٢

س^{٤} + س^{٣} – ٦س^{٢} + ٤ س +١٢

أي أن : $(س + ٣)(س^{٣} - ٢س^{٢} + ٤) = س^{٤} + س^{٣} - ٦س^{٢} + ٤\,س + ١٢$

لاحظ أهمية ترتيب الحدود تنازلياً حسب أسس المتغير في المقدارين الجبريين مع ترك مكان فارغ للحد غير الموجود عند إجراء الضرب رأسياً .

إذا كان أحد المقدارين المضروبين في بعضهما أو كليهما مكوناً من أكثر من حدين فإنه يفضل إجراء عملية الضرب رأسياً، ونختار المقدار الذي عدد حدوده أكبر ليكون مضروباً والمقدار الآخر مضروباً فيه .

تمارين ومسائل

[١] أوجد ناتج ما يأتي :

أ) $٣\,س\,(٢س^{٢} + ٥)$ ، ب) $(م + ن)(هـ + و)$ ،

جـ) $(س + ص)(٢\,س + ٣ص)$ ، ء) $(٢\,س - ٣ص)(٢\,س + ٣\,ص)$

[٢] أكمل عملية الضرب لتصبح العبارات صحيحة :

أ) $(س + ص)(٢\,س + ٣ص) = ٢\,س^{٢} + ٣\,س\,ص + ٢\,ص\,س + ...$

ب) $(٤\,أ + س)(٥س - ٣\,أ) = ... - ١٢أ^{٢} + ٥س^{٢} - ....$

جـ) $(٢\,أ^{٢} - ٣\,ب^{٢})(أ^{٢} - ب) = ٢\,أ^{٤} - ... - ٣\,ب^{٢}أ^{٢} + ...$

[٣] أوجد حواصل الضرب الآتية:

أ) $(س^{٢} + ١)(١ - س)$ ، ب) $(ص^{٢} + ٧)(٢\,ص^{٣} + ص^{٢} - أ)$

جـ) $(س + ص)^{٢}$ ، ء) $(٢\,س + ١)(٢س + ١)(٢س + ١)$

هـ) $(٢\,س^{٢} + ٣س)(٢\,س^{٣} - ٣\,س^{٢} + ٥س - ١)$.

[٤] أكمل الحدود الناقصة لتكون عملية الضرب صحيحة :

أ) $(س + ٥)(س + ...) = س^{٢} + ... + ... + ١٥$

ب) (....+ ٣) (س – ....) = ٢ س^{٢} – ٦ ٲ س + ... – ....

جـ) (.... +٥) (س + ...) = س^{٢} + ٧ س + ... + ٣٥

ء) (٣ ع + ...) (..... + ٣) = ٣ ع^{٢} + ... + ... + ١٢

[٥] أوجد حاصل ضرب (ٲ + ب – ٢) في (ٲ + ب + ٢) ، ثم أوجد القيمة العددية للناتج عندما ٲ = ٣ ، ب = ٤

[٦] اختصر : (س + ٢ ص)^{٢} – (٢ س + ص)^{٢} .

[٧] اختصر المقدار : (س + ص)^{٢} – (س – ص)^{٢} + ص (٣ ص – س) لأبسط صورة ثم أوجد قيمته العددية عندما س = –٢ ، ص = ١ .

[٨] احسب ما يأتي :

ٲ) ($\frac{١}{٣}$ س^{٢} – ٤ س + ٢) (٩ – $\frac{٣}{٢}$ س + ٦ س^{٢}) ،

ب) (٢ س – ٣ ٲ + ١) (٤ ٲ – ٥ س + س^{٢}) ،

جـ) (٢,٥ س + ٤,٥ ص) (٢,٥ س – ٤,٥ ص) ،

ء) (س + ص) (س^{٢} + ص^{٢}) (ٲ + ب) .

[٩] إذا كان : س = ٢ ٲ + ٥ ب ، ص = ٢ ٲ – ٥ ب ، فأثبت أن :

س ص – ص^{٢} = ١٠ ب ص .

[١٠] إذا كان : ك = (س + ص) ، ل = (س – ص) ، فأثبت أن :

ك^{٢} + ل^{٢} = ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} .

[١١] حديقة أطفال مربعة الشكل طول ضلعها (س + ٥) متر ؛ أوجد مساحتها .

[١٢] حديقة مسجد مستطيلة الشكل طولها (ص + ٥) من الأمتار وعرضها (ص – ٣) من الأمتار أوجد : ٲ) محيطها ، ب) مساحتها .

[١٣] حـوض زهور دائري الشكل نصف قطره (ع – ١) من الأمتار أوجد مساحته علماً بأن : $\pi = \frac{٢٢}{٧}$.

[١٥] مقداران جبريان أحدهما (٣ $س^٢$ – ٤س) ، والآخر يزيد عن الأول بمقدار ٥ ، أوجد حاصل ضربهما .

٣ : ٥ قسمـــة المقاديـــر الجبريـــة

تعرفت أن عملية القسمة هي عملية عكسية لعملية الضرب ، فمثلاً :

$س^٦$ ÷ $س^٥$ = س ، لأن $س^٥$ × س = $س^٦$.

كذلك : ($س^٣$ + ٣س) ÷ س = ($س^٢$ + ٣) لأن س ($س^٢$ + ٣)

= ($س^٣$ + ٣س) .

تدريـــــب

أ) ما خارج قسمة ($س^٢$ – س – ٢) على (س + ١) ؟

ب) هل حاصل ضرب (س – ٢) في (س +١) = ($س^٢$ – س – ٢)؟

ولإيجاد خارج قسمة مقدار جبري على مقدار جبري آخر نتبع الخطوات الموضحة في الأمثلة الآتية :

مثال (١) اقسم ٢ $س^٢$ + ٩ س + ٤ على س + ٤ .

الحل : نخطط هذه القسمة كما سبق تخطيط القسمة المطولة على النحو التالي، ثم نجري عملية القسمة وفق الخطوات التالية :

(١) نقسم $٢س^{٢}$ على س فيكون الناتج ٢ س

(٢) نضرب ٢س في المقسوم عليه فنحصل على ← $\mp ٢س^{٢} \mp ٨س$

(٣) نطرح $٢س^{٢} + ٨س$ من $٢س^{٢} + ٩س + ٤$

فنحصل على ←———— س + ٤

(٤) بتكرار العمل كما سبق نجد أن خارج القسمة هو : ٢ س + ١

$$\begin{array}{r|l} ٢س + ١ & \\ \hline ٢س^{٢} + ٩س + ٤ & س + ٤ \\ \mp ٢س^{٢} \mp ٨س & \\ \hline س + ٤ & \\ \mp س \mp ٤ & \\ \hline ٠٠٠٠ & \end{array}$$

$$\therefore \; (٢س^{٢} + ٩س + ٤) \div (س + ٤) = ٢س + ١$$

وللتأكد من صحة الإجابة نتحقق من العلاقة : المقسوم = المقسوم عليه × خارج القسمة

$$= (س + ٤) \times (٢س + ١) = ٢س^{٢} + ٩س + ٤$$

إذن الإجابة صحيحة .

مثال (٢) أوجد خارج قسمة المقدار :

$$(س^{٣} + ١٥ - ١٧س + س^{٢}) \text{ على } (س + ٥)$$

الحــل :

(١) نرتب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه ترتيباً تنازلياً حسب أسس س .

(٢) نتبع نفس الخطوات التي في المثال السابق إلى أن تنتهي عملية القسمة.

س^{٢} − ٤س + ٣

س + ٥ ⟌ س^{٣} + س^{٢} − ١٧س + ١٥

$\mp$ س^{٣} $\mp$ ٥س^{٢}

− ٤س^{٢} − ١٧س + ١٥

$\pm$ ٤س^{٢} $\pm$ ٢٠س

٣س + ١٥

$\mp$ ٣س $\mp$ ١٥

. . . .

∴ (س^{٣} + ١٥ − ١٧ س + س^{٢}) ÷ (س+٥) = س^{٢} − ٤س + ٣

ويترك التحقق من صحة الإجابة كتدريب للطالب .

مثال (٣) أوجد قيمة س التي تجعل المقدار :

٢ أ^{٢} + ٥أ + س يقبل القسمة على ٢ أ + ١ .

الحــل : نجري عملية القسمة بنفس الخطوات السابقة.

أ + ٢

٢أ + ١ ⟌ ٢أ^{٢} + ٥أ + س

$\mp$ ٢أ^{٢} $\mp$ أ

٤أ + س

$\mp$ ٤أ $\mp$ ٢

س − ٢

وبما أن المقسوم يقبل القسمة على ٢أ + ١

إذن باقي القسمة (س −٢) يجب أن يساوي صفر ، أي أن س −٢ = ٠

∴ س = ٢

مثال (٤) أوجد خارج قسمة $س^{٣} - ٢٧ص^{٣}$ على $س - ٣ص$.

الحـل : نرتب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه تنازلياً حسب أسس س مع ترك أماكن خالية للحدود غير الموجودة ثم نتبع نفس الخطوات السابقة .

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{r}{س^{٢} + ٣س\,ص + ٩ص^{٢}} & \\
\hline
س^{٣} \qquad\qquad\qquad -٢٧ص^{٣} & س - ٣ص \\
\mp س^{٣} \pm ٣س^{٢}ص & \\
\hline
٣س^{٢}ص \qquad -٢٧ص^{٣} & \\
\mp ٣س^{٢}ص \pm ٩س\,ص^{٢} & \\
\hline
٩س\,ص^{٢} - ٢٧ص^{٣} & \\
\mp ٩س\,ص^{٢} \pm ٢٧ص^{٣} & \\
\hline
.... &
\end{array}
$$

تمارين ومسائل

[١] احسب ما يأتي ، ثم تحقق من صحة الحل :

أ) $(س^{٢} - ٤) \div (س - ٢)$ ، ب) $(س^{٣} - ١) \div (س - ١)$ ،

جـ) $(١٢س^{٢} + س + ٣٥) \div (س + ٥)$ ، ء) $(هـ^{٤} - أ^{٤}) \div (هـ - أ)$.

[٢] أوجد خارج القسمة :

أ) $ب^{٢} - جـ^{٢}$ على $ب + جـ$ ، ب) $س^{٣} + ص^{٣}$ على $س + ص$ ،

جـ) $ص^٣ + ٤ ص^٢ + ٥ ص + ٢$ على $ص + ٢$ ،

ء) $\frac{١}{٨} أ^٣ - \frac{١}{٢٧} ب^٣$ على $\frac{١}{٢} أ - \frac{١}{٣} ب$.

[٣] أوجد ناتج ما يأتي:

أ) $(س^٣ + ١) \div (س + ١)$ ،

ب) $(١٠ ل^٢ - \frac{١}{١٠} ل - \frac{٣}{١٠٠}) \div (٢ ل + \frac{١}{١٠})$ ،

جـ) $(٢ م^٤ - ٤ م^٢ + ١٦ م - ٣ م^٣ - ١٥) \div (م^٣ - ٢م + ٥)$ ،

ء) $(ل^٣ - ن^٣) \div (ل^٢ + ل ن + ن^٢)$.

[٤] اقسم $١٦ س^٣ + ٨س - ١٢ س^٢$ على $٤ س$ ، ثم اجمع الناتج مع $٣ س - س^٢ + ٧$.

[٥] ما المقدار الذي إذا ضرب في $(٢ س + ٥ ص)$ كان الناتج $٨س^٢ + ٢٦ س ص + ١٥ ص^٢$ ؟

[٦] اطرح $٣ أ - ٣ ب + ٧ جـ$ من خارج قسمة المقدار $١٥ أ^٢ ب جـ - ٢٠ أ ب جـ^٢ + ١٠ أ ب^٢ جـ$ على $- ٥ أ ب جـ$.

[٧] أوجد قيمة م التي تجعل المقدار: $٨ س^٤ - ٣٦ س^٣ + ٦ س^٢ + ١٢ س + ٢م$ يقبل القسمة على $٢ س^٢ - ٨ س - ٢$.

[٨] مستطيل مساحته $(١٥ + ٣ ص - ٤ ص^٣ - ٧ ص^٢)$ متراً مربعاً ، أحد بعديه $(٥ - ٤ ص)$ من الأمتار ، أوجد البعد الثاني .

[٩] مثلث مساحته

$(٨ س^٥ - ٤ س^٤ ص + ٦ ص^٢ س^٣ + ٤ س^٣ ص - ٢ س^٢ ص^٢ + ٣ س ص^٣)$ سم^٢

وطول قاعدته $(٢ س^٢ + ص)$ سم . فما ارتفاعه ؟

[١٠] معين مساحته (١٥س^{٢} + ١١س − ١٤) سم^{٢} ، وطول أحد قطريه (٣ س − ٢) سم ، أحسب طول القطر الآخر .

[١١] متوازي أضلاع مساحته (٢أ^{٥} + ٧أ^{٤} ب − ٤أ^{٢} − ١٤أ^{٢} ب^{٢} + ٨ب − ٤أ^{٣} ب) من الأمتار المربعة وارتفاعه (أ^{٢} − ٢ ب) متراً . أوجد طول قاعدته .

٣ : ٦ التحليل باستخراج العامل المشترك الأكبر

العامل المشترك :

تأمل الآتي :

عوامل العدد ٦ ، هي ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ .

عوامل العدد ١٠ ، هي ١ ، ٢ ، ٥ ، ١٠ .

لاحظ أن العوامل ١ ، ٢ مشتركه للعددين ٦ ، ١٠ .

إذن العامل المشترك الأكبر للعددين ٦ ، ١٠ هو ٢ .

وكذلك مكونات الحد الجبري ١٢ س^{٢} هي : ١٢ ، س^{٢} .

ومكونات الحد الجبري ٨س ص هي : ٨ ، س ، ص .

لاحظ أن العامل المشترك الأكبر للعاملين ١٢ ، ٨ هو ٤ .

والعامل المشترك الأكبر للمتغيرات س^{٢} ، س ص هو س .

إذن العامل المشترك الأكبر للحدين ١٢ س^{٢} ، ٨س ص هو ٤ س

تدريب تأمل الحدين الجبريين ١٢ ل^{٢}م^{٢} ، ١٨ ل^{٣}م ، وأجب عمايأتي :

– ماهو العامل المشترك الأكبر للعاملين ١٢ ، ١٨ ؟

– ماهو العامل المشترك الأكبر للمتغير ل^{٢} ، ل^{٣} ؟

– ماهو العامل المشترك الأكبر للمتغير م^{٢} ، م ؟

– ماهو العامل المشترك الأكبر للحدين ١٢ ل^{٢} م^{٢} ، ١٨ ل^{٣} م ؟

مما سبق ستجد أن العامل المشترك الأكبر للحدين ١٢ل^{٢}م^{٢} ، ١٨ل^{٣}م هو ٦ ل^{٢}م

العامل المشترك الأكبر لعدة حدود جبرية هو حد جبري يقسم جميع الحدود ، ويرمز له بالرمز « ع. م .أ » .

مثال (١) أوجد العامل المشترك الأكبر للآتي :

أ) ٤٢ ، ٢٨ ، ب) ٢٥ ب^{٢} ، ١٥ب^{٣}

حـ) ٣س^{٢} ص^{٣} ، ٥س^{٣} ص^{٢} ، ٢س^{٣} ص .

الحـــل :

أ) لاحظ أن عوامل العدد ٤٢ هي ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٧ ، ١٤ ، ٢١ ، ٤٢

وعوامل العدد ٢٨ هي : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٧ ، ١٤ ، ٢٨

إذن العامل المشترك الأكبر للعددين ٤٢ ، ٢٨ هو ١٤ .

ب) لاحظ أن العامل المشترك الأكبر للعددين ٢٥ ، ١٥ ، هو ٥ ،

والعامل المشترك الأكبر للمتغير ب^{٢} ، ب^{٣} هو ب^{٢} ،

إذن العامل المشترك الأكبر للحدين ٢٥ب^{٢} ، ١٥ب^{٣} هو ٥ ب^{٢} ،

جـ) العامل المشترك الأكبر للمعاملات ٣ ، ٥ ، ٢ هو ١ ،

العامل المشترك الأكبر للمتغير س^{٢} ، س^{٣} ، س^{٣} هو س^{٢} ،

العامل المشترك الأكبر للمتغير ص^{٣} ، ص^{٢} ، ص هو ص ،

إذن العامل المشترك الأكبر للحدود ٣س^{٢}ص^{٣} ، ٥س^{٣}ص^{٢} ، ٢س^{٣}ص

هو س^{٢} ص .

مثال (٢) أوجد العامل المشترك الأكبر لكل مما يأتي :

أ) ١٨ (س + ص)^{٣} ، ٤ (س + ص)^{٥}

ب) ١٤ س^{٥} ص^{٣} (أ – ب)^{٣} ، ٣٥ س^{٣} ص^{٤} (أ – ب)^{٧}

جـ) ٧أ^{٣} ، ٥ ب^{٢} ، ١٢أ جـ .

الحـــل :

أ) (ع . م . أ) هو ٢ (س + ص)^{٣}

ب) (ع . م . أ) هو ٧ س^{٣} ص^{٣} (أ – ب)^{٣}

جـ) (ع . م . أ) هو الواحد الصحيح .

تحليل المقادير الجبرية باستخراج العامل المشترك :

باستخدام خاصية التوزيع نستطيع كتابة المقدار س^{٢} + ٣س بالصورة س (س + ٣) ، أو بالصورة (س + ٣) × س .

وكلا الصورتين تبين أن المقدار (س^{٢} + ٣ س) هو عبارة عن حاصل ضرب س في (س + ٣) .

أي أن : س^{٢} + ٣ س = س (س + ٣) ، وتسمى الصورة س (س + ٣) تحليل المقدار س^{٢} + ٣س .

مثال (٣) حلل المقدار : ٣٢ل^{٢} – ٤٨ل^{٤} ، وتحقق من صحة ذلك .

الحـــل : العامل المشترك الأكبر للحدين ٣٢ل^{٢} ، ٤٨ل^{٤} هو ١٦ل^{٢}،

أي أن : ٣٢ل^{٢} – ٤٨ل^{٤} = ١٦ل^{٢} (٢ – ٣ ل^{٢}) .

التحقق :

بضرب العاملين ١٦ ل^{٢} ، (٢ − ٣ ل^{٢}) تجد أن :

١٦ل^{٢} (٢ − ٣ ل^{٢}) = ٣٢ل^{٢} − ٤٨ل^{٤} .

مثال (٤) حلل المقادير الآتية :

أ) ٥ أ ب − ٣ أ جـ + ٢أ ب جـ ، ب) (أ^{٢} − ٣ أ) + ٥ (أ − ٣) ،

جـ) ل (م − ن) − م + ن .

الحــل :

أ) ٥ أ ب − ٣أ جـ + ٢ أ ب جـ = أ (٥ ب − ٣ جـ + ٢ ب جـ) .

ب) (أ^{٢} − ٣ أ) + ٥ (أ − ٣) = أ (أ − ٣) + ٥ (أ − ٣)

= (أ − ٣) (أ +٥) .

جـ) ل (م − ن) − م + ن = ل (م − ن) + (− م + ن)

= ل (م − ن) − (م − ن)

= (م − ن) (ل − ١) .

تمارين ومسائل

اختر الإجابة الصحيحة لكل فقرة ممايأتي :

[١] العامل المشترك الأكبر للحدين ٥س ص^{٢} ، ١٥ س^{٢} ص ، هو :

أ) ١٥ س^{٢} ص^{٢} ، ب) ٥س^{٢} ص ،

جـ) ٥س ص ، ء) ٥ س ص^{٢} .

[٢] العامل المشترك الأكبر للمقدارين: س – ١ ، (س – ١) (س + ١) ،هو:

أ) س – ١ ، ب) س + ١ ،

جـ) س^٢ – ١ ، ء) (س + ١) (س – ١) .

[٣]العامل المشترك الأكبر للمقادير الجبرية: س + ٣ ، س^٢ ، س(س + ٥)، هو:

أ) س ، ب) ١

جـ) س (س + ٥) ، ء) س^٢

[٤] أكمل الفراغ فيمايأتي ، بمايجعل العبارة صحيحة :

أ) س^٢+ ٣ س = س (س + . . .) ، ب) ٣ هـ + ٦ و = . . . (هـ + ٢ و)،

جـ) ٢١ ل^٢ م – ٢٨ ل م^٢ = ٧ل م (. . . . – . . .) .

ء) ١٢س^{٢}ص^٣+١٨س^{٣}ص^٢–٣٠ س^{٤}ص^٣ = . . .(٢ص+ . . .– ٥س^{٢}ص) .

أوجد العامل المشترك الأكبر في التمارين من [٥] إلى [١١] التالية :

[٥] ٧٥ ، ٤٥ . [٦] ٣س^٢ ، ٥ص ، ٧ع .

[٧] $\frac{١}{١٨}$ س ص^٢ ، $\frac{١}{٢٧}$ س^٣ ص .

[٨] ٠,١٨ ل^{٣}م^٢ ، ٠,٤٥ ل^٢ م^٣ ، ٠,٧٢ ل^٣ م^٣ .

[٩] ٩ (س^٢ – ص^٢)^٤ ، ٧ (س^٢ – ص^٢)^٥ ، ٢ (س^٢ – ص^٢)^٣ .

[١٠] (أ – ب)^٢ (هـ – م^٢)^٣ ، (أ – ب)^٣ (هـ – م^٢)^٢ .

[١١] (ل + م) (س – ص)^٣، (ل + م)^٢ (س – ص)، (ل + م)^٢ (س – ص)^٢

في التمارين من [١٢] إلى [٢١] حلل المقادير الجبرية باستخراج العامل المشترك الأكبر :

[١٢] س^٢ + أ س . [١٣] ٥أ ب – ١٥أ جـ + ١٠أ ب جـ .

[١٤] ٣٤ س^{٣}ع^{٢} – ٥١ س^{٤}ع^{٣} + ١٧ س^{٣}ع^{٤} .

[١٥] ٢٢ $\frac{أ^{٣}}{ب^{٢}}$ + ٦٦ $\frac{أ^{٢}}{ب^{٣}}$ – ١٢١ $\frac{أ^{٥}}{ب^{٢}}$.

[١٦] $\frac{(أ+ب)^{٣}}{١٢}$ + $\frac{(أ+ب)^{٢}}{٨}$.

[١٧] (س – ص)ع + م(س – ص) . [١٨] (أ + ٣)^{٢} + ٦أ + ١٨ .

[١٩] (هـ – ٢و)^{٣} – ٣هـ + ٦و . [٢٠] (ص + ٥)^{٢} – ٤ص – ٢٠ .

[٢١] (ل^{٢} + م) – (ل^{٣}م + ل م^{٢}) .

٣ : ٧ تحليل الفرق بين مربعين

تدريب اوجد حاصل ضرب (س + ٣) (س – ٣) ، ستجد أن الناتج

يساوي س^{٢} – ٩ ، أي أن : س^{٢} – ٩ = (س + ٣) (س – ٣)

تلاحظ أن :

س^{٢} مربع س ، ٩ مربع العدد ٣ ، أما س^{٢} – ٩ تمثل الفرق بين مربعي كميتين.

س + ٣ تمثل مجموع الكميتين ، س – ٣ تمثل الفرق بين الكميتين .

وبالمثل : (س + ص) (س – ص) = س^{٢} – ص^{٢} .

مما سبق نستنتج :

الفرق بين مربعي كميتين يساوي حاصل ضرب مجموع الكميتين في الفرق بينهما . أي أن : س^{٢} – ص^{٢} = (س + ص) (س – ص) .

مثال (١) حلل مايأتي ، وتحقق من صحة ذلك :

أ) $س^٢ - ٤$ ، ب) $س^٢ - ١٦ ص^٢$.

الحل :

أ) لاحظ أن : $س^٢$ مربع س ، ٤ مربع العدد ٢ ،

∴ $(س^٢ - ٤) = (س + ٢) (س - ٢)$.

التحقق : اضرب (س + ٢) في (س - ٢) ،

$(س + ٢) (س - ٢) = س (س - ٢) + ٢ (س - ٢)$

$= س^٢ - ٢ س + ٢ س - ٤ = س^٢ - ٤$.

ب) $س^٢ - ١٦ ص^٢ = (س + ٤ ص) (س - ٤ ص)$

التحقق :

$(س + ٤ ص) (س - ٤ ص) = س (س - ٤ ص) + ٤ ص (س - ٤ ص)$

$= س^٢ - ٤ س ص + ٤ س ص - ١٦ ص^٢$.

$= س^٢ - ١٦ ص^٢$.

مثال (٢) حلل مايأتي :

أ) $٢٥ س^٢ - \frac{ص^٢}{١٦}$ ، ب) $ص^٤ - ٠,٨١ ب^٢$.

جـ) $٣ أ^٢ - ٢٧ حـ^٢$ ، د) $أ^٤ - (س + ص)^٢$.

الحل :

أ) $٢٥ س^٢ - \frac{ص^٢}{١٦} = (٥ س - \frac{ص}{٤}) (٥ س + \frac{ص}{٤})$.

ب) ص^{٤} – ٠,٨١ ب^{٢} = ص^{٤} – $\frac{٨١}{١٠٠}$ ب^{٢} .

= (ص^{٢} + $\frac{٩}{١٠}$ ب) (ص^{٢} – $\frac{٩}{١٠}$ ب) .

جـ) ٣ أ^{٢} – ٢٧ جـ^{٢} = ٣ (أ^{٢} – ٩ حـ^{٢}) .

= ٣ (أ + ٣حـ) (أ – ٣حـ) .

د) أ^{٤} – (س + ص)^{٢} = [أ^{٢} + (س + ص)] [أ^{٢} – (س + ص)]

= (أ^{٢} + س + ص) (أ^{٢} – س – ص) .

مثال (٣) حلل مايأتي :

أ) ٣ هـ^{٢} – ٠,١٢ م^{٢} ، ب) ل^{٤} – م^{٤} .

الحــل :

أ) ٣ هـ^{٢} – ٠,١٢ م^{٢} = ٣ (هـ^{٢} – ٠,٠٤م^{٢}) = ٣ (هـ + ٠,٢م) (هـ – ٠,٢م)

ب) ل^{٤} – م^{٤} = (ل^{٢} + م^{٢}) (ل^{٢} – م^{٢}) = (ل^{٢} + م^{٢}) (ل + م) (ل – م) .

مثال (٤) باستخدام الفرق بين مربعين أوجد ناتج مايأتي :

أ) ١٢١ – ٦٤ ، ب) (٥٧,٧)^{٢} – (٢٢,٣)^{٢} ، جـ) ٨٥ × ١١٥ .

الحــل :

أ) ١٢١ – ٦٤ = (١١ + ٨) (١١ – ٨)

= ١٩ × ٣ = ٥٧ .

ب) $(٥٧,٧)^٢ - (٢٢,٣)^٢ = (٥٧,٧ + ٢٢,٣)(٥٧,٧ - ٢٢,٣)$

$= ٨٠ (٣٥,٤) = ٢٨٣٢$

جـ) $٨٥ \times ١١٥ = (١٠٠ - ١٥)(١٠٠ + ١٥)$

$= ١٠٠^٢ - ١٥^٢ = ١٠٠٠٠ - ٢٢٥ = ٩٧٧٥$.

تمارين ومسائل

[١] أكمل الفراغ فيما يأتي ، بما يجعل العبارة صحيحة :

أ) $س^٢ - ٩ = (س + \cdots)(س - \cdots)$ ،

ب) $٤هـ^٢ - ٢٥ و^٢ = (\cdots + ٥ و)(\cdots - ٥ و)$ ،

جـ) $(\cdots - ٣٦ ص^٢) = (س + ٦ص)(س - \cdots)$ ،

د) $(٠,٢٥م^٢ - \cdots) = (٠,٥م + \cdots)(\cdots - \frac{ن^٢}{٨})$.

في التمارين من [٢] إلى [١٤] حلل إلى أبسط صورة :

[٢] $س^٢ - ٢٥$.

[٣] $٩جـ^٢ - ٤٩ ء^٢$.

[٤] $\frac{م^٢}{٤} - ٣٦ ل^٢$.

[٥] $\frac{١}{س^٢} - ١$.

[٦] $\frac{٤أ^٢}{ب^٢} - \frac{جـ^٢}{٩}$.

[٧] $س ب^٢ - س حـ^٢$.

[٨] $٢ل^٣ - ٨ ل م^٢$.

[٩] $(أ + ب)^٢ - ٩أ^٢$.

[١٠] $ل^٤ - ١$.

[١١] $٢ (س + ص)^٢ - ٧٢ (س - ص)^٢$

[١٢] $س^٤ - ٩ ص^٢$.

[١٣] $١,٢٥أ^٢ - ٤٥ ب^٢$.

[١٤] $٢٧ل^٢ - \frac{١}{٣} م^٢$.

[١٥] باستخدام الفرق بين مربعين ، أوجد ناتج مايأتي :

أ) $\frac{٨١}{٢٥} - \frac{٤٩}{٣٦}$ ، ب) $(٥٧)^{٢} - (٢٣)^{٢}$.

جـ) $(٣٦٫٥)^{٢} - (٢٣٫٥)^{٢}$ ، ء) ٣٧ × ٤٣

هـ) ١٠٠٣ × ٩٩٧ .

٣ : ٨ تمارين ومسائل عامة

[١] أكمل الآتي :

أ) ٢أ (٢أ − ٥ ب) = ... − ١٠ أ ب ،

ب) $(س - ص)^{٢} = ... - ٢ س ص + ...$ ،

جـ) $ل^{٢} - م^{٢} = (ل - م)(... + ...)$.

[٢] أوجد ناتج الآتي :

أ) $٣ ء هـ^{٢} (٤ ء هـ - ء^{٢} هـ^{٢} + \frac{١}{٣} ء^{٢})$ ،

ب) $(س^{٢} + ص^{٢})(٢ س ص)$ ،

جـ) (س + ١٢) (س − ١) ،

ء) $(س^{٢} - ص^{٢}) \div (س - ص)$ ،

[٣) أجرِ العمليات التالية :

أ) $س^{٢} ص^{٢} (س ل - ٣س^{٢} ص + ص ل^{٣})$ ،

ب) $(١٢ أ^{٢} ب جـ^{٢} - ٨ أ ب^{٢} جـ^{٣} - ٤ أ ب^{٣} حـ) \div (٤ أ ب حـ)$ ،

حـ) $س^{٣} (س + ٦) + ٢ص (ص + ٣)$ ،

ء) $(٣ س - ٢)(٩ س^{٢} + ٦س + ٤)$.

[٤] بسط كلاً ممايأتي :

أ) ٢م ن (م $ن^٢$ + ٣م) + $ن^٢$ ($م^٢$ ن + ٧ $م^٢$) ،

ب) (س – ١) (س + ١) + س (س + ص) ،

جـ) (٧ ٢ $س^٣$ – ٨) ÷ (٣ س – ٢) ،

ء) ($س^٢$ – ٢ س + ٤) (س + ٢) .

[٥] اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس .

أ)حاصل ضرب (٢س +٣) في(٢س)=[(٤ س + ٦ $س^٢$) ، (٤ $س^٢$ + ٦ س)]

ب) حاصل ضرب (٢ س + ٣) في (٢س – ٣)

= [(٤ $س^٢$ + ١٢س + ٩) ، (٤ $س^٢$ – ٩)]

جـ) مربع المقدار (س + ٣) = [($س^٢$ + ٦س +٩) ، ($س^٢$ + ٣س + ٩)]

[٦] أوجد العامل المشترك لكل مما يأتي :

أ) ٦ $س^٢$ ، ١٥ ، ب) ١٦ $أ^٢$ $ب^٢$ ، ٤ أ $ب^٢$ ، ٨ $أ^٣$ $ب^٣$ ،

جـ) ٢(س –١) ، ٤ (س –١ $)^٢$ ، ء) ($س^٢$ – ٤) ، (س + ٢) .

[٧] حلل المقادير التالية :

أ) $أ^٢$ – ٤ $ب^٢$ ، ب) ١٢١ $س^٢$ – ٩ $ع^٢$ ،

جـ) (س + ع $)^٢$ – $ص^٢$ ، ء) ٣ $س^٢$ $ص^٣$ – ٦ $س^٢$ $ص^٢$ + ١٥ $س^٣$ ص .

[٨] حلل إلى أبسط صورة كلاً ممايأتي :

أ) ١٢ $ل^٢$ – ٢٧ $م^٢$ ، ب) ٧ $س^٢$ ص – ٢٨ $ص^٣$ ،

جـ) $\frac{١}{٢٥ س^٢}$ – $ع^٢$ ، ء) ٠,٧٥ $ل^٤$ – ٣ .

[٩] إِذا كانت ل = س^{٢} – ٣س ص + ٥ ، ك = ٥س + ص ، فأوجد :

أ) ل × ك ، ب) (ل × ك) ÷ ك

[١٠] أوجد قيمة س التي تجعل المقدار :

س – ٩أ + ٦أ^{٣} – ١٣أ^{٢} يقبل القسمة على المقدار (٢أ^{٢} – ٥ – ٣أ).

[١١] ملعب أطفال مستطيل الشكل عرضه (٤س) متراً وطوله يزيد عن عرضه بمقدار ٩ أمتار ، فما محيطه وما مساحته ؟

[١٢] حديقة مربعة الشكل طول ضلعها (س^{٢} + ٥س) متراً ، فما محيطها وما مساحتها ؟

[١٣] مزرعة مستطيلة الشكل مساحتها (س^{٢} – ١٠س + ٢٥)متراً مربعاً وأحد بعديها (س – ٥) متراً ، فما بعدها الآخر وما محيطها ؟

٣ : ٩ اختبار الوحدة

[١] أوجد ناتج مايأتي :

أ) ٤س ص (٢س ص^{٢} – ٧ ص^{٣} ل) ،

ب) (أ^{٣} ب^{٢} حـ – ٤أ حـ^{٢} + ١٢أ ب^{٢} حـ) ÷ (٤أ جـ) ،

جـ) (س – ١) (س^{٢} + س + ١) ،

ء) (٤س^{٥} – ٨س^{٣} – ٣س^{٢} + ٦) ÷ (س^{٢} – ٢) .

[٢] أوجد العامل المشترك الأكبر للآتي :

أ) ٢٥س^{٢} ص^{٣} ، ٥٥ س^{٣} ص^{٢} ، ١٥ س^{٣} ص^{٣} ،

ب) ٩ (س − ٣) ، ٦ (س + ١) (س − ٣) ،

جـ) $\frac{أ^{٣}}{٦}$ ، $\frac{٢أ^{٢}}{٢٧}$ ، $\frac{٥أ^{٣}}{١٨}$.

[٣] حلل مايأتي :

أ) ع^{٢} − ١٦ ف^{٢} ،

ب) $\frac{م^{٢}}{٩}$ − ٠,٢٥ ن^{٢} ،

جـ) س^{٢} (أ + ب) − ص^{٢} (أ + ب) .

[٤] حديقة ألعاب مستطيلة الشكل عرضها (٤س + ٣)متراً ، وطولها (٥س +٦) متراً ، احسب مساحتها ومحيطها .

الوحدة الرابعة المعادلات والمتراجحات

٤ : ١ معادلة الدرجة الأولى في متغير واحد

تأمل المعادلات التالية :

١) ٣ س = ٢ ، وحلها س = $\frac{٢}{٣}$.

٢) $\frac{٣}{س}$ = ٢ ، وحلها س = $\frac{٣}{٢}$.

ستجد أن المعادلة الأولى هي معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد على الصورة : ؏ س = ب ، ولها حلاً وحيداً وهو : س = $\frac{ب}{؏}$ (؏ ≠ ٠) أو مستحيلة الحل إذا كان (؏ = ٠ ، ب ≠ ٠) ، أو أن لها حلو لاً غير محدودة إذا كان (؏ = ٠ ، ب = ٠) أما المعادلة الثانية فهي كذلك معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد على الصورة : $\frac{؏}{س}$ = ب ، ولها حلٌ وحيدٌ وهو س = $\frac{؏}{ب}$ (ب ≠ ٠) .

كما ستلاحظ أن المعادلتين لايمكن حلهما في مجموعة الأعداد الصحيحة (صـ) ،ولكن يمكن حلهما في مجموعة الأعداد النسبية كمجموعة تعويض.

ويمكنك أن تعتمد في حل معادلة الدرجة الأولى في متغير واحد في مجموعة الأعداد النسبية على ما درسته من قواعد للتحويلات المكافئة لإيجاد معادلة مكافئة لمعادلة معطاه ، ومن إجراء بعض العمليات المختلفة كما ستلاحظ في الأمثلة التالية:

مثال (١) حل المعادلة : ٣س − ٢ = ١٢ في ص ، ثم في ن .

الحل : ٣ س − ٢ = ١٢

٣ س − ٢ + ٢ = ١٢ + ٢ (بإضافة العدد ٢ إلى طرفي المعادلة)

٣ س = ١٤

$\frac{٣\ س}{٣} = \frac{١٤}{٣}$ (بقسمة طرفي المعادلة على العدد ٣) .

س = $\frac{١٤}{٣}$ = ٤ $\frac{٢}{٣}$.

∴ $\frac{١٤}{٣}$ ∉ ص إذن لايوجد حل للمعادلة في مجموعة الأعداد الصحيحة

∵ $\frac{١٤}{٣}$ ∈ ن ، ∴ س = ٤ $\frac{٢}{٣}$ وهو حل المعادلة ن .

التحقق :

الطرف الأيمن = ٣س − ٢ = ٣ × $\frac{١٤}{٣}$ − ٢ = ١٤ − ٢ = ١٢ = الطرف الأيسر .

∴ الحل صحيح .

مثال (٢) حل المعادلة : $\frac{٦}{س}$ + ٣ = ٩ ، س ∈ ن ، س ≠ ٠

الحل : $\frac{٦}{س}$ + ٣ = ٩

$\frac{٦}{س}$ + ٣ − ٣ = ٩ − ٣ (بطرح ٣ من طرفي المعادلة)

$\frac{٦}{س}$ = ٦

$س \times \frac{٦}{س} = ٦ \times س$ (بضرب طرفي المعادلة بالمتغير س ، س $\neq$ ٠) .

$٦ = ٦ س$

$\frac{٦}{٦} = \frac{٦ س}{٦}$ (بقسمة طرفي المعادلة على ٦) .

$١ = س$ ، $\therefore$ س = ١ .

التحقق :

الطرف الأيمن = $\frac{٦}{س} + ٣ = \frac{٦}{١} + ٣ = ٦ + ٣ = ٩$ = الطرف الأيسر .

اذن الحل صحيح .

مثال (٣) حل المعادلة $\frac{ص}{٦} + \frac{ص}{٤} = ٥$ ، ص $\in$ ط .

الحل : $\frac{ص}{٦} + \frac{ص}{٤} = ٥$

$\frac{٢ص}{١٢} + \frac{٣ص}{١٢} = ٥$ (توحيد المقامات في الطرف الأيمن للمعادلة)

$\frac{٥ص}{١٢} = ٥$

$١٢ \times \frac{٥ص}{١٢} = ٥ \times ١٢$ (بضرب طرفي المعادلة في ١٢)

$٥ ص = ٦٠$

$\frac{٥ص}{٥} = \frac{٦٠}{٥}$ (بقسمة طرفي المعادلة على ٥)

$ص = ١٢$

$\therefore$ ص = ١٢ $\in$ ط ، وهو حل المعادلة .

مثال (٤) حل المعادلة ٤ (٥,٦ – ٢ ل) = ٢ ل + ٧,٦ ، ل ∋ ح .

الحـــل : ٤ (٥,٦ – ٢ ل) = ٢ ل + ٧,٦

٢٢,٤ – ٨ ل = ٢ ل + ٧,٦ (فك الأقواس في الطرف الأيمن للمعادلة)

٢٢,٤– ٢٢,٤– ٨ل = ٢ ل + ٧,٦ – ٢٢,٤ (يطرح العدد ٢٢,٤ من طرفي المعادلة)

–٨ ل = ٢ ل – ١٤,٨

– ٨ ل – ٢ ل = ٢ ل – ٢ ل – ١٤,٨ (بطرح ٢ ل من طرفي المعادلة)

– ١٠ ل = – ١٤,٨

$\frac{\text{–١٠ ل}}{\text{– ١٠}} = \frac{\text{–١٤,٨}}{\text{– ١٠}}$ (بقسمة طرفي المعادلة على معامل ل)

ل = $\frac{\text{–١٤,٨}}{\text{– ١٠}}$ ، ل = ١,٤٨ .

اذن الحل هو ل = ١,٤٨ ∋ ح .

تدريـــب : تحقق بنفسك من صحة الحل في المثال رقم (٤) .

مثال (٥) ما العدد الذي إذا قسمناه على العدد ١٤ نحصل على ٢ .

الحـــل : نفرض أن العدد = س

قسمة العدد (س) على ١٤ = ٢

س ÷ ١٤ = ٢

١٤ × $\frac{\text{س}}{\text{١٤}}$ = ٢ × ١٤ (بضرب طرفي المعادلة بالعدد ١٤)

س = ٢٨ ، اذن العدد هو ٢٨ .

تمارين ومسائل

حل المعادلات التالية في $\mathbb{N}$.

[١] $\frac{١٧}{\text{س}} = ٦$ ، [٢] $\frac{٩}{\text{ك}} = ٣٫٦$ ، [٣] $\frac{\text{س}}{٠٫٠٦} = ٠٫٠٥$.

[٤] $٠٫٢ \times \text{م} = ٠$ ، [٥] $\frac{١}{٤٫٢} \times \text{س} = ٠٫٠٥$ ، [٦] $\frac{٣}{٨}\,\text{ل} = \frac{٦}{٥}$.

[٧] $\frac{٠٫٧}{\text{ص}} = ٦$ ، [٨] $١\frac{١}{٢} \div \text{س} = ٣\frac{٣}{٤}$

[٩] $٢ + ٣\text{س} = ٥\text{س} - ٩$ ، [١٠] $٤\text{س} + ٨ = \text{س} + ١٠$

[١١] $٢\text{س} + \frac{٣}{٤} = \text{س} + \frac{٥}{٦}$ ، [١٢] $\frac{٥}{٤} - \frac{٢}{\text{س}} = \frac{١}{٣\text{س}}$

[١٣] $\frac{٢\text{س} - ١}{٣} = \frac{\text{س}}{٤} + \frac{٣}{٢}$

[١٤] $٣\text{س} + (\text{س} - ٥\text{س}) = ٣٣ + (٢\text{س} - ٤\text{س})$

[١٥] $\frac{\text{س} - ٨}{٢} = \frac{٥\text{س}}{٢} + (٢\text{س} + ٤)$

[١٦] $\frac{\text{س} - ٢}{٤} + \frac{١}{٣} - \left(-\frac{٢\text{س} - ١}{٣}\right) = ٠$

[١٧] إذا كانت قيمة المقدار ٤ص تساوي ٣٫٦ فما قيمة ص ؟

[١٨] إذا كان أربعة أمثال عدد يساوي ٣٥ فما العدد ؟

[١٩] أراد حارث توزيع ٢٤ دفتراً بين إخوانه بالتساوي ، فإذا أعطى كل واحد منهم ٦ دفاتر . فما عدد إخوان حارث ؟

[٢٠] تبرعت سمية للمجاهدين في فلسطين بمبلغ ثلاثمائة الف ريال ، يمثل ثلث رأسمالها ، فكم كان رأسمال سمية ؟

٤ : ٢ متراجحة الدرجة الأولى في متغير واحد

تعرف أن المتراجحة هي جملة مفتوحة تحتوي على إِحدى علامات الترجيح
> ، < ، ≥ ، ≤ ، ≠ .

وأن مجموعة الحل هي مجموعة كل العناصر التي تنتمي إِلى مجموعة التعويض والتي تحقق المتراجحة (تحولها إِلى عبارة صادقة) ، وتوجد بعض المتراجحات التي ليس لها حل في مجموعة الأعداد الصحيحة (ص) ، ولكن لها حل في مجموعات تعويض أخرى ، مثل مجموعة الأعداد النسبية (ن) .

وفي هذا الدرس سنقوم بحل المتراجحات من الدرجة الأولى في متغير واحد في مجموعة الأعداد النسبية ، كما نقوم بتمثيلها على خط الأعداد معتمدين على ما درسناه من قواعد للتحويلات المكافئة وهي كالتالي :

إِذا كان س ، ب ، جـ ∈ ن .

أولاً : إِذا كان س ≥ ب فإِن ، س + جـ ≥ ب + جـ .

ثانياً : إِذا كان س ≥ ب ، فإِن س − جـ ≥ ب − جـ .

ثالثاً : إِذا كان س ≥ ب ، جـ > ٠ فإِن س × جـ ≥ ب × جـ .

رابعاً : إِذا كان س ≥ ب ، جـ < ٠ فإِن س × جـ ≤ ب × جـ .

خامساً : إِذا كان س ≥ ب ، جـ > ٠ فإِن س/جـ ≥ ب/جـ .

سادساً : إِذا كان س ≥ ب ، جـ < ٠ فإِن س/جـ ≤ ب/جـ .

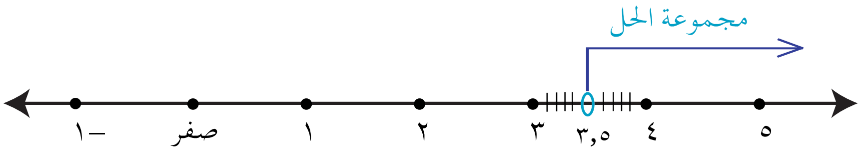
مثال (١) حل المتراجحة : $-٤\,\text{س} < -١٤$ في ح ومثل الحل على خط الأعداد .

الحــل : $-٤\,\text{س} < -١٤$

$$\frac{-٤\,\text{س}}{-٤} > \frac{-١٤}{-٤}$$ (بقسمة طرفي المتراجحة على العدد -٤)

$$\text{س} > \frac{٧}{٢}$$

$\text{س} > ٣\frac{١}{٢}$. [انظر الشكل (٤–١)] .



شكل (٤ –١)

مثال (٢) حل المتراجحة : $\text{س} - \frac{١}{٢} \le \frac{٢}{٣} - \frac{\text{س}}{٢}$.

الحــل : $\text{س} - \frac{١}{٢} \le \frac{٢}{٣} - \frac{\text{س}}{٢}$

$\text{س} - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \le \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} - \frac{\text{س}}{٢}$ (بإضافة $\frac{١}{٢}$ لطرفي المتراجحة)

$\text{س} \le \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} - \frac{\text{س}}{٢}$.

$\text{س} + \frac{\text{س}}{٢} \geq \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} - \frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{س}}{٢}$ (بإضافة $\frac{\text{س}}{٢}$ لطرفي المتراجحة)

$\frac{٢\text{س} + \text{س}}{٢} \geq \frac{٤ + ٣}{٦}$

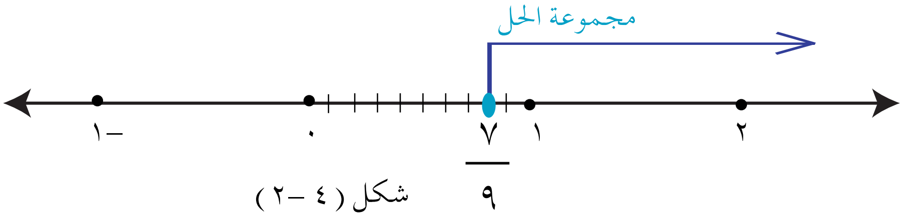
$\frac{٣\text{س}}{٢} \geq \frac{٧}{٦}$

$٦ \times \frac{٣\text{س}}{٢} \geq ٦ \times \frac{٧}{٦}$ (بضرب طرفي المتراجحة في ٦)

$٩\text{س} \geq ٧$

$\frac{٩\text{س}}{٩} \geq \frac{٧}{٩}$ (بقسمة طرفي المتراجحة على ٩)

$\text{س} \geq \frac{٧}{٩}$



شكل (٤ – ٢)

مثال (٣) حل المتراجحة : $٦ - ٤\text{س} \geq ٢\text{س} + ١$.

الحـل : $٦ - ٤\text{س} \geq ٢\text{س} + ١$

$٦ - ٦ - ٤\text{س} \geq ٢\text{س} + ١ - ٦$ (بطرح العدد ٦ من طرفي المتراجحة)

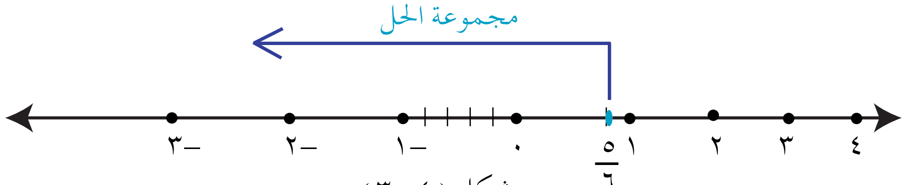
$-٤\text{س} \geq ٢\text{س} - ٥$

$-٤\text{س} - ٢\text{س} \geq ٢\text{س} - ٢\text{س} - ٥$ (بطرح ٢ س من طرفي المتراجحة)

$-٦س \geq -٥$

$\frac{-٦س}{-٦} \leq \frac{-٥}{-٦}$ (بقسمة طرفي المتراجحة على العدد −٦)

$س \leq \frac{٥}{٦}$ [انظر الشكل (٤ – ٣)] .



شكل (٤ −٣)

مثال (٤) حل كلاً من المتراجحتين: $س + ١ > ٠$ ، $-٢س + ٨ > ٠$

وأوجد مجموعة الحل المشتركة لهما .

الحــل : أولاً : نحل المتراجحة $س + ١ > ٠$

$س + ١ > ٠$

$س + ١ - ١ > ٠ - ١$ (بطرح العدد ١ من طرفي المتراجحة)

$\therefore س > -١$

ثانياً : نحل المتراجحة $-٢س + ٨ > ٠$

$-٢س + ٨ > ٠$

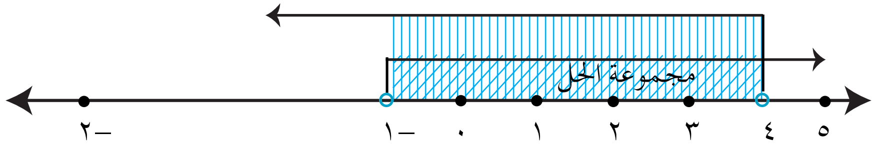
$-٢س + ٨ - ٨ > -٨$ (بطرح العدد ٨ من طرفي المتراجحة)

$-٢س > -٨$

$\frac{-٢س}{-٢} < \frac{-٨}{-٢}$ (بقسمة طرفي المتراجحة على العدد −٢)

$س < ٤$

ثالثاً : نمثل المتراجحتين معاً على خط الأعداد [انظر الشكل (٤ – ٤)] .



شكل (٤ – ٤)

مثال (٥) حل المتراجحتين التاليتين : ٢ س – ٩ < ٠ ، –٣س + ١٨ < ٠ ،

وأوجد مجموعة الحل المشتركة لهما .

الحـــل : أولاً : نحل المتراجحة ٢ س – ٩ < ٠ .

٢س – ٩ < ٠

٢س – ٩ + ٩ < ٠ + ٩ (بإضافة العدد ٩ لطرفي المتراجحة)

٢س < ٩

$\frac{\text{٢س}}{٢} < \frac{٩}{٢}$ (بقسمة طرفي المتراجحة على العدد ٢)

$\text{س} < \frac{٩}{٢}$

س < ٤٫٥

ثانياً : نحل المتراجحة : –٣ س + ١٨ < ٠ .

–٣ س + ١٨ < ٠ .

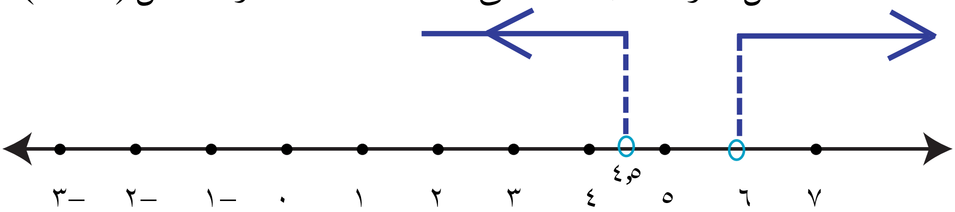
–٣ س + ١٨ –١٨ < –١٨ (بطرح العدد ١٨ من طرفي المتراجحة)

$$-٣\text{س} < -١٨$$

$$\frac{-٣\text{س}}{-٣} > \frac{-١٨}{-٣} \quad \text{(بقسمة طرفي المتراجحة على العدد -٣)}$$

$$\text{س} > ٦$$

ثالثاً : نمثل المتراجحتين معاً على خط الأعداد [انظر الشكل (٤-٥)]



شكل (٤ – ٥)

من الشكل (٤ – ٥) نجد مجموعة الحل المشترك للمتراجحتين = $\varnothing$.

تمارين ومسائل

حل المتراجحات التالية في (ط)، ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد :

[١] $٥\text{س} - ٦ < ١٠$

[٢] $٦ - ٤\text{س} \geq ٢\text{س} + ١$

[٣] $٤(\text{س} - ٥) > \text{س} + ١$

[٤] $\frac{\text{س} - ٣}{٢} \geq \frac{٢}{٣} - \frac{\text{س}}{٢}$

[٥] $\frac{٣\text{س} - ٤}{٥} > \text{س} + \frac{٢}{٣}$

[٦] $٤(٦ - \text{س}) \leq ٣(\text{س} - ١٣)$

[٧] $\text{س} - ١ < ٣(٢\text{س} - ١)$

[٨] $\frac{\text{س} - ٥}{٣} - \frac{\text{س} - ٦}{٢} > ٠$

[٩] $\frac{٤\text{س} + ٢}{٥} > \frac{١}{٢} + \text{س}$

[١٠] $٢(\text{س} + ٨) + ٥\text{س} < ٤ - ٣\text{س}$

[١١] $\left\{\begin{array}{l} ٢ - س \geq ٠ \\ س - ٤ \geq ٠ \end{array}\right.$ [١٢] $\left\{\begin{array}{l} ٦س \leq ٤٢ \\ ٤س + ١٢ \geq ٠ \end{array}\right.$

[١٣] $٦ > ٢ص \geq ١٤$ [١٤] $٣ \geq ٣س > ١٢$

[١٥] $٣ \geq ٢س > ٩$ [١٦] $-٢,٨ > ٠,٠٤ س > ١,٦$.

٤ : ٣ معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد

تعلــم أن الصــورة العامــة لمعادلات الدرجــة الأولى في متغير واحد هي : $أ س + ب = ٠$ ، وعموماً فإن المعادلات لها صور متعددة كل منها لها تسمية تميزها عــن غيرهــا مــن المعــادلات ، أما المعادلات التي صورتها العامــة : $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ ، حيث أ ، ب ، جـ $\in$ ح ، أ $\neq ٠$ تسمى معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد ، لأن أعلى أس لمتغيرها هو القوة الثانية ، وفيها متغير واحد فقط .

تأمل المعادلات التالية ، ماذا تلاحظ ؟

أ) $٤ س + ٥ = ٩$ ، ب) $٦س^٢ + ٤ = ٢٢$

جـ) $٥س + ١٢ س^٢ = ٧$ د) $٤س + ١٥ = ٣ س^٢ - س^٣$

في المعادلة (أ) تلاحظ أن المتغير مرفوع إلى القوة ١ ، ولذا تسمي معادلة من الدرجة الأولى .

في المعادلة (ب) تلاحظ أن المتغير مرفوع إلى القوة ٢ ، ولذا تسمى معادلة من الدرجة الثانية .

في المعادلة (جـ) تلاحظ أن أكبر قوة للمتغير هي ٢ ، ولذا تسمى معادلة من الدرجة الثانية .

وفي المعادلة (د) تلاحظ أن أكبر قوة للمتغير هي ٣ ، ولذا تسمى معادلة من الدرجة الثالثة .

ومن ذلك نستطيع القول إن : درجة المعادلة تحدد بأكبر قوة للمتغير الموجود فيها .

تدريب أكمل الفراغات

المعادلة	الدرجة	معامل $س^٢$	معامل س	الحد المطلق
$٤س^٢ + ٥س + ٦ = ٠$	٢	...	٥	٦
$٦س^٢ + ٥ = ٠$	...	...	...	...
$٣س + ٦ = ٠$	١	...	...	...
$٩س - ٧س^٢ = ٦$	...	...	...	-٦
$س^٢ + ١٣س - ٥ = ٩$	...	...	...	...

حل معادلات الدرجة الثانية على صورة : $أ س^٢ + جـ = صفر$.

لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد نتبع قواعد التحويلات المكافئة مع مراعاة خصوصية كل معادلة . وفي هذه الوحدة سوف نقوم بحل نوع واحد من أنواع معادلات الدرجة الثانية والتي على الصورة : $أ س^٢ + جـ = صفر$.
وفيما يلي نعطي بعض الأمثلة لحل هذا النوع من المعادلات :

مثال (١) حل المعادلة : $٤ أ^٢ - ٦٤ = ٠$

الحل : $٤ أ^٢ - ٦٤ = ٠$

$٤ أ^٢ - ٦٤ + ٦٤ = ٠ + ٦٤$ (بإضافة ٦٤ إلى طرفي المعادلة)

$٤ أ^٢ = ٦٤$ ، $\frac{٤ أ^٢}{٤} = \frac{٦٤}{٤}$ (بقسمة طرفي المعادلة على ٤)

$أ^٢ = ١٦$ ، $أ = \pm \sqrt{١٦}$ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

أي أن $أ = \pm ٤$ ، $\therefore$ مجموعة الحل = { -٤ ، ٤ } .

التحقق :

عندما $أ = -٤$

الطرف الأيمن $= ٤أ^٢ - ٦٤ = ٤ \times (-٤)^٢ - ٦٤ = ٤ \times ١٦ - ٦٤$

$= ٦٤ - ٦٤ =$ صفر $=$ الطرف الأيسر .

ويقوم الطالب بالتحقق عندما : $أ = ٤$

مثال (٢) حل المعادلة $٤ل^٢ = ٩$

الحــل : $٤ل^٢ = ٩$

$\frac{٤ل^٢}{٤} = \frac{٩}{٤}$ (بقسمة طرفي المعادلة على ٤)

$ل^٢ = \frac{٩}{٤}$ ، $ل = \pm \sqrt{\frac{٩}{٤}}$ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

$ل = \pm \frac{٣}{٢}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{ -\frac{٣}{٢} ، \frac{٣}{٢} \}$.

التحقق : عند $ل = -\frac{٣}{٢}$

الطرف الأيمن $= ٤ل^٢ = ٤ \times (-\frac{٣}{٢})^٢ = ٤ \times \frac{٩}{٤} = ٩ =$ الطرف الأيسر .

وبالمثل يمكن التحقق عند $ل = \frac{٣}{٢}$ ويترك ذلك للطالب .

مثال (٣) إذا كان ثلاثة أمثال مربع عدد يساوى ٢٤٣ ، فما هو العدد؟

الحـــل : نفرض أن العدد = س

∴ مربع العدد = س^{٢} ، ثلاثة أمثال مربع العدد = ٣س^{٢} ،

∴ ٣س^{٢} = ٢٤٣ ،

$\frac{٣س^{٢}}{٣} = \frac{٢٤٣}{٣}$ (بقسمة طرفي المعادلة على ٣)

س^{٢} = ٨١ ،

∴ س = ± $\sqrt{٨١}$ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

∴ س = ± ٩ ،

∴ مجموعة الحل = { − ٩ ، ٩ }.

وعلى الطالب التحقق من الحل .

تمارين ومسائل

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

[١] س^{٢} − ٨١ = ٠ [٢] ٣ ل^{٢} − ١٤٧ = ٠

[٣] $\frac{١}{٤}$ س^{٢} = $\frac{١}{٩}$ [٤] −٩ هـ^{٢} + ٢٥ = ٠

[٥] ٥س^{٢} + ٤ = ٣ س^{٢} + ١٨ [٦] (٥أ + ٣)(٥أ − ٣) = ٠

[٧] $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{٣}{٧}$ س = $\frac{٥٤}{٧}$ [٨] ٠,٠٥ س^{٢} + ٠,٢ س^{٢} = ٠,٠١

٤ : ٤ مسائل تطبيقية

لاحظت في دراستك السابقة أن هناك العديد من المسائل التطبيقية التي تعطى علاقة بين متغير وعدد ، وتكتب على صورة معادلة أو متراجحة .

وفي هذا الدرس يقوم بحل بعض المسائل التطبيقية لمعادلات الدرجة الأولى والثانية ومتراجحات الدرجة الأولى .

وسنبدأ أولاً بتكوين المعادلة أو المتراجحة وفق نص المسألة التطبيقية :

مثال (١) كوّن المعادلات المعبرة عما يأتي :

أ) قطعة أرض مستطيلة الشكل طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٥٠ متراً ومحيطها يساوي ٢٤٠ متراً .

ب) مساحة مستطيل تساوي ٥٠ متراً مربعاً ، وطوله ضعف عرضه .

جـ) خمسة أمثال مربع عدد يساوى ٨٠ .

الحــل :

أ) نفرض عرض القطعة المستطيلة = ص

العلاقة الأولى : طول القطعة المستطيلة يزيد عن عرضها بمقدار ٥٠ متراً .

∴ طول القطعة = ص + ٥٠

العلاقة الثانية : محيط القطعة المستطيلة يساوى ٢٤٠ متراً .

∴ محيط القطعة = ٢٤٠ متر

∴ ٢ (الطول + العرض) = ٢٤٠

٢ (ص + ٥٠ + ص) = ٢٤٠

٢(٢ص + ٥٠) = ٢٤٠

٤ ص + ١٠٠ = ٢٤٠

∴ المعادلة هي ٤ص + ١٠٠ = ٢٤٠

ب) نفرض أن عرض المستطيل = س ، ∴ طول المستطيل = ٢ س

∴ مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ٢ س × س = ٢ س^{٢}

العلاقة هي مساحة المستطيل تساوي ٥٠ متر مربع

∴ المعادلة : ٢ س^{٢} = ٥٠ .

جـ) نفرض أن العدد = ل

∴ مربع العدد ل^{٢} وبالتالي فإن خمسة أمثال مربع العدد = ٥ ل^{٢}

العلاقة هي خمسة أمثال مربع العدد يساوي ٨٠

∴ المعادلة تكون : ٥ ل^{٢} = ٨٠

مثال (٢) كوِّن المتراجحات المعبرة عما يأتي :

أ) سبعة أمثال عدد طبيعي أصغر من ٥٠ .

ب) عمر أمل يزيد عن عُمر منى بخمس سنوات ،ومجموع عمريهما يقل عن أو يساوى ٤٥ سنة .

الحل :

أ) نفرض أن العدد الطبيعي = هـ

∴ سبعة أمثال العدد = ٧ هـ

العلاقة أن سبعة أمثال العدد أصغر من ٥٠ .

∴ المتراجحة : ٧ هـ > ٥٠ .

ب) نفرض أن عمر أمل = ع

∴ عُمر منى = ع – ٥

العلاقة هي مجموع عمريهما يقل عن أو يساوى ٤٥ سنة

∴ ع + (ع – ٥) ≤ ٤٥

المتراجحة : ٢ع – ٥ ≤ ٤٥

مثال (٣) إذا كان الفرق بين عُمر أب وعُمر ابنه الآن ٢٥ سنة ، وبعد ثمان سنوات يصبح ضعف عُمر الأب مساوياً ٧ أمثال عُمر الابن ، فما عمر كل منهما الآن ؟

الحـــل : نفرض أن عُمر الأب = س

∴ عمر الابن = س – ٢٥

بعد ثمان سنوات يكون عمر الاب = س + ٨

وعمر الابن = (س – ٢٥) + ٨ = س – ١٧

٢(س + ٨) = ٧ (س – ١٧)

٢س + ١٦ = ٧س – ١١٩

٢س + ١٦ – ١٦ = ٧س – ١١٩ – ١٦ (بطرح ١٦ من طرفي المعادلة)

٢س = ٧س – ١٣٥

٢س – ٧س = ٧س – ١٣٥ – ٧س (بطرح ٧س من طرفي المعادلة)

– ٥س = – ١٣٥

$\frac{-٥س}{-٥} = \frac{-١٣٥}{-٥}$ (بقسمة طرفي المعادلة على -٥)

∴ س = ٢٧

∴ عمر الأب = ٢٧ سنة ، عمر الابن = ٢٧ - ٢٥ = ٢ سنة

التحقق : الفرق بين عُمر الأب وعُمر الابن = عُمر الأب - عُمر الابن

= ٢٧ - ٢ = ٢٥ سنة .

∴ ضعف عمر الاب بعد ٨ سنوات = ٧ أمثال عُمر الابن بعد ٨ سنوات .

٢ (٢٧ + ٨) = ٧ (٢ + ٨) ٧٠ = ٧٠

مثال (٤) ما العدد النسبي الذي إذا أضيف ٥ إلى مثليه كان الناتج أكبر من ١٨ ؟

الحل : نفرض أن العدد النسبي = ل

∴ مثلى العدد = ٢ل ، ٢ ل + ٥ > ١٨ .

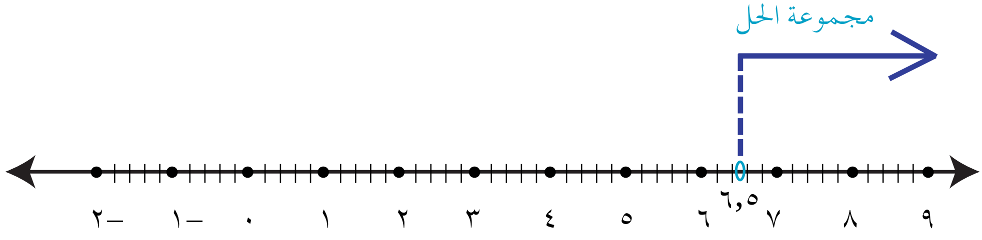
٢ ل + ٥ - ٥ > ١٨ - ٥ (بطرح ٥ من طرفي المتراجحة)

٢ ل > ١٣

$\frac{٢ل}{٢} > \frac{١٣}{٢}$ (بقسمة طرفي المتراجحة على ٢)

ل > ٦,٥

ويمثل الحل على خط الأعداد كما في الشكل (٤–٦)



شكل (٤ – ٦)

مثال (٥) إذا كانت أربعة أمثال مساحة مربع تساوي ٣٦سم^{٢} .فأوجد طوله

الحــل : نفرض أن طول ضلع المربع = ص

$\because$ مساحة المربع = طول الضلع $\times$ نفسه

$\therefore$ مساحة المربع = ص $\times$ ص =ص^{٢}

$\because$ أربعة أمثال مساحة المربع = ٤ص^{٢} ،

$\therefore$ ٤ص^{٢} = ٣٦

$\frac{\text{٤ص}^{٢}}{٤} = \frac{٣٦}{٤}$ (بقسمة طرفي المعادلة على ٤)

ص^{٢} = ٩ ، ص = $\pm\sqrt{٩}$ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

ص = $\pm$ ٣

لاحظ أن طول المربع لايمكن أن يكون سالباً (اذن – ٣ حل مرفوض) .

$\therefore$ طول ضلع المربع = ٣سم .

التحقق : أربعة أمثال مساحة المربع = ٤ص^{٢} = ٤ $\times$ (٣)^{٢}

= ٤ $\times$ ٩ = ٣٦سم^{٢} .

تمارين ومسائل

[١] كون المعادلات المعبرة عما يأتي :

أ) ضعف مساحة مربع تساوي $\frac{١}{٢}$ ٤ متر مربع .

ب) مستطيل طوله يساوي ضعف عرضه ومساحته ١٨ متراً مربعاً .

جـ) مثلث ارتفاعه يساوي ثلث طول قاعدته ، ومساحته ٦سم^{٢} .

ء) محيط دائرة يساوي ١٢,٥سم .

[٢] ما العدد الذي إذا أضيف إليه سدسه كان الناتج ١٤ ؟

[٣] دخل طالب امتحانات ثلاث مواد فحصل في المادة الأولى على ٨٩ درجة وفي الثانية ٩٠ درجة في الدرجة التي يجب أن يحصل عليها في المادة الثالثة حتى يكون مجموع درجاته للثلاث المواد لا يقل عن ٢٧٠ درجة .

[٤] مستطيل عرضه يساوي خمس طوله ومساحته ٢٠سم^{٢} . أوجد كلاً من طوله وعرضه .

[٥] إذا كان ثلاثة أرباع مربع عدد يساوى ٢٧ ، فما هو العدد ؟

[٦] إذا كان خمس عدد مضروباً في أربعة اتساعه يساوي ٨٠ ، فما هو العدد؟

[٧] إذا كانت ربع مساحة قطعة أرض على شكل مربع تساوي ١٦ متراً مربعاً ، فأوجد طولها .

[٨] مثلث ارتفاعه يساوي خمسي طول قاعدته ، ومساحته ١٢٥ سم^{٢} ، أوجد قاعدته وارتفاعه .

٤ : ٥ تمارين ومسائل عامة

حل المعادلات في التمارين من [١] إلى [١١] وتحقق من صحة الحل :

[١] $\frac{\text{س}}{٣} - ٤ = \frac{\text{س}}{٤} - ٣$

[٢] $٢\text{س} - ٢ = ٤ \left(\frac{\text{س} + ٢}{٣} \right)$

[٣] $\frac{٢\text{س} - ١}{٣} = \frac{\text{س}}{٤} + \frac{٣}{٢}$

[٤] $\frac{٥\text{س} - ٧}{٤} - \frac{٦\text{س} - ٩}{٨} = \frac{\text{س} + ١}{٢}$

[٥] $\frac{٥}{\text{س}} + ١٠ = ٠$

[٦] $\frac{١}{٣\text{س}} - \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٦}$

[٧] $٣ - (\text{س} - ١) = ٤ - \text{س}$

[٨] $\frac{\text{س} + ٤}{٢} - \frac{\text{س} - ٤}{٥} = \frac{\text{س} + ٧}{١٥}$

[٩] $\frac{٨(١ + ٣\text{س})}{٢} - \frac{٢٤}{٦} = ١٢\text{س}$

[١٠] $\frac{\text{س} - ٨}{٢} = \frac{٥\text{س}}{٢} - (٢\text{س} + ٤)$

[١١] $\frac{\text{س} - ٢}{٤} + \frac{١}{٣} - \left(\text{س} - \frac{٢\text{س} - ١}{٣} \right) = ٠$

حل المعادلات في التمارين من [١٢] إلى [١٧] في ح :

[١٢] س^{٢} − ٩ = ١٦

[١٣] ٤س^{٢} − ٩ = ٠

[١٤] س^{٢} − ٧ = ٠

[١٥] $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ −١٨ = ٠

[١٦] ٢س^{٢} − ٤٥ = −٣س^{٢}

[١٧] ٦س^{٢} − ٤٢ = س^{٢} + ٣٨

حل المتراجحات في التمارين من [١٨] إلى [٢٥] التالية ، ثم مثل مجموعة الحل على خط الأعداد .

[١٨] ١٢ س < ١٨

[١٩] ٧ س − ٢٤ > ٤

[٢٠] ٨س ≤ ٥ + ١٢س

[٢١] ١٧ − س < ٦ − ٦س

[٢٢] ٥(س −١) + ٧ ≥ ١ −٣(س + ٢)

[٢٣] ١,٧ − ١٣ (١ − م) > − (م − ١,٩)

[٢٤] ٤ (أ + ٨) − ٧ (أ − ١) > ١٢

[٢٥] ٣س + ٧ < (س + ٢) + (٢س + ١)

حل المتراجحات التالية في التمارين من [٢٦] إلى [٣٠]، ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد :

[٢٦] −٢ ≥ ٣س + ٤ ≥ ٩

[٢٧] ١ > ٨ − ٢س > ١٠

[٢٨] −٥ > ٣ س − ٢ > ٥

[٢٩] ٨ > ٣ س + ٢ ≥ ١٤

[٣٠] −٧ ≥ ٥ س − ٢ > ١٢

[٣١]حل المتراجحتين في كل من(أ ، ب) وأوجد مجموعة الحل المشترك لهما :

أ) $\begin{cases} ٧س + ٣ \leq ٥س - ١٩ \\ ٤س + ١ \geq ٢٢ - ٣س \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \frac{س - ١}{٢} - \frac{س - ٤}{٣} > ٢س - ١ \\ ٢س - \frac{س - ٥}{٣} > س - ٣ \end{cases}$

[٣٢] ما العدد الذي مربعه يساوي ١٩٦ ؟

[٣٣] مربع مساحته ١٣٦٩ متراً مربعاً . أوجد طول ضلعه .

[٣٤] مستطيل طوله ضعف عرضه ، ومساحته ٣٦,٩٨سم^{٢} ، أوجد محيطه .

[٣٥] قسم مبلغ ٣١٢٠٠ ريالاً بين ثلاثة شركاء في انتاج البن بحيث يأخذ الأول ٧٠٠ ريالاً أكثر من الثاني ، ويأخذ الثالث ٥٠٠ ريالاً أكثر من الثاني . احسب حصة كل واحد منهم .

[٣٦] وزع مبلغ ٢٥٠٠ ريالاً على طالبين ، فكان حصة الأول تزيد عن حصة الثاني بمقدار ٣٢٠ ريالاً ، فكم تكون حصة كل منهما ؟

[٣٦] وزع مبلغ ٢٥٠٠ ريالاً على طالبين ، فكان حصة الأول تزيد عن حصة الثاني بمقدار ٣٢٠ ريالاً ، فكم تكون حصة كل منهما ؟

٤ : ٦ أختبار الوحدة

أوجد مجموعة الحل للمتراجحات التالية ، ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد .

[١] $\frac{٣س - ٤}{٥} < س + \frac{٣}{٢}$

[٢] ٣س < ٤ − ٥ س < ٥ + ٣س

[٣]
$$\begin{cases} ٥(س - ٢) - س < ٢ \\ ١ - ٣(س - ١) < -٢ \end{cases}$$

حل المعادلات التالية :

[٤] $\frac{١٨}{س} = ٦$

[٥] ٣,٠٢ × م = ٠

[٦] $\frac{١}{٢,٤}$ س = ١,٤

[٧] $\frac{س}{٥}$ − ٢, = $\frac{س}{٢}$ − ٠,٨

[٨] ٩س^{٢} − ٨١ = ٠

[٩] مربع مساحته ٥٦,٥ متراً مربعاً ، أوجد طول ضلعه .

[١٠] مستطيل محيطه ٢٤سم ، وطوله يزيد عن عرضه بمقدار ٢سم .

أوجد بعديه .

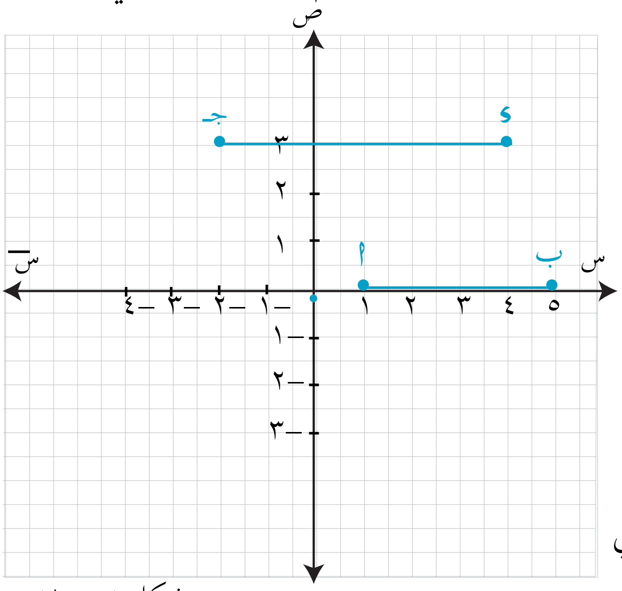
الوحدة الخامسة
الهندسة التحليلية والتحويلات الهندسية

٥ : ١ البعد بين نقطتين على مستقيم يوازي أحد المحورين

نشاط (١)

ارسم مستوى إحداثي س س̅ ص ص̅ ، ثم حدد عليه النقاط أ (١ ، ٠) ب (٥ ، ٠) ، جـ (–٢ ، ٣) ، ء (٤ ، ٣) [انظر الشكل (٥–١)].

– صل النقطتين أ ، ب والنقطتين جـ ، ء ، ثم أجب عن الآتي :



شكل (٥ – ١)

– ما علاقة كل من $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ بمحور الصادات ؟

– هل يختلف الإحداثي السيني لكل من:

* النقطتين أ، ب ؟
* النقطتين جـ ، ء ؟

– هل يختلف الإحداثي الصادي لكل من : النقطتين أ، ب ؟ النقطتين جـ ، ء ؟

– ما هو البعد بين النقطتين أ، ب ؟

– ما هو البعد بين النقطتين جـ ، ء ؟

– ما علاقة $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ؟

إذا كان ا ($س_١$ ، ص) ، ب ($س_٢$ ، ص) ، فإن :

١) $\overleftrightarrow{اب}$ // محور السينات ، لان الأحداثي الصادي لكل من النقطتين ا ، ب متساوي .

٢) $\overleftrightarrow{اب}$ ⊥ محور الصادات .

٣) | ا ب | = | $س_٢$ − $س_١$ |

نشاط (٢) :

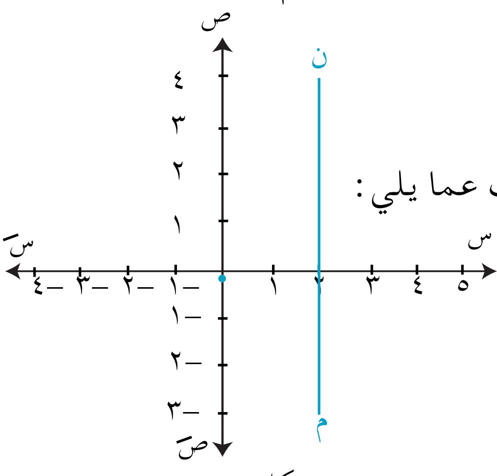
ارسم مستوى إحداثي س سَ ص صَ ، ثم حدد عليه النقطتين م (٢ ، −٣) ، ن (٢ ، ٤)

[انظر الشكل (٥–٢)] .

– صل النقطتين م ، ن ، ثم أجب عما يلي :

– ما علاقة $\overleftrightarrow{م ن}$ بكل من المحورين الإحداثيين ؟

– ماذا تلاحظ على إحداثي كل من النقطتين م ، ن ؟



شكل (٥ – ٢)

إذا كان م (س ، $ص_١$) ، ن (س ، $ص_٢$) ، فإن :

١) $\overleftrightarrow{م ن}$ // محور الصادات ، لأن الإحداثي السيني لكل من النقطتين م ، ن متساوي .

٢) $\overleftrightarrow{م ن}$ ⊥ محور السينات .

٣) | م ن | = | $ص_٢$ − $ص_١$ |

مثال (١) أكمل الفراغ في كل زوج من النقاط الآتية كي يكون $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ موازياً لمحور السينات :

(١) أ (٣ ، –١) ، ب (٧ ، ...)

(٢) أ (صفر ، ...) ، ب (–٥ ، ٣)

الحل : لكي يكون $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ موازياً لمحور السينات يجب أن يكون الإحداثيين الصاديين لكل من أ ، ب متساويين .

(١) ب (٧ ، –١) ، (٢) أ (صفر ، ٣)

مثال (٢) أكمل الفراغات الآتية لكي يكون $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ موازياً لمحور الصادات :

(١) جـ (٥ ، ٣) ، ء (... ، –٤)

(٢) جـ (... ، ٢) ، ء (–٣ ، –٢)

الحل : ∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ // محور الصادات ، فإن الاحداثي السيني لكل من جـ ، ء متساوي .

∴ (١) ء (٥ ، –٤) (٢) جـ (–٣ ، ٢)

مثال (٣) لتكن أ (٠ ، ٣) ، ب (٥ ، ٣) ، جـ (–٣ ، –١) ، ء (٣ ، –١) ، هـ (٣ ، ٠) نقاط في المستوى ، اذكر ما يلي :

(١) مستقيماً يوازي محور السينات .

(٢) مستقيماً يوازي محور الصادات .

(٣) مستقيمان متوازيان .

الحـــل :

(١) لاحظ أن الإحداثيان الصاديان لكل من النقطتين أ ، ب متساويان .

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // محور السينات .

كذلك : $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ // محور السينات (لماذا ؟)

(٢) لاحظ أن الإحداثي السيني لكل من النقطتين ء ، هـ متساوي .

∴ $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // محور الصادات .

(٣) ∵ كل من $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ يوازي محور السينات .

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$.

مثال (٤) لتكن أ (٢ ، ١) ، ب (٥ ، ١) ، جـ (٢ ، –٢) ، ء (٢ ، –١) نقاط في المستوى الإحداثي :

(١) ما المحور الذي يوازي $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ؟ كم البعد بين النقطتين أ ، ب ؟

(٢) ما المحور الذي يوازي $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ؟ كم البعد بين النقطتين جـ ، ء ؟

الحـــل :

(١) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // محور السينات (لماذا ؟) ،

|أ ب| = ٥ – ٢ = ٣ وحدات طول .

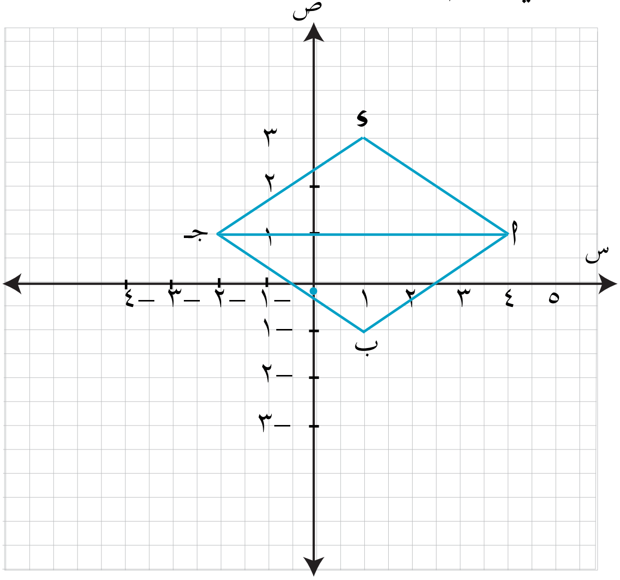
(٢) $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ // محور الصادات (لماذا ؟) ،

|جـ ء| = –١ – (–٢) = –١ + ٢ = ١ وحدة طول .

مثال (٥) ارسم مستوى إِحداثي ، ثم حدّد عليه النقاط التالية :

ا (٤ ، ١) ،
ب (١ ، –١) ،
جـ (–٢ ، ١) ،
ء (١ ، ٣) .

صل بين هذه النقاط لتحصل على الشكل ا ب جـ ء . ماذا تسمي هذا الشكل ؟



شكل (٥ –٣)

أوجد طول كل من قطريه ومساحته . [انظر الشكل (٥–٣)] .

الحــل : الشكل ا ب جـ ء . معين . (لماذا ؟)

| ا جـ | = ٤ – (–٢) = ٤ + ٢ = ٦ وحدات طول .

| ب ء | = ٣ – (–١) = ٣ + ١ = ٤ وحدات طول .

مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي قطريه .

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ = ١٢ وحدة مربعة .

تمارين ومسائل

[١] أذكر المحور الذي يوازي $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ في كل من الحالات الآتية :

ا) س (٢ ، ٤) ، ص (٢ ، ٠) ، ب) س (٣ ، –٢)، ص(–٢ ، –٢)،

جـ) س (٤ ، ٠)، ص(٠ ،٠) ، ء) س (–٥ ، –٤) ، ص (–٥ ، –١) .

[٢] إكمل الفراغات في الجمل الآتية بما يجعلها صحيحة :

أ) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // محور السينات، وكانت م (٢ ، ٣) فإن ن (–٣، . . .)

ب) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // محور الصادات، وكانت م(٢ ، ٣) فإن ن(. . . ،–٣)

جـ) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // محور الصادات، وكانت م (–٤ ،صفر) فإن ن(. . . ، ٣)

ء) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // محور السينات، وكانت م(–٤ ، صفر) فإن ن(٥، . . .)

[٣] أوجد البعد بين النقطتين ع ، ل في كل حالة مما يأتي :

أ) ع (٤ ، ٣) ، ل (٠ ، ٣)   ب) ع (–٥ ، ١) ، ل (٢ ، ١)

جـ) ع (٤ ، –٥)، ل (٤ ، ٠)   ء) ع (–٢ ، –١) ، ل (–٢ ، –٦)

هـ) ع (٠ ، ٣) ،ل (٠ ، –٣)   و) ع (–١ ، ١) ، ل (–١ ، ٧)

[٤] أكمل الفراغات في الجمل الآتية بما يجعلها صحيحة حيث تقع النقطة م على يسار النقطة ن .

أ) م (٣، صفر)، ن(. . .، صفر) إذا كان البعد بين م ، ن يساوي وحدتين.

ب) م (. . . ، ٢)، ن (٥ ، ٢) إذا كان البعد بين م، ن يساوي ٤ وحدات .

جـ) م (. . .، –٣) ، ن(٤ ،–٣) إذا كان البعد بين م ، ن يساوي ٦ وحدات.

ء) م (–٥ ،١) ، ن(. . .،١) إذا كان البعد بين م ، ن يساوي ٣ وحدات .

[٥] لتكن س (٣ ، ٧) ، ص (٣ ، –٢) ، اذكر ما يلي:

أ) ثلاث نقاط تقع على $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$.

ب) نقطة تقع بين س ، ص وتبعد عن س ٣ وحدات .

جـ) نقطة على $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ تبعد عن س ٥ وحدات وعن ص ٤ وحدات.

[٦] إذا كانت م (–١ ، ٥)، ن (٣ ، ٥) ، أوجد إحداثيي النقطة ل $\in$ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ في كل حالة مما يأتي :

أ) |ل م| = ٢ وحدة طول ، |ل ن| = ٦ وحدات طول .

ب) $|\text{ل م}| = |\text{ل ن}|$.

جـ) $|\text{ل م}|$ = ٨ وحدات طول ، $|\text{ل ن}|$ = ٤ وحدات طول .

[٧] إِذا كان $\overleftrightarrow{\text{ط ك}}$ // محور الصادات والنقطة ط (٢ ، ٣) . حدّد إِحداثيي النقطة ك في كل حالة من الحالات الآتية :

أ) البعد بين النقطتين ط ، ك يساوي ٣ وحدات .

ب) البعد بين النقطتين ط ، ك يساوي ٥ وحدات .

[٨] $\overleftrightarrow{\text{ل م}}$ // محور السينات ، والنقطة ل (–٢ ، ١) ، فإِذا كان البعد بين النقطتين ل ، م يساوي س . حدّد إِحداثيي النقطة م في كل حالة من الحالات الآتية :

أ) س = وحدة طول واحدة .   ،   ب) س = ٤ وحدات طول ،

جـ) س = ٦ وحدات طول .   ،   ء) س = ١٠ وحدات طول .

[٩] إِذا كان أ ب جـ ء معين فيه : أ (٦ ، ١)، ب (٣ ، ٠) ، جـ(٠ ، ١)، ء (٣ ، ٢) ، أوجد مساحته .

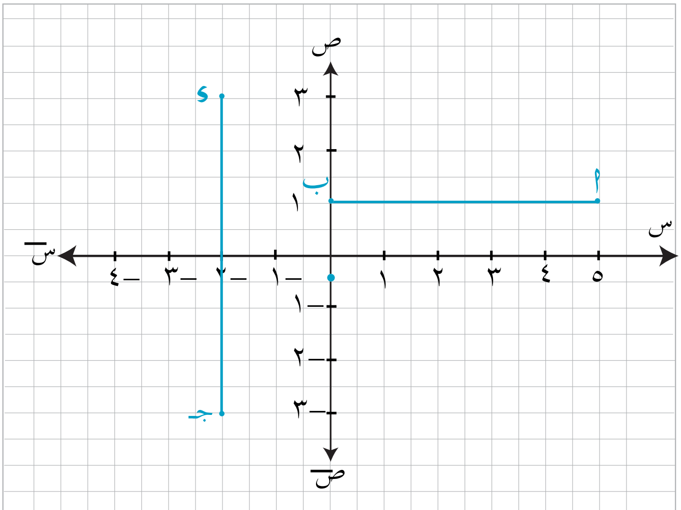
[١٠] الشكل ب جـ ء هـ فيه : ب (٤ ، –١) ، جـ(–١ ، –١) ، ء (–١ ، ٤) ، هـ (٤ ، ٤) .

* ما نوع هذا الشكل ؟ ثم احسب محيطه ومساحته .

[١١] Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب فيه : أ (٣ ، ٣) ، ب (٣ ، –١) وبعد ب عن جـ يساوي ٥ وحدات .

* اوجد احداثي النقطة جـ ، ثم احسب مساحة المثلث أ ب جـ .

٥ : ٢ إحداثي منتصف قطعة مستقيمة على مستقيم يوازي أحد المحورين



شكل (٥ – ٤)

نشـــاط

ارسم مستوى إحداثي، ثم حدّد عليه النقاط:

أ (٥ ، ١) ،

ب (٠ ، ١) ،

جـ (–٢ ، –٣) ،

ء (–٢ ، ٣) .

[انظر الشكل (٥–٤)]

– ما طول كل من $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ ؟

– إذا كانت النقطة $د_1$ تنصف $\overline{\text{أب}}$ والنقطة $د_2$ تنصف $\overline{\text{جـ ء}}$. حدد إحداثي كل من النقطتين $د_1$ ، $د_2$.

– ماذا تلاحظ عن إحداثي كل من النقطتين $د_1$ ، $د_2$ ؟

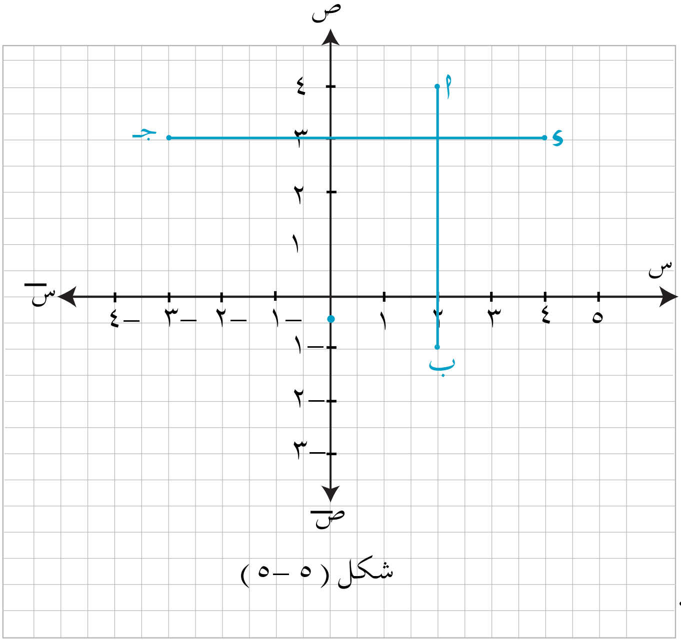
(١) إذا كانت أ ($س_1$ ، ص) ، ب ($س_2$ ، ص) ، والنقطة د منتصف $\overline{\text{أب}}$ فإن د هي ($\frac{س_1 + س_2}{2}$ ، ص) .

(٢) إذا كانت جـ (س ، $ص_1$) ، ء (س ، $ص_2$) ، ونقطة م منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$ فإن م هي (س ، $\frac{ص_1 + ص_2}{2}$) .

مثال (١)

إذا كانت : أ(٢ ، ٤)، ب (٢ ، −١) ، جـ (−٣ ، ٣) ، ء (٤ ، ٣) . [كما في الشكل (٥−٥)] .

اكتب نقطة المنتصف لكل من $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{جـ ء}}$.



شكل (٥ −٥)

الحل :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // محور الصادات، منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ هي: $\left(٢ ، \frac{٤ - ١}{٢}\right) = \left(٢ ، \frac{٣}{٢}\right)$،

$\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ // محور السينات ،منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$ هي: $\left(\frac{-٣ + ٤}{٢} ، ٣\right) = \left(\frac{١}{٢} ، ٣\right)$.

مثال (٢)

لتكن هـ(٣ ، ٣) ، م (−١ ، ٣) ، ن (−١ ، −٤) نقاط في المستوى ، فإذا كانت $ن_١$ ، $ن_٢$ منتصفات $\overline{\text{هـ م}}$ ، $\overline{\text{م ن}}$ على الترتيب.

أوجد إحداثيي كل من $ن_١$ ، $ن_٢$.

الحل :

$\overleftrightarrow{\text{هـ م}}$ // محور السينات (لماذا ؟)

$\therefore ن_١ \left(\frac{٣ - ١}{٢} ، ٣\right) = (١ ، ٣)$ ،

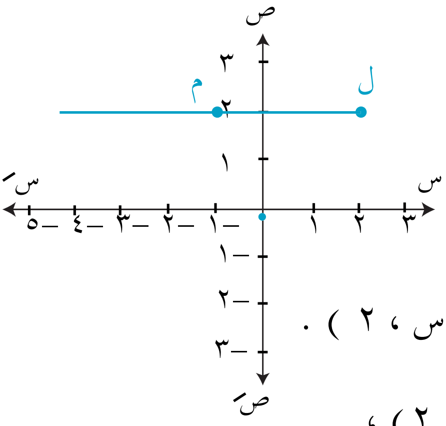
$\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // محور الصادات (لماذا ؟)

∴ $ن_{٢}$ (−١ ، $\frac{٣ - ٤}{٢}$) = (−١ ، $\frac{-١}{٢}$) ،

مثال (٣) إذا كانت ل ، م ، د ثلاث نقاط تقع على مستقيم واحد

حيث ل (٢ ، ٢) ، م (−١ ، ٢) ، |ل م| = |م د| ، أوجد إحداثي

النقطة د .



شكل (٥ – ٦)

الحل :

$\overleftrightarrow{\text{ل م}}$ // محور السينات ، لماذا؟

م نقطة منتصف $\overline{\text{ل د}}$ ، لتكن د (س ، ٢) .

∴ م هي ($\frac{٢ + س}{٢}$ ، ٢) = (−١ ، ٢) ،

بمساواة الإحداثيين السينين لنقطة م ،

∴ $\frac{٢ + س}{٢}$ = −١ (بضرب الطرفين في ٢)

٢ + س = −٢ (بطرح ٢ من الطرفين)

٢ − ٢ + س = −٢ − ٢

س = −٤

∴ د هي (−٤ ، ٢) .

مثال (٤)

س ص ع مثلث فيه:

س (٣ ، −٢) ،

ص (−٥ ، −٢) ،

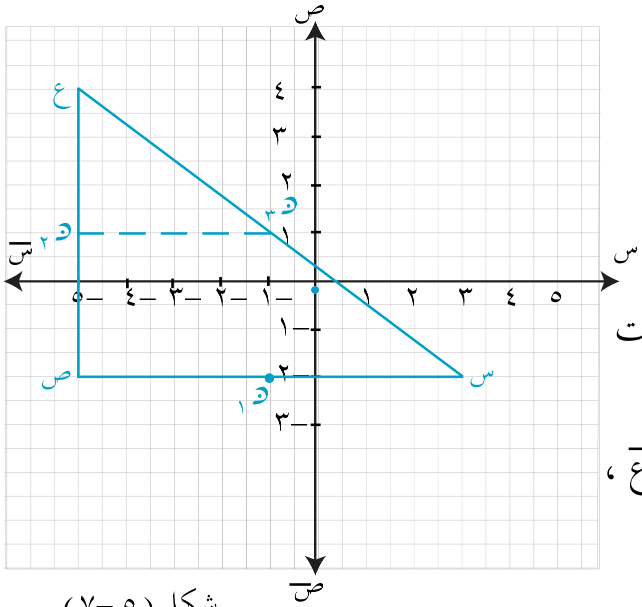
ع (−٥ ، ٤) ، فإذا كانت

$د_{١}$ ، $د_{٢}$ ، $د_{٣}$

منتصفات $\overline{س ص}$ ، $\overline{ص ع}$ ،

$\overline{س ع}$ على الترتيب .

حيث $د_{٣}$ (−١ ، ١)



شكل (٥ −٧)

أوجد طول كل من ، $\overline{د_{١} د_{٣}}$ ، $\overline{د_{٢} د_{٣}}$. [انظر الشكل (٥−٧)] .

الحـــل : لكي نوجد طول كل من: $\overline{د_{١} د_{٣}}$ ، $\overline{د_{٢} د_{٣}}$ يجب أن نوجد إحداثيّ النقاط $د_{١}$ ، $د_{٢}$.

لاحظ أن $\overleftrightarrow{س ص}$ // محور السينات ، $\overleftrightarrow{ص ع}$ // محور الصادات ،

$$د_{١} = \left(\frac{٣ + (−٥)}{٢} ، −٢ \right) = \left(\frac{٣ − ٥}{٢} ، −٢ \right) = (−١ ، −٢) .$$

$$د_{٢} = \left(−٥ ، \frac{−٢ + ٤}{٢} \right) = (−٥ ، ١) .$$

∵ $د_{٣}$ هي (−١ ، ١) .

∴ $|د_{١} د_{٣}| = ١ − (−٢) = ١ + ٢ = ٣$ وحدات طول ،

$|د_{٢} د_{٣}| = −١ − (−٥) = −١ + ٥ = ٤$ وحدات طول .

تمارين ومسائل

[١] أوجد إِحداثيّ نقطة المنتصف د لـ $\overline{\text{س ص}}$ في كل من الحالات الآتية:

أ) س (٢ ، ٣) ، ص (−٤ ، ٣)

ب) س(٠ ، ٥) ، ص (٠ ، −١)

جـ) س (٣ ، ٦) ، ص (٣ ، −١)

ء) س (٦,٥ ، ٠,٥) ، ص (٠,٥ ، ٠,٥)

[٢] لتكن أ (−٥ ، ٢) ، ب (−١ ، ٢) ، جـ(٥ ، ٢) ، ء(−١ ، −٤)، هـ(−٥ ، ٦) نقاط في المستوى الاحداثي . فإذا علمت أن النقاط ن$_١$ ، د$_٢$ ، د$_٣$ ، د$_٤$ هي منتصفات : $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$ على الترتيب .

فأوجد إِحداثيّ كل من : د$_١$ ، د$_٢$ ، د$_٣$ ، د$_٤$.

[٣] إِذا كانت النقاط : س ، ص ، ع تقع على مستقيم واحد وكانت س (−٣ ، ١) ، ع (١ ، ١) . أوجد احداثي النقطة ص في كل من الحالات الآتية :

أ) | س ص | = | ص ع | ، ب) س هي نقطة المنتصف لـ $\overline{\text{ص ع}}$.

[٤] إِذا كانت النقاط : ط ، ل ، م ، د تقع على مستقيم واحد حيث ط (٣ ، ٥) ، د (٣ ، −٣)، | ط ل | = | ل د |، | ل م | = | م د | .

اكتب إِحداثيّ كل من ل ، م .

[٥] إِذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // محور السينـــات ، وكانت النقطة جـ (٠ ، ١) تنصف $\overline{\text{أ ب}}$، | أ ب | = ٦ وحدات طول، أوجد إِحداثيّ كل من أ ، ب .

[٦] إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ // محور الصادات حيث ء (٤ ، –١) ، |ءهـ| = ٥سم،

وكانت النقطة د تنصف $\overline{\text{ءهـ}}$.أوجد إحداثيّ كل من النقطتين هـ ، د .

[٧] ليكن س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص حيث س (٣ ، ٠) ،

ص (–١ ، ٠) . فإذا كانت ن$_{١}$ منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، ن$_{٢}$ منتصف $\overline{\text{ص ع}}$،

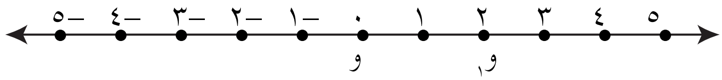
|ص ع| = ٣ وحدات طول ، أوجد إحداثيّ كل من د$_{١}$، د$_{٢}$ ، ثم

أوجد مساحة المثلث س ص ع .

٥ : ٣ الإنســـحــــاب

نشاط (١)

في الشكل (٥–٨)



شكل (٥ – ٨)

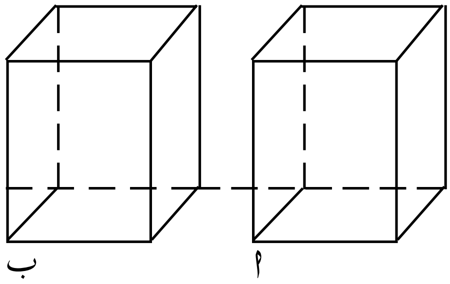
تلاحظ خط الأعداد ، والنقطة « و » تمثل العدد (٠) ، فإذا سحبت النقطة « و » وحدتين في الاتجاه الموجب تلاحظ أن النقطة « و$_{١}$ » تمثل العدد (٢)، وهي صورة « و » بإنسحاب مقداره وحدتين في الاتجاه الموجب .

ماهو العدد الذي يمثل النقطة « و » بانسحاب مقداره ٣ وحدات في الاتجاه الموجب ؟

ما هو العدد الذي يمثل النقطة « و » بانسحاب مقداره ٤ وحدات في الاتجاه السالب ؟

نشاط (٢)

سحب صندوق مسافة ٦سم بحيث بقى محافظاً على وضعه القائم كما في الشكل (٥–٩) ، فإذا انتهى الرأس أ في الوضع ب .



شكل (٥ –٩)

ما المسافة التي تحركها الرأس أ ؟

ما المسافة التي تحركتها كل نقطة على الصندوق ؟

ما المسافة التي تحركها كل حرف جانبي من أحرف الصندوق ؟

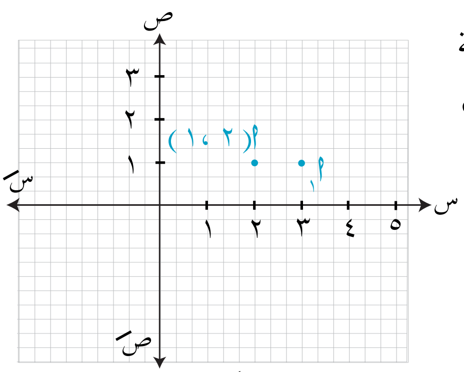
ما المسافة التي تحركها كل من وجهي الصندوق الأمامي والخلفي ؟

نشاط (٣)

ارسم مستوى إحداثي وحدد عليه النقطة أ (٢ ، ١) وصورتها $أ_١$ بانسحاب مقداره وحدة واحدة في الاتجاه الموجب لمحور السينات تلاحظ أن : $أ_١$ (٢ + ١ ، ١) = (٣ ، ١) [انظر الشكل (٥–١٠)] .

– هل تغير الإِحداثي السيني للنقطة $أ_١$ عن الإِحداثي السيني للنقطة أ ؟

– هل تغير الإِحداثي الصادي للنقطة $أ_١$ عن الاحداثي الصادي للنقطة أ ؟



شكل (٥ – ١٠)

حدد النقطة $أ_٢$ صورة النقطة أ بانسحاب مقداره ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور الصادات ؟

– هل يختلف أي من الإحداثيين لكل من النقطتين ا ، ا$_2$ ؟

– ما هي صورة النقطة ا بانسحاب مقداره ٤ وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات ؟

– ماهي صورة النقطة ا بانسحاب مقداره ٥ وحدات في الاتجاه السالب لمحور الصادات ؟

مما سبق نجد أن :

١) إذا أثر انسحاب مقداره ك وحدة في الاتجاه الموجب لمحور السينات ، فإن هذا الانسحاب يربط كل نقطة د (س ، ص) بصورتها (س + ك ، ص)ويعبر عن ذلك رمزياً كما يلي :

(س ، ص) ← (س + ك ، ص)

ويعبر عن الإنسحاب بنفس المقدار في الاتجاه السالب لمحور السينات كما يلي :

(س ، ص) ←(س – ك ، ص)

٢) نعبر عن انسحاب مقداره ل وحده في الاتجاه الموجب لمحور الصادات كما يلي : (س ، ص) ←(س ، ص + ل)

ويعبر عن الانسحاب بالمقدار نفسه في الاتجاه السالب لمحور الصادات كما يلي : (س ، ص) ←(س ، ص – ل) .

مثال (١) حدّد نوع الانسحاب ومقداره في كل حالة من الحالات الآتية :

(١) (س ، ص) ← (س – ٣ ، ص) .

(٢) (س ، ص) ← (س ، ص + ٥) .

(٣) (س ، ص) ⟵ (س ، ص − ١) .

(٤) (س ، ص) ⟵ (س + ٢ ، ص) .

الحل :

(١) انسحاب في الاتجاه السالب لمحور السينات ومقداره ٣ وحدات .

(٢) انسحاب في الاتجاه الموجب لمحور الصادات ومقداره ٥ وحدات .

(٣) انسحاب في الاتجاه السالب لمحور الصادات ومقداره وحدة واحدة.

(٤) انسحاب في الاتجاه الموجب لمحور السينات ومقداره وحدتين.

مثال (٢) عبِّر رمزياً عن الانسحابات الآتية :

(١) انسحاب مقداره ٣ وحدات في الاتجاه السالب لمحور الصادات .

(٢) انسحاب مقداره ٢,٥ وحدة في الاتجاه الموجب لمحور السينات .

(٣) انسحاب مقداره $\frac{٢}{٣}$ وحدة في الاتجاه السالب لمحور السينات .

(٤) انسحاب مقداره $١\frac{١}{٢}$ وحدة في الاتجاه الموجب لمحور الصادات .

الحل :

(١) (س ، ص) ⟵ (س ، ص − ٣) .

(٢) (س ، ص) ⟵ (س + ٢,٥ ، ص) .

(٣) (س ، ص) ⟵ (س − $\frac{٢}{٣}$ ، ص) .

(٤) (س ، ص) ⟵ (س ، ص + $١\frac{١}{٢}$) .

مثال (٣) حدّد صورة النقطة أ(٢ ، –٣) تحت تأثير الانسحابات الآتية :

(١) (س ، ص) ← (س + ٣ ، ص) .

(٢) (س ، ص) ← (س – ٢ ، ص) .

(٣) (س ، ص) ← (س ، ص +٢)، ثم (س ، ص +٢) ← (س + ٥ ، ص) .

(٤) (س ، ص) ← (س ، ص – ٤)، ثم (س ، ص – ٤) ← (س ، ص +٣) .

الحل :

(١) (٢ ، –٣) ← (٢ + ٣ ، –٣) = (٥ ، –٣) .

(٢) (٢ ، –٣) ← (٢ – ٢ ، –٣) = (٠ ، –٣) .

(٣) (٢ ، –٣) ← (٢ ، –٣ + ٢) = (٢ ، –١) ،

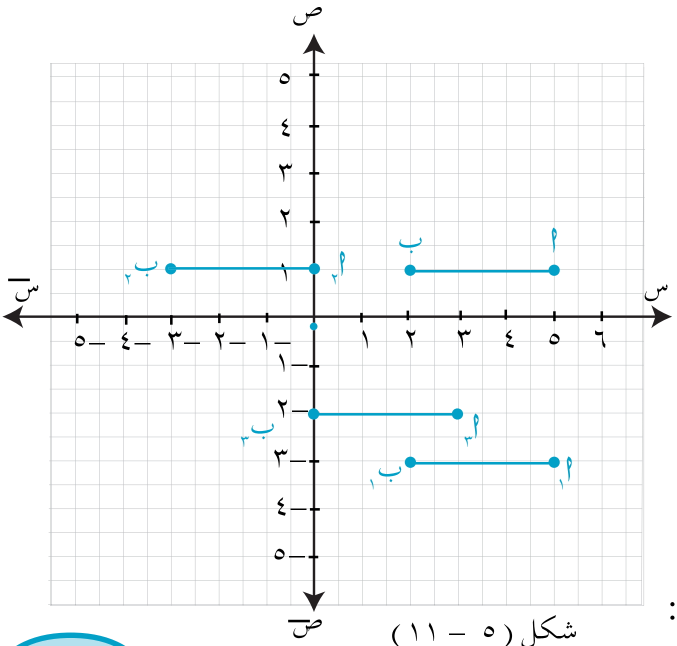
ثم (٢ ، –١) ← (٢ + ٥ ، –١) = (٧ ، –١) .

(٤) (٢ ، –٣) ← (٢ ، –٣ – ٤) = (٢ ، –٧) ،

ثم (٢ ، –٧) ← (٢ ، –٧ + ٣) = (٢ ، –٤) .

مثال (٤)

ارسم في المستوى الاحداثي $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٥ ، ١) ، ب (٢ ، ١)، ثم ارسم صورة $\overline{\text{أ ب}}$ تحت تأثير كل من الانسحابات الآتية :



شكل (٥ – ١١)

(١) (س ، ص) ⟵ (س ، ص – ٤) .

(٢) (س ، ص) ⟵ (س – ٥ ، ص) .

(٣) (س، ص) ⟵ (س – ٢ ، ص)، ثم (س – ٢، ص) ⟵ (س – ٢، ص – ٣) .

الحل :

(١) لتكن $\overline{أ_١ ب_١}$ هي صورة $\overline{أ ب}$ ،

∴ أ (٥ ، ١) ⟵ (٥ ، ١ – ٤) = أ$_١$ = (٥ ، –٣) ،

ب (٢ ، ١) ⟵ (٢ ، ١ – ٤) = ب$_١$ (٢ ، –٣) .

(٢) لتكن $\overline{أ_٢ ب_٢}$ هي صورة $\overline{أ ب}$ فيكون أ (٥ ، ١) ⟵ (٥ –٥ ، ١)

أ$_٢$ = (٠ ، ١) ، ب (٢ ، ١) ⟵ (٢ –٥ ، ١) = ب$_٢$ (–٣ ، ١)

[انظر الشكل (٥–١١)] .

(٣) لتكن $\overline{أ_٣ ب_٣}$ هي صورة $\overline{أ ب}$

أ (٥ ، ١) ⟵ (٥ –٢ ، ١) = (٣ ، ١) ⟵ (٣ ، ١ –٣)

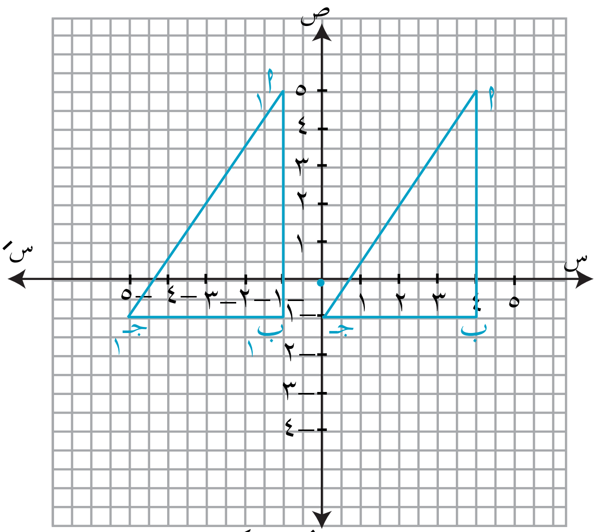
= أ$_٣$ = (٣ ، –٢) ،

ب (٢ ، ١) ⟵ (٢ –٢ ، ١) = (٠ ، ١) ⟵ (٠ ، ١ – ٣)

= ب$_٣$ (٠ ، –٢)

مثال (٥)

في مستوى إحداثي رُسم Δ أ ب جـ فيه: أ (٤ ، ٥) ، ب (٤ ، –١) ، جـ (٠ ، –١) .



شكل (٥ – ١٢)

[انظر الشكل (٥–١٢)]

ارسم صورة Δ ٱ ب جـ (لتكن Δ ٱ$_1$ ب$_1$ جـ$_1$) بالانسحاب .

(س ، ص) ⟵ (س – ٥ ، ص) ، ثم احسب مساحة كل من Δ ٱ ب جـ،

Δ ٱ$_1$ ب$_1$ جـ$_1$. ما العلاقة بين مساحتيهما ؟

الحـــل :

صور النقاط ٱ ، ب ، جـ وفق الانسحاب (س ، ص) ⟵ (س – ٥ ، ص)

هي : ٱ$_1$ (٤ – ٥ ، ٥) = ٱ$_1$ (–١ ، ٥)

ب (٤ ، –١) ⟵ ب$_1$ (٤ – ٥ ، –١) = ب$_1$ (–١ ، –١)

جـ (٠ ، –١) ⟵ جـ$_1$ (٠ – ٥ ، –١) = جـ$_1$ (–٥ ، –١)

ونلاحظ إن : $\overleftrightarrow{\text{ٱ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ٱ}_1\text{ ب}_1}$ يوازيان محور الصادات .

∴ |ٱ ب| = ٥ – (–١) = ٥ + ١ = ٦ وحدات طول .

|ٱ$_1$ ب$_1$| = ٥ – (–١) = ٥ + ١ = ٦ وحدات طول

كما نلاحظ أن $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب}_1\text{ جـ}_1}$ يوازيان محور السينات :

∴ |ب جـ| = ٤ – ٠ = ٤ وحدات طول ،

|ب$_1$ جـ$_1$| = –١ – (–٥) = –١ + ٥ = ٤ وحدات طول

مساحة Δ ٱ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ٱ ب × ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ = ١٢ وحدة مربعة

مساحة Δ ٱ$_1$ ب$_1$ جـ$_1$ = $\frac{١}{٢}$ ٱ$_1$ ب$_1$ × ب$_1$ جـ$_1$ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ = ١٢ وحدة مربعة

∴ مساحة Δ ٱ ب جـ = مساحة Δ ٱ$_1$ ب$_1$ جـ$_1$

تمارين ومسائل

[١] عبِّر عن كل انسحاب مما يأتي رمزياً :

أ) انسحاب مقداره ٣ وحدات في الاتجاه السالب لمحور الصادات .

ب) انسحاب مقداره ٤ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات .

جـ) انسحاب مقداره نصف وحدة في الاتجاه الموجب لمحور الصادات .

ء) انسحاب مقداره وحدة ونصف في الاتجاه السالب لمحور السينات .

[٢] عيِّن مقدار واتجاه كل من الانسحابات الآتية :

أ) (س ، ص) ⟵ (س + ٧ ، ص)

ب) (س ، ص) ⟵ (س − ٣,٥ ، ص)

جـ) (س ، ص) ⟵ (س ، ص − $\frac{٣}{٥}$)

ء) (س ، ص) ⟵ (س ، ص + ١,٢٥)

[٣] أوجد صورة النقاط : أ (٠ ، ٣) ، ب (٢ ، −٣) ، جـ (٤ ، −١)
بالانسحاب : (س ، ص) ⟵ (س ، ص + ٢)

[٤] أوجد صورة كل من النقاط : ن (١ ، ٢) ، ك (٣ ، −٤) ، ل (٥ ، ٠)
بالانسحاب : (س ، ص) ⟵ (س − ١ ، ص)

[٥]أوجد صورة كل من النقاط الآتية : ء (−٢ ، ٥) ، هـ (٠ ، −١) ،
و (٢ ، −٣) تحت تأثير إنسحاب في الاتجاه الموجب لمحور السينات مقداره ٤ وحدات .

[٦] أوجد صورة كل نقطة من النقاط الآتية : س (−١ ، ٤)، ص (١ ، ٢) ،

ع (‎−٣ ، ‎−٢) تحت تأثير انسحاب في الاتجاه السالب لمحور الصادات مقداره ٣ وحدات .

[٧] إذا كانت ن (٥ ، ‎−٣) .حدد مقدار واتجاه الانسحاب ؟ الذي يجعل ن١ صورة ن في كل من الحالتين الآتيتين :

أولاً : ن١ (١ ، ‎−٣) ثانياً : ن١ (٥ ، ٠)

[٨] إذا كانت م١ هي صورة م (٣ ، ‎−١) وفق انسحاب معين عبر رمزياً عن هذا الانسحاب في كل من الحالتين الآتيتين :

أولاً : م١ (٣ ، ‎−٣) ثانياً : م١ (٥ ، ‎−١)

[٩] إذا كانت النقطة ب (س ، ص) هي صورة النقطة ٱ (‎−٢ ، ٠) بانسحاب (س ، ص) ⟵ (س + ٤ ، ص) . أوجد إحداثيّ ب ، ثم عبر رمزياً عن الانسحاب الذي تحت تأثيره تكون النقطة ٱ صورة للنقطة ب .

[١٠] في مستوى إحداثي إذا كانت ٱ (٣ ، ١) ، ب (‎−١ ، ١) وكانت ء ، جـ صور لكل من ٱ ، ب على الترتيب تحت تأثير الانسحاب (س ، ص) ⟵ (س ، ص + ٣) . ارسم الشكل ٱ ب جـ ء . ما نوعه؟ ثم أوجد طول كل ضلع من اضلاعه .

[١١] ارسم في مستوى إحداثيّ $\overline{\text{ٱ ب}}$ حيث ٱ (٣ ، ٣) ، ب (٠ ، ‎−١) ثم ارسم صورة $\overline{\text{ٱ ب}}$ ولتكن $\overline{\text{ء جـ}}$ وفق الانسحاب (س ، ص) ⟵ (س − ٣ ، ص) ، ثم أكمل رسم الشكل ٱ ب جـ ء وأوجد مساحته.

[١] ارسم في مستوى إِحداثي الشكل جـ ء هـ و، حيث جـ (–٦ ، –٤)، ء (–٦ ، ٠) ، هـ (٠ ، ٠) ، و (٠ ، –٤) ما نوع هذا الشكل؟
أوجد محيطه ومساحته .

[٢] ارسم في مستوى إِحداثي الشكل س ص ع ل ، فيه : س (٢ ، –١) ، ص(–٤ ، –١) ، ع (–٣ ، ٣) ، ل (١ ، ٣) ما نوع الشكل ؟
أوجد مساحته .

[٣] في مستوى إِحداثي ،حدّد النقاط : ا (٣ ، ٠) ، ب (٣ ، –٤) ، جـ (–١ ، ٠)، ء (–١ ، ٤)، ما نوع الشكل ا ب جـ ء؟
ثم أوجد إِحداثيّ نقطة تقاطع قطريه .

[٤] $\overline{\text{ا ب}}$ حيث ا (٢ ، ٣) ، ب (٢ ، –٥) . أوجد صورتها $\overline{\text{ا}_1\text{ ب}_1}$ بانسحاب مقداره ٥ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور الصادات ثم أوجد طول $\overline{\text{ا ب}}$ ، طول $\overline{\text{ا}_1\text{ ب}_1}$ ونقطة المنتصف لكل من $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا}_1\text{ ب}_1}$.

[٥] في مستوى إِحداثي ارسم الشكل ا ب جـ ء . إِذا كانت ا (٢ ، –٢)، ب (–١ ، –٤)، جـ (–٤ ، –٢)، ء (–١ ، ٠) ما نوع هذا الشكل؟
أوجد طول $\overline{\text{ا جـ}}$ وطول $\overline{\text{ء ب}}$ ، ثم أوجد مساحة الشكل ا ب جـ ء.

[٦] إِذا كانت ا (٥ ، ١) ، ب (٠ ، ١) ، وكانت ء ، جـ صورتي ا ، ب على الترتيب بالانسحاب (س ، ص) ⟵ (س ، ص – ٥) عبر رمزياً عن كل انسحاب في كل حاله من الحالات الآتية :

أولاً : الذي يجعل ب صورة ا . ثانياً : الذي يجعل ا صورة ء .

[٧] إذا كانت ا (٣ ، ٠) وكانت ب صورة ا بالانسحاب

(س ، ص) ⟵ (س + ٥ ، ص) ، جـ صورة ب بالانسحاب

(س ، ص) ⟵ (س، ص + ٥) ، ء صورة ا بالانسحاب

(س ، ص) ⟵ (س ، ص – ٥)، حدد النقاط ب ، جـ، ء ما نوع الشكل ا ب جـ ء . أوجد مساحته .

[٨] في مستوى إِحداثيّ ، ارسم $\overline{\text{س ص}}$ حيث س (–١ ، ١)، ص (–٥ ، ١)

أوجد إِحداثي نقطة منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، ولتكن ل ، ثم حدد صورة ل، ولتكن ع ، وفق الانسحاب (س ، ص) ⟵ (س، ص +٤) أكمل رسم المثلث ع س ص . ما نوعه ؟ ثم أوجد مساحته .

[٩] في مستوى إحداثي ارسم $\overline{\text{ا ب}}$ حيث ا (٣ ، ٢) ، ب (–٢ ، ٢) ، ثم ارسم صورة $\overline{\text{ا ب}}$ في محور السينـــات ولتكن $\text{ا}_{١}$ $\text{ب}_{١}$ ، حيث $\text{ا}_{١}$ صورة ا ، $\text{ب}_{١}$ صورة ب ، عبر رمزياً عن الانسحابات التالية:

١) $\text{ا}_{١}$ صورة النقطة ا . ٢) $\text{ب}_{١}$ صورة النقطة ب .

[١٠] إذا كان س ص ع ل مربع فيه س (٧ ، ٣) ، ص (٧ ، –٢) ، ع (٢ ، –٢) ، ل (٢ ، ٣) . أوجد صورة المربع س ص ع ل .

أولاً : بالانعكاس في محور السينات ، ثم عبر رمزياً عن الانسحاب الذي يجعل المربع الناتج صورة المربع س ص ع ل .

٥ : ٥ اختبار الوحدة

س١ : إذا كانت أ (٤ ، –٣) ، ب (–٢ ، –٣) نقطتان في مستوى الإِحداثي المطلوب :

أ) ما هو المحور الموازي لـ $\overline{أب}$.

ب) أوجد طول $\overline{أب}$.

جـ) أوجد إحداثيّ نقطة المنتصف لـ $\overline{أب}$.

س٢ : إذا كانت جـ (–٣ ، ٢) ، ء (–٣ ، –٢) المطلوب :

أ) عبِّر كلامياً عن الانسحاب الذي يجعل ء صورة لـ جـ .

ب) عبِّر رمزياً عن الانسحاب الذي يجعل جـ صورة لـ ء .

جـ) أوجد صورة النقطة جـ بالانسحاب : (س، ص) ⟵ (س– ٣، ص)

س٣ : ارسم في مستوى إحداثي هـ و حيث هـ (٢ ، ٤) ، و (–١ ، ٠) ، ثم ارسم صورتها ، وفق الانسحاب : (س ، ص) ⟵ (س ، ص – ٣)،